0.1. *Спиридонова О.Н.* **Разностный метод решения одной задачи насыщенной фильтрационной консолидации с предельным градиентом**

В работе предлагается и исследуется разностный метод решения начально-краевой задачи для системы уравнений следующего вида

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(g\left(\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right)=0,\ (x,t)\in Q_T, \quad (2)$$

$$u(0,t)=0,\ t\in(0,T), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(L,t)=0,\ t\in(0,T), \quad (4)$$

$$p(0,t)=p(L,t)=0,\ t\in(0,T), \quad (5)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ p(x,0)=p_0(x),\ x\in(0,L), \quad (6)$$

где $Q_T=(0,L)\times(0,T)$. Задача (1)–(6) носит прикладной характер: соотношения (1)–(6) могут быть использованы для описания одномерного процесса фильтрационной консолидации с предельном градиентом (см., напр., [1]). При этом p определяет поровое давление, u — перемещение частиц скелета, f — плотность массовых сил, функция g, задающая закон фильтрации, имеет следующий вид:

$$g(|\xi|)=\begin{cases} 0, & |\xi|\le\xi_0,\\ 1, & |\xi|>\xi_0.\end{cases}$$

Рассматривается неявная по времени разностная схема. Аппроксимация пространственного оператора осуществляется с помощью метода сумматорных тождеств и существенно опирается на обобщенную постановку задачи. В этом случае полагается, что

$$u\in W_2^{(1)}(0,T;\overset{\circ}{V}),\quad p\in L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1),$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad p(x,0)=p_0(x)\quad \text{п. в. при } x\in(0,L)$$

и для любых $v\in W_2^{(1)}(0,T;\overset{\circ}{V})$, $z\in L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\overline{Q}_T}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}-p\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}z+\right.$$
$$\left.+g\left(\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|\right)\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\right\}dxdt=\int\limits_{\overline{Q}_T}f(x,t)\frac{\partial v}{\partial t}\,dxdt.$$

Здесь $\overline{Q}_T=[0,T]\times[0,L]$, $\overset{\circ}{V}$ — замыкание гладких функций, равных нулю при $x=0$, в норме пространства $W_2^1(0,L)$, $\overset{\circ}{V}_1$ — замыкание гладких функций, равных нулю на границе отрезка $[0,L]$, в норме того же пространства.

Доказана разрешимость и сходимость построенной разностной схемы. Следует отметить, что с математической точки зрения (1)–(6) представляет собой систему уравнений в частных производных относительно перемещений упругой среды и давления жидкости. Причем уравнение относительно давления — вырождающееся, с нелинейностью в пространственном операторе, порождающей негладкость решения. В связи с этим исследование сходимости проводится при минимальных условиях на гладкость исходных данных, оно основано на получении ряда априорных оценок, позволяющих, в дальнейшем, с помощью метода монотонности, установить сходимость кусочно-постоянных восполнений разностного решения к обобщенному решению рассматриваемой задачи.

Научные руководители — д.ф.-м.н. Павлова М. Ф., к.ф.-м.н. Рунг Е. В.

Список литературы

[1] Кадыров Ф. М., Костерин А. В., Скворцов Э. В. Плоская задача фильтрационной консолидации для упругого полупространства с разрывными начальными условиями // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57. № 6 (60). С. 1–7.