0.1. *Кириллова Н.Е., Акиньшин А.А.* Математическое моделирование малокомпонентной модели циркадного осциллятора

Мы исследуем математическую модель малокомпонентной генной сети, которая участвует в регуляции суточных ритмов, связанных с важными процессами метаболизма многих видов живых организмов. Рассматривается нелинейная гладкая динамическая система кинетического типа, которая является шестимерной моделью такого циркадного осциллятора. Для этой системы проверяется неустойчивость стационарной точки и ищутся циклы в её фазовом портрете.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_1(\Gamma_1(x_2)\cdot\gamma_1(x_3) - x_1);\\ \dot{x}_\ell &= k_\ell(\Gamma_\ell(x_5)\cdot L_\ell(x_1) - x_\ell);\ \ell = 2,3,4;\\ \dot{x}_5 &= k_5(\Gamma_5(x_6) - x_5);\\ \dot{x}_6 &= k_6(L_6(x_4) - x_6). \end{aligned} \tag{1}$$

Переменные динамической системы (1) описывают концентрации компонент x_j, а скорости их естественного разложения характеризуются положительными коэффициентами k_j, здесь $1 \le j \le 6$.
Положительные функции L_s, $s = 2,3,4,6$, являются монотонно убывающими и описывают отрицательные обратные связи, при этом $L'_s < 0$. Положительные функции γ_1, Γ_p, $p = 1,2,3,4,5$, являются монотонно возрастающими и соответствуют отрицательным обратным связям. Здесь также $\Gamma'_p > 0$.
Подробную биологическую интерпретацию и изучение похожей динамической системы см. в [1, 2]. В нашей работе мы не конкретизируем вид убывающих и возрастающих функций, указанных выше.
Для системы (1) получено достаточное условие единственности стационарной точки S_0:

$$L_4L'_2\Gamma'_4\Gamma_2 \ge L'_4L_2\Gamma_4\Gamma'_2;\ L_4L'_3\Gamma'_4\Gamma_3 \ge L'_4L_3\Gamma_4\Gamma'_3. \tag{2}$$

Теорема. *Если условие* (2) *выполнено и*

$$-L'_6\Gamma_5L_4\Gamma'_4 > 8 - 2(\Gamma_1\gamma'_1L'_3\Gamma_3 + \Gamma'_1\gamma_1L'_2\Gamma_2),$$

тогда стационарная точка S_0 *неустойчива и система* (1) *имеет цикл.*
Производные L'_s, Γ'_p, γ'_1 и значения этих функций образуют матрицу линеаризации M системы (1) в стационарной точке S_0.
Далее, мы провели численные эксперименты с траекторией системы (1) и её предельным циклом, используя специальное облачное приложение. Для численного моделирования системы дифференциальных уравнений (1) использован алгоритм lsoda из пакета deSolve, подробнее см. [3]. С помощью этого приложения была построена проекция найденного цикла на двумерную плоскость, натянутую на пару собственных векторов, соответствующих собственным значениям матрицы M с положительной вещественной частью. В отдельных случаях мы наблюдали здесь бифуркации циклов. Для некоторых других динамических систем биохимической кинетики нами доказано существование не менее двух циклов в их фазовых портретах.
Научный руководитель — д.ф.-м.н., профессор Голубятников В. П.

Список литературы

[1] Голубятников В. П., Подколодная О. А., Подколодный Н. Л. и др. Об условиях существования циклов в двух базовых моделях циркадного осциллятора млекопитающих // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24. № 4. С. 39–53.
[2] Podkolodnaya O., Tverdokhleb N., Podkolodnyy N. Computational modeling of the cell-autonomous mammalian circadian oscillator // BMC Systems Biology. 2017. Vol. 11. P. 27–42.
[3] Акиньшин А. А., Аюпова Н. Б., Голубятников В. П. и др. Об одной численной модели циркадного осциллятора // Сибирский журнал вычислительной математики. 2022. Т. 25. № 3. С. 227–240.