

0.1. Марчевский И.К., Серафимова С.Р. Аналитическое и полуаналитическое вычисление интегралов от неограниченных функций, возникающих при решении граничных интегральных уравнений

Краевые задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца можно отнести к «универсальным» математическим моделям, поскольку они возникают при описании широкого круга физических процессов. К их числу, в частности, принадлежат задачи моделирования течения несжимаемой среды и расчета рассеяния электромагнитных волн на проводящих поверхностях. Сведение таких задач к решению граничных интегральных уравнений (ГИУ) является общеизвестным приемом, который положен в основу распространенного метода граничных элементов. Неизвестной величиной в ГИУ может выступать как плотность потенциала простого или двойного слоя, так и некоторая производная величина, например, интенсивность вихревого слоя или плотность поверхностных токов (в задачах аэродинамики и электродинамики соответственно).

В рамках разных подходов к решению упомянутых задач ядра соответствующих ГИУ могут быть как ограниченными, так и содержать особенность — слабую (интегрируемую) или сильную; в последнем случае выделяют сингулярные и гиперсингулярные ГИУ, интегралы в которых понимаются в смысле главного значения по Коши или конечной части по Адамару соответственно [1].

В абсолютном большинстве применяемых на сегодня схем численного решения ГИУ используется, по-существу, метод коллокаций, в соответствии с которым удовлетворение уравнения производится лишь в отдельных точках. В то же время результаты решения модельных задач показывают, что переход к схеме Галеркина (или Петрова — Галеркина) позволяет значительно повысить точность решения, особенно на грубых и существенно неравномерных поверхностных сетках.

В настоящей работе представлены приемы и результаты аналитического и полуаналитического вычисления «характерных» интегралов, возникающих при построении дискретных аналогов ГИУ для двумерных [2] и трехмерных [3] задач, в которых ядро выражено через фундаментальное решение уравнения Лапласа или Гельмгольца или некоторые его производные.

В частности, в задачах гидродинамики для двойных интегралов от ядра $K_2 = \nabla G_2 = \frac{r-\xi}{2\pi|r-\xi|^2}$ получены точные выражения, применимые при использовании линейных базисных и проекционных функций; для ядра $K_3 = \nabla G_3 = \frac{r-\xi}{4\pi|r-\xi|^3}$ разработана схема аддитивного выделения особенности и получены точные формулы для ее аналитического интегрирования в случае постоянных базисных и проекционных функций.

Для построения соответствующих формул, включая выделение особенностей в подынтегральных выражениях и их интегрирования, активно использованы возможности современных систем компьютерной алгебры, прежде всего Wolfram Mathematica.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ (грант № 17-79-20445).

Список литературы

- [1] Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
- [2] Kuzmina K. S., Marchevskii I. K. On the calculation of the vortex sheet and point vortices effects at approximate solution of the boundary integral equation in 2D vortex methods of computational hydrodynamics // Fluid Dynamics. 2019. Vol. 54. N. 7. P. 991–1001.
- [3] Marchevskii I. K., Shcheglov G. A. The algorithm of the vortex sheet intensity determining in 3D incompressible flow simulation around a body // Mathematical Models and Computer Simulations. 2020. Vol. 12, N. 4. P. 464–473.