0.1. *Кириллов П.И., Шапеев В.П.* **Решение двумерных интегральных уравнений методом коллокаций и наименьших квадратов с полиномиальной аппроксимацией**

Предложен новый численный алгоритм решения методом коллокаций и наименьших квадратов двумерного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода в произвольном прямоугольнике $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$:

$$u = r + f, \tag{1}$$

где:

$$u = u(x_1, x_2),$$

$$r = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} K(x_1, x_2, s_1, s_2) u(s_1, s_2) ds_1 ds_2,$$

$$f = f(x_1, x_2).$$

$u(x_1, x_2)$, $K(x_1, x_2, s_1, s_2)$, $f(x_1, x_2)$ - искомое решение, ядро и свободный член, соответственно, при этом $x_1 \in [a_1, b_1], x_2 \in [a_2, b_2]$. Приближённое численное решение уравнения (1) ищется в виде сплайна из кусков полиномиальных аппроксимантов степени p в прямоугольных ячейках, на которые разбивается область Ω. Для ячеек разбиения области принимается сквозная нумерация. В ячейке с индексом i аппроксимант имеет вид:

$$u_{hi}(x_1, x_2) = \sum_{p_1 + p_2 \le p} c_{ij} x_1^{p_1} x_2^{p_2}.$$

После подстановки аппроксиманта с неопределёнными коэффициентами в (1) относительно коэффициентов c_{ij} получается приближённое соотношение. Коллокациями этого соотношения в точках области Ω, число которых больше числа неизвестных коэффициентов c_{ij}, выписывается переопределённая система линейных уравнений. Повторный интеграл в правых частях уравнений коллокаций, содержащий неизвестную функцию, переносится со знаком минус в левую часть и затем приближённо подсчитывается по всей области Ω в рассматриваемой точке коллокации с помощью прямого произведения одномерных квадратурных формул Гаусса. Полученная система уравнений относительно искомых коэффициентов c_{ij} решается прямым методом.

В численных экспериментах получены высокоточные решения уравнений (1). Исследовано влияние степени переопределённости СЛАУ (отношение числа c_{ij} к числу точек коллокаций) на точность численного решения. На тестах установлено, что она значительно превосходит точности, достигнутые в работах [1] и [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-21-00499).

Список литературы

[1] Tari A., Shahmorad S. A computational method for solving two-dimensional linear Fredholm integral equations of second kind // Australian Mathematical Society. ANZIAM J. 49 (2008), 543-549.

[2] Ma Yanying, Huang Jin, Li Hu. A Novel Numerical Method of Two Dimensional Fredholm Integral Equations of the Second Kind // Mathematical Problems in Engineering Volume 2015. Hindawi Publishing Corporation.