

Численный алгоритм построения полиномов устойчивости

РЫБКОВ МИХАИЛ ВИКТОРОВИЧ

Институт вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск), Россия
e-mail: mixailrybkov@yandex.ru

НОВИКОВ ЕВГЕНИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

Институт вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск), Россия

При решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений широко применяются явные методы типа Рунге-Кутты, поскольку они просты в реализации, легко распараллеливаются и не требуют обращения матрицы Якоби [1]. Однако при интегрировании жестких задач условие устойчивости накладывает сильные ограничения на величину шага интегрирования, что существенно снижает эффективность явных методов. Известно, что функцией устойчивости явного m -стадийного метода типа Рунге-Кутты является многочлен степени m [1]. Поэтому вопрос об устойчивости таких методов сводится к расположению корней многочлена устойчивости в комплексной плоскости.

В [1–2] исследуются алгоритмы построения многочленов устойчивости на основе чебышевского альтернанса. В этом случае метод будет иметь максимальную длину области устойчивости вдоль вещественной оси. В [1] построен алгоритм получения коэффициентов многочленов устойчивости, с помощью которых можно построить явные методы с заданной формой и размером области устойчивости до степени $m = 13$.

Расчеты показали, что коэффициенты многочленов устойчивости убывают с ростом m , и, в частности, при $m = 13$ величина коэффициента порядка 10–26 при наивысшей степени многочлена. Из-за ошибок округления продолжить расчет коэффициентов при $m > 13$ с двойной точностью проблематично.

Чтобы вычислить коэффициенты многочлена устойчивости при более высоких степенях m , был реализован алгоритм с использованием инструментов библиотеки `qd` [3]. Разработанный алгоритм позволил вычислить коэффициенты многочленов устойчивости до степени $m = 35$. Вычисления проведены с «четверной» точностью. Показано, что форма, размер и структура области устойчивости зависят от расположения корней многочлена устойчивости в комплексной плоскости. Построены оценки, позволяющие определить размер области устойчивости в зависимости от степени многочлена m и порядка соответствующего явного метода. Данные соотношения позволяют заранее, не прибегая к вычислению коэффициентов многочленов устойчивости, оценить размер интервала устойчивости метода.

Показано, что не только порядок точности и количество стадий метода влияют на вид области устойчивости. Нужной формы и размера можно добиться заданием входных параметров построенного алгоритма, с помощью которого могут быть получены области устойчивости под конкретный набор задач, если известна информация о примерном расположении собственных чисел матрицы Якоби в комплексной плоскости исходной системы дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00047).

Список литературы

- [1] Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем / Новосибирск: Наука, 1997. — 197 с.
- [2] Скворцов Л.М. Простой способ построения многочленов устойчивости для явных стабилизированных методов Рунге-Кутты // Матем. Моделирование. — 2011. — Т.23, №1. С. 81-86.
- [3] YOZO HIDA, XIAOYE S LI, DAVID H BAILEY. Quad-double arithmetic: algorithms, implementation, and application. Technical Report LBNL-46996 / Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA 94720, 2000. — 28 p.