

0.1. Иванова М.В. Сеточные методы решения одного нелинейного уравнения теплопроводности

В работе рассматривается первая начально-краевая задача для нелинейного параболического уравнения [1]. Для решения задачи предлагаются явная и неявная разностные схемы, построенные методом сумматорных тождеств [2]. Качественные свойства построенных приближенных методов решения исследуются на модельных задачах с точным решением и без точного решения.

Ищется функция u , удовлетворяющая уравнению

$$c\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{k}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}) + \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad (1)$$

$$x \in (0, l), \quad t \in (0, T],$$

$$\mathbf{u}(0, t) = \mu(t), \quad \mathbf{u}(l, t) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Уравнение (1) — (3) является нелинейным параболическим уравнением, которое описывает процесс распространения тепла в стержне. На левом и правом концах стержня заданы граничные условия первого рода.

Для построения разностных схем на временном отрезке $t \in (0, T]$ для задачи (1) — (3), введем равномерную сетку ω_τ с шагом равным $\tau = \frac{T}{m}$, а на $x \in (0, l)$ — равномерную сетку $\bar{\omega}_h$ с шагом равным $h = \frac{l}{n}$, $y(x, t)$ — сеточную функцию.

Для решения (1) — (3) задачи предлагаются явная

$$\begin{aligned} c\rho y_t(x, t) &= \frac{1}{2}(k(y(x, t)y_{\bar{x}}(x, t))_x + \\ &+ \frac{1}{2}(k(y(x, t)y_x(x, t))_{\bar{x}} + f(y(x, t))), \\ y(x, 0) &= 0, \forall x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0, t) &= \mu(t), t \in \omega_\tau, \end{aligned}$$

и неявная разностные схемы

$$\begin{aligned} c\rho y_{\bar{t}}(x, t) &= \frac{1}{2}(k(y(x, t)y_{\bar{x}}(x, t))_x + \\ &+ \frac{1}{2}(k(y(x, t)y_x(x, t))_{\bar{x}} + f(y(x, t))), \\ y(x, 0) &= 0, \forall x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0, t) &= \mu(t), t \in \omega_\tau. \end{aligned}$$

Экспериментально были установлены условия на шаги сетки, обеспечивающие устойчивость явной схемы и сходимость итерационного метода для неявной схемы.

Научный руководитель — ассистент Глазырина О. В.

Список литературы

- [1] КАРЧЕВСКИЙ М. М., ПАВЛОВА М. Ф. Уравнения математической физики /Казань: Лань, 2015, 228 с.
[2] САМАРСКИЙ А. А. Введение в теорию разностных схем /Москва: Физматлит, 1971, 553 с.