0.1. *Кузнецов К.С.* **Численное решение нестационарной одномерной системы уравнений Навье — Стокса при помощи нейронных сетей с дискретизацией по времени при помощи неявных методов Рунге-Кутта высокого порядка**

В работе [1] показан метод решения дифференциальных уравнений в частных производных при помощи нейронных сетей. Также авторами описана возможность применения неявных методов Рунге — Кутта для дискретизации по времени нестационарной задачи.

Решение дифференциального уравнения при помощи нейронной сети заключается в минимизации выбранного функционала качества, отвечающего решению поставленной задачи. Данный подход получил широкое распространение в последние годы под названием Physics Informed Neural Networks (PINN).

В текущей работе была решена система уравнений Навье — Стокса, описывающая движение вязкого теплопроводного газа в ограниченной области, которая вкупе с граничными условиями имеет вид:

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(R\rho\theta\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\rho)=0, \tag{2}$$

$$c_v\rho\left[\frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]=k\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-R\rho\theta\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x),\ \rho|_{t=0}=\rho_0(x),\ \theta|_{t=0}=\theta_0(x). \tag{4}$$

$$u|_{x=0}=u_1(t),\ \rho|_{x=0}=\rho_1(t),\ \theta|_{x=0}=\theta_1(t). \tag{5}$$

$$u|_{x=L}=u_2, \theta|_{x=L}=\theta_2, x\in[0,L], t\in[0,T]. \tag{6}$$

где u,ρ,θ – неизвестные функции скорости, плотности и температуры соответственно, R – универсальная газовая постоянная, μ – вязкость газа, c_v – удельная теплоемкость газа, k – коэффициент теплопроводности газа, $u_0,\rho_0,\theta_0,u_1,\rho_1,\theta_1,u_2,\theta_2$ – заданные функции.

Неявный метод Рунге — Кутта можно записать в следующем виде:

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{j=1}^{s}b_jk_j, \tag{7}$$

$$k_i=f\left(x,t_n+c_ih,y_n+h\sum_{j=1}^{s}a_{ij}k_j\right), \tag{8}$$

где s – порядок метода.

В текущей работе используются Методы Гаусса — Лежандра. В качестве коэффициентов c_i в (8) выбираются корни смещенного полинома Лежандра $P_s(2x-1)$. Коэффициенты b_j в (7) и a_{ij} в (8) можно вычислить по следующим формулам [2]:

$$b_j=\int_0^1 l_j(x)dx, \quad a_{ij}=\int_0^{c_i} l_j(x)dx,$$

где $l_j(x)=\prod_{j\neq i}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}, j=1,...,s$.

Методы, определенные данным образом, являются A–устойчивыми. Погрешность метода составляет h^{2s}.

Перед решением задачи (1)–(6) необходимо провести её обезразмеривание. Для решения нейронными сетями, используя дискретизацию по времени при помощи метода Гаусса — Лежандра, предлагается решать задачу в два шага, разбив временной интервал $t\in[0,1]$ пополам. В качестве y_n в (7) первого этапа будут использоваться начальные условия u_0,ρ_0,θ_0 для каждой неизвестной функции, в то время как его решение $u_{n+1},\rho_{n+1},\theta_{n+1}$ будет являться начальным условием второго шага. При использовании метода Гаусса — Лежандра 100 порядка погрешность каждого из этапов будет равна $0.5^{2\cdot100}=6.2\cdot10^{-61}$, что меньше машинного нуля.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ ДВО РАН (№ 075-01290-23-00) и при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-02-2023-946)

Список литературы

[1] Raissi M., Perdikaris P, Karniadakis G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. 2019. Vol. 378. P. 686–707.

[2] Butcher J. C. Practical Runge —Kutta methods for scientific computation // The ANZIAM Journal. 2009. Vol. 50, N. 3. P. 333–342.