

0.1. Спиридонова О.Н. Разностный метод решения одной задачи насыщенной фильтрационной консолидации с предельным градиентом

В работе предлагается и исследуется разностный метод решения начально-краевой задачи для системы уравнений следующего вида

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(g \left(\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(L, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

$$p(0, t) = p(L, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in (0, L), \quad (6)$$

где $Q_T = (0, L) \times (0, T)$. Задача (1)–(6) носит прикладной характер: соотношения (1)–(6) могут быть использованы для описания одномерного процесса фильтрационной консолидации с предельным градиентом (см., напр., [1]). При этом p определяет поровое давление, u — перемещение частиц скелета, f — плотность массовых сил, функция g , задающая закон фильтрации, имеет следующий вид:

$$g(|\xi|) = \begin{cases} 0, & |\xi| \leq \xi_0, \\ 1, & |\xi| > \xi_0. \end{cases}$$

Рассматривается неявная по времени разностная схема. Аппроксимация пространственного оператора осуществляется с помощью метода сумматорных тождеств и существенно опирается на обобщенную постановку задачи. В этом случае полагается, что

$$u \in W_2^{(1)}(0, T; \overset{\circ}{V}), \quad p \in L_2(0, T; \overset{\circ}{V}_1),$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x) \quad \text{п. в. при } x \in (0, L)$$

и для любых $v \in W_2^{(1)}(0, T; \overset{\circ}{V})$, $z \in L_2(0, T; \overset{\circ}{V}_1)$ имеет место равенство

$$\int_{\overline{Q}_T} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - p \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} z + g \left(\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \right\} dx dt = \int_{\overline{Q}_T} f(x, t) \frac{\partial v}{\partial t} dx dt.$$

Здесь $\overline{Q}_T = [0, T] \times [0, L]$, $\overset{\circ}{V}$ — замыкание гладких функций, равных нулю при $x = 0$, в норме пространства $W_2^1(0, L)$, $\overset{\circ}{V}_1$ — замыкание гладких функций, равных нулю на границе отрезка $[0, L]$, в норме того же пространства.

Доказана разрешимость и сходимости построенной разностной схемы. Следует отметить, что с математической точки зрения (1)–(6) представляет собой систему уравнений в частных производных относительно перемещений упругой среды и давления жидкости. Причем уравнение относительно давления — вырождающееся, с нелинейностью в пространственном операторе, порождающей негладкость решения. В связи с этим исследование сходимости проводится при минимальных условиях на гладкость исходных данных, оно основано на получении ряда априорных оценок, позволяющих, в дальнейшем, с помощью метода монотонности, установить сходимость кусочно-постоянных восполнений разностного решения к обобщенному решению рассматриваемой задачи.

Научные руководители — д.ф.-м.н. Павлова М. Ф., к.ф.-м.н. Рунг Е. В.

Список литературы

- [1] Кадыров Ф.М., Костерин А.В., Скворцов Э.В. Плоская задача фильтрационной консолидации для упругого полупространства с разрывными начальными условиями // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57. № 6 (60). С. 1–7.