0.1. *Неустроева Л.* Определение точечных источников в задачах тепломассопереноса

Данная работа посвящена исследованию вопросов существования и единственности решения задач определения функции источников по точечным данным переопределения. Исследования важны с точки зрения большого количества приложений, прежде всего в задачах определения источников распространения загрязняющих веществ в воздухе или жидкости, актуальность подтверждается большим вниманием к данной тематике и, в частности, огромным количеством работ. Итак, мы рассматриваем вопрос об определении вместе с решением правой части специального вида в уравнении

$$u_t-\Delta u+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i}+a_0(x)u=\sum_{i=1}^{m} N_i(t)\delta(x-x_i)+f_0, \quad (1)$$

где $(x,t)\in Q=(0,T)\times G$, $G=\mathbb{R}^n$ или $G=\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n: x_n>0\}$ $(n=2,3)$, δ — дельта-функция Дирака. Здесь неизвестными являются функции $N_i(t)$ - интенсивности источников загрязнения. Уравнение (1) дополняется краевыми, начальными условиями и условиями переопределения

$$Bu|_S=g, \quad u|_{t=0}=u_0(x), \quad u(y_j,t)=\psi_j(t), \quad (2)$$

где $j=1,2,\ldots,m$, $S=(0,T)\times\partial G$, $Bu=\frac{\partial u}{\partial\nu}$ или $Bu=u$ (ν - единичная внешняя нормаль к ∂G. Пусть $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ при $n=2$ и $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ при $n=3$. Скобки $(\cdot,\cdot)$ обозначают скалярное произведение $\mathbb{R}^n$. Мы предполагаем, что

$$a_i\in W^2_\infty(G),\ \nabla\varphi_j,\Delta\varphi_j,a_0\in L_\infty(G),. \quad (3)$$

где $j\le m$, $i\le n$. Введем функции

$$\varphi_i(x)=\frac{1}{2}\int_0^1(\boldsymbol{a}(x_i+\tau(x-x_i)),(x-x_i))\,d\tau.$$

Пусть $\delta_j=min_i r_{ij}, j=1,2,\ldots,s$, где $r_{ij}=|x_i-y_j|$. Введем матрицу A_0 с элементами $a_{ji}=e^{\varphi_i(y_j)}$ если $|x_i-y_j|=\delta_j$ и $a_{ji}=0$ в противном случае. Мы предполагаем, что $detA_0\ne 0$, $u_0(x)\in W^1_2(G)$, $u_0(x)|_\Gamma=g(x,0)$ если $Bu=u$. Фиксируем $\lambda\ge 0$ и предположим, что

$$e^{-\lambda t}g\in W_2^{1/4,1/2}(S)\ (\text{для } Bu=\frac{\partial u}{\partial\nu});$$
$$e^{-\lambda t}g\in W_2^{3/4,3/2}(S)\ (\text{для } Bu=u),\ f_0e^{-\lambda t}\in L_2(G). \quad (4)$$

Пусть w_0 есть решение задачи

$$w_{0t}+Lw_0=f_0(t,x), Bw_0|_S=g, w_0|_{t=0}=u_0(x). \quad (5)$$

После замены $w=e^{-\lambda t}(u-w_0)$, задача (1)-(2) сведется к задаче

$$w_t+Lw+\lambda w=\sum_{i=1}^{m} e^{-\lambda t}N_i(t)\delta(x-x_i),$$
$$Bw|_S=0, \quad w|_{t=0}=0, \quad (6)$$

$$w(y_j,t)=e^{-\lambda t}(\psi_j(t)-w_0(t,x_j))=e^{-\lambda t}\tilde{\psi}_i(t), \quad (7)$$

где $j\le m$. Пусть $V_\gamma(t)=\frac{e^{-\gamma^2/4t}}{4\pi t}$ при $n=2$ и $V_\gamma=\frac{\gamma e^{-\gamma^2/4t}}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}$ при $n=3$. Предположим, что имеет место представление

$$\tilde{\psi}_j(t)=\int_0^t V_{\delta_j}(t-\tau)\psi_{0j}(\tau)d\tau,\ \psi_{0j}e^{-\lambda t}\in L_2(0,T). \quad (8)$$

Пусть $W^1_{p,B}(G)$ есть пространство функций $u\in W^1_p(G)$, удовлетворяющих однородным условиям Дирихле если $Bu=u$ и $W^1_{p,B}(G)=W^1_p(G)$ если $Bu\ne u$. Пусть $W^{-1}_{p,B}(G)$ – двойственное пространство к $W^1_{q,B}(G)$.

Теорема. *Пусть* $p\in(1,n/(n-1))$ *и в случае* $G=\mathbb{R}^n_+$ $a_i=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$. *Тогда существует* λ_2 *такое, что при* $\lambda\ge\lambda_2$, *если условия* (4), (8) *выполнены, то существует единственное решение* $(u,\boldsymbol{N})$ *задачи* (1)-(2) *такое, что* $u=e^{\lambda t}(w_0+w)$, *где* $w_0\in W_2^{1,2}(Q)$, $e^{\lambda t}w_0$ *есть решение задачи* (5), $w\in L_2(0,T;W^1_{p,B}(G))$ *есть решение задачи* (6), $w_t\in L_2(0,T;W^{-1}_{p,B}(G))$, *and* $w\in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$, *где* $Q_\varepsilon=\{(x,t)\in Q:\ |x-x_i|>\varepsilon\ \forall i\le m\}$ *для всех* $\varepsilon>0$, $e^{-\lambda t}N_i(t)\in L_2(0,T)$ $(i=1,\ldots,m)$.

Доказательство основано на асимптотических представлениях, приведенных в работе [1]. Мы получаем теоретические результаты и строим алгоритм, позволяющий определить точечные источники по дополнительным данным в точках, лежащих в области. Полученные результаты могут быть использованы при создании численных алгоритмов решения ряда экологических задач.

Научный руководитель — д.ф.-м.н. Пятков С. Г.

Список литературы

[1] Pyatkov S., Neustroeva L. On some asymptotic representations of solutions to elliptic equations and their applications // Complex Variables and Elliptic Equations. 2021. Vol. 66. N. 6-7. P. 964–987.