Оценивание множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений

Д.Ю. Людвин

Институт вычислительных технологий СО РАН
г. Новосибирск, Россия
(lyudvin@ngs.ru)

1 Постановка задачи

Рассмотрим систему полиномиальных уравнений

$$F(X) = 0, \tag{1}$$

где $F(X) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))^\top$ – вектор полиномов вида

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \cdots \sum_{k_n=0}^{K_n} a_{(i)k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}. \tag{2}$$

Обозначим через $P = (p_j) \in \mathbb{R}^l$, где $l = n(K_1 + 1) \cdots (K_n + 1)$, вектор коэффициентов полиномов (2). Пусть известно, что p_j может принимать любые значения из заданного интервала $\boldsymbol{p}_j$, т. е. $p_j \in \boldsymbol{p}_j$. Рассматривая правые части (2) как функции $\varphi_i(X, P)$, зависящие от переменной $X = (x_i)$ и параметра $P = (p_j)$, принимающего значения из заданного интервального вектора $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_j)$, запишем систему (1) в виде

$$\varPhi(X, P) = 0 \qquad \text{или} \qquad \varphi_i(X, P) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Возьмём интервальные расширения левых частей уравнений (3) по $p_j \in \boldsymbol{p}_j$, получим систему интервальных полиномиальных уравнений

$$\boldsymbol{\varPhi}(X, \boldsymbol{P}) = 0 \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{\varphi}_i(X, \boldsymbol{P}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\varphi}_i(X, \boldsymbol{P})$ – интервальное расширение функции $\varphi_i(X, P)$ на брусе $\boldsymbol{P}$.

Под интервальным полиномом $\boldsymbol{\varphi}_i(X, \boldsymbol{P})$ будем понимать множество вещественных полиномов $\varphi_i(X, P)$ с коэффициентами $P \in \boldsymbol{P}$.

Множество решений интервальной системы $\boldsymbol{\varPhi}(X, \boldsymbol{P}) = 0$ определим как

$$\varXi(\boldsymbol{\varPhi}, \boldsymbol{P}) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid (\exists P \in \boldsymbol{P})\,(\varPhi(X, P) = 0)\}. \tag{5}$$

Нас будут интересовать задачи:

- внешнего оценивания множества решений, т.е. нахождения по-возможности наименьшего бруса (т. е. прямоугольного параллелепипеда со сторонами, параллельными координатным осям) $\boldsymbol{V} \supseteq \varXi(\boldsymbol{\varPhi}, \boldsymbol{P})$,

- внутреннего оценивания множества решений, т. е. нахождения по-возможности наибольшего бруса $\boldsymbol{U} \subseteq \varXi(\boldsymbol{\varPhi}, \boldsymbol{P})$.

2 Внешняя оценка множества значений интервального полинома на заданном брусе

Рассмотрим полином $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 x + \boldsymbol{a}_2 x^2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n x^n$ одной переменной x с интервальными коэффициентами $\boldsymbol{a}_i$, $i = 0, \ldots, n$. Известно, что данный полином можно ограничить двумя вещественными функциями

$$f^l(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{lower}(\boldsymbol{a}_i, x, i) \qquad \text{и} \qquad f^u(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{upper}(\boldsymbol{a}_i, x, i), \tag{6}$$

где

$$\mathrm{lower}(\boldsymbol{a}_i, x, i) = \begin{cases} \underline{\boldsymbol{a}}_i x^i, & \text{если } x \geq 0 \text{ или } i \text{ четное}, \\ \overline{\boldsymbol{a}}_i x^i, & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

$$\mathrm{upper}(\boldsymbol{a}_i, x, i) = \begin{cases} \overline{\boldsymbol{a}}_i x^i, & \text{если } x \geq 0 \text{ или } i \text{ четное}, \\ \underline{\boldsymbol{a}}_i x^i, & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Внешнюю оценку множества значений интервального полинома $\boldsymbol{f}(x)$ на интервале $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}$ можно получить как результат подстановки этого интервала вместо переменной x и выполнения соответствующих операций интервальной арифметики. Однако вследствие эффекта зависимости и погрешностей вычислений полученная оценка будет достаточно грубой. Чтобы улучшить качество оценивания, вычислим интервальные расширения $\boldsymbol{f}^l(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{f}^u(\boldsymbol{x})$ соответствующих ограничивающих функций на интервале $\boldsymbol{x}$, используя схему Горнера. В качестве внешней оценки множества значений полинома $\boldsymbol{f}(x)$ на $\boldsymbol{x}$ возьмём интервал

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [\ \underline{\boldsymbol{f}}^l(\boldsymbol{x}), \overline{\boldsymbol{f}}^u(\boldsymbol{x})\ ]. \tag{7}$$

Внешнее оценивание области значений полинома n переменных

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \ldots \sum_{k_n=0}^{K_n} \boldsymbol{a}_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \tag{8}$$

с интервальными коэффициентами $\boldsymbol{a}_{k_1 k_2 \ldots k_n} \in \mathbb{IR}$ на брусе $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ можно свести к рассмотренному выше случаю полинома одной переменной, если представить полином (8) в так называемой вложенной форме [1]. Например, полином $\boldsymbol{f}(x_1, x_2)$ двух переменных запишем в виде полинома переменной x_2

$$\boldsymbol{q}(x_2) = \boldsymbol{q}_0(x_1) + \ldots + \boldsymbol{q}_{k_2}(x_1) \cdot x_2^{k_2} + \ldots + \boldsymbol{q}_{K_2}(x_1) \cdot x_2^{K_n}, \tag{9}$$

коэффициенты $\boldsymbol{q}_{k_2}(x_1)$, $k_2 = 1, \ldots, K_2$, которого являются интервальными полиномами переменной x_1.

Далее вычислим внешние оценки $\boldsymbol{q}_{k_2}(\boldsymbol{x}_1)$ множеств значений полиномов $\boldsymbol{q}_{k_2}(x_1)$ на интервале $\boldsymbol{x}_1$, используя (6) и (7). Подставив найденные интервалы в (9), получим интервальный полином $\boldsymbol{q}(x_2) = \sum_{k_2=0}^{K_2} \boldsymbol{q}_{k_2}(\boldsymbol{x}_1) \cdot x_2^{k_2}$. В результате внешнего оценивания полинома $\boldsymbol{q}(x_2)$ на интервале $\boldsymbol{x}_2$ получим интервал $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}_2)$, который является внешней оценкой исходного интервального полинома $\boldsymbol{f}(x_1, x_2)$ на брусе $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)^\top$.

3 Интервальные корни интервального полинома одной переменной

Рассмотрим интервальное полиномиальное уравнение

$$\boldsymbol{f}(x) = 0 \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 x + \boldsymbol{a}_2 x^2 + \dots + \boldsymbol{a}_n x^n = 0, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{IR}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Интервальный полином $\boldsymbol{f}(x)$ можно ограничить вещественными полиномами $f^l(x)$ и $f^u(x)$, используя соотношения (6). Пусть существует число $\hat{x} \in \mathbb{R}$, такое что $0 \in [\ f^l(\hat{x}), f^u(\hat{x})\ ]$. *Интервальный корень* уравнения (10) определим как наибольший интервал $\boldsymbol{q}$, содержащий $\hat{x}$, такой что для любой точки $x \in \boldsymbol{q}$ имеет место включение

$$0 \in [\ f^l(x), f^u(x)\ ].$$

Интервальный корень $\boldsymbol{q}$ может быть конечным интервалом $[q_1, q_2]$, как вырожденным, так и невырожденным, полубесконечным интервалом $(-\infty, q_3]$ или $[q_4, +\infty)$, а также всем множеством действительных чисел. Заметим, что числа q_i, $i = 1, \dots, 4$, являются корнями вещественных полиномов $f^l(x)$ и $f^u(x)$, ограничивающих интервальный полином $\boldsymbol{f}(x)$.

Предположим, что для полиномов $f^l(x)$ и $f^u(x)$ найдены все действительные корни. Пусть среди найденных корней k различных. Запишем их в порядке возрастания

$$q_1 < \ldots < q_j < \ldots < q_k. \tag{11}$$

Рассмотрим интервалы

$$\boldsymbol{q}_1 = (-\infty, q_1], \dots, \boldsymbol{q}_j = [q_{j-1}, q_j], \dots, \boldsymbol{q}_{k+1} = [q_k, +\infty).$$

Невырожденный интервал $\boldsymbol{q}_j$, $j = 1, \dots, k+1$ является интервальным корнем уравнения (10), если для любой точки q, принадлежащей внутренности интервала $\boldsymbol{q}_j$, справедливо

$$0 \in [\ f^l(q), f^u(q)\ ].$$

Вырожденный интервал $[q_j, q_j]$, $j = 1, \dots, k$ является интервальным корнем уравнения (10), если для любых точек q' и q'', принадлежащих внутренностям интервалов $\boldsymbol{q}_j$ и $\boldsymbol{q}_{j+1}$ соответственно, справедливо

$$0 \notin [\ f^l(q'), f^u(q')\ ] \qquad \text{и} \qquad 0 \notin [\ f^l(q''), f^u(q'')\ ].$$

Объединение интервальных корней полинома $\boldsymbol{f}(x)$ является внешней оценкой множества решений

$$\Xi(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{a}) = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists a \in \boldsymbol{a})\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0)\}$$

интервального уравнения (10).

Для нахождения интервальных корней интервального полиномиального уравнения (10) предлагается следующий алгоритм.

Шаг 1. *Вычисляем корни вещественных полиномов $f^l(x)$ и $f^u(x)$. Присваиваем компонентам вектора $Q = (q_j)$ найденные различные корни так, что $q_1 < q_2 < \ldots < q_k$, где k — длина вектора Q. Инициализируем пустые списки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.*

Шаг 2. *Если* $k = 0$ *и* $0 \in [\ f^l(q), f^u(q)\ ]$, *где* $q \in \mathbb{R}$, *то интервальным корнем уравнения является вся числовая ось, поэтому в список* $\mathcal{L}_1$ *заносим интервал* $(-\infty, +\infty)$. *Если* $k = 0$ *и* $0 \notin [\ f^l(q), f^u(q)\ ]$, *где* $q \in \mathbb{R}$, *то уравнение не имеет корней и список* $\mathcal{L}_1$ *остается пустым.*

Шаг 3. *Если* $k \neq 0$, *заносим в список* $\mathcal{L}_2$ *интервалы* $\boldsymbol{q}_1 = (-\infty, q_1], \boldsymbol{q}_2 = [q_1, q_2], \ldots, \boldsymbol{q}_k = [q_{k-1}, q_k], \boldsymbol{q}_{k+1} = [q_k, +\infty)$. *Присваиваем* $j := 1$, $m := 0$.

Шаг 4. *Если* $j > k+1$, *то заканчиваем работу алгоритма, в противном случае извлекаем* j*-ую запись из списка* $\mathcal{L}_2$. *Если* $j = 1$, *то* $q := q_1 - \theta$, *где* θ — *некоторое положительное число. Если* $j = k+1$, *то* $q := q_k + \vartheta$, *где* ϑ — *некоторое положительное число. Если* $j \neq 1$ *и* $j \neq k+1$, *то* $q := \frac{1}{2}(q_{j-1} + q_j)$.

Шаг 5. *Если* $m = 0$ *и* $0 \notin [\ f^l(q), f^u(q)\ ]$, *то в список* $\mathcal{L}_1$ *заносим в качестве первой записи вырожденный интервал* $[q_j, q_j]$. *Если* $m = 0$ *и* $0 \in [\ f^l(q), f^u(q)\ ]$, *то в список* $\mathcal{L}_1$ *заносим в качестве первой записи интервал* $\boldsymbol{q}_1$. *Присваиваем* $j := j+1$, $m := m+1$ *и переходим на шаг 4.*

Шаг 6. *Если* $m \neq 0$ *и* $0 \notin [\ f^l(q), f^u(q)\ ]$, *то присваиваем* $m := m+1$ *и заносим в список* $\mathcal{L}_1$ *в качестве* m*-ой записи вырожденный интервал* $[q_j, q_j]$. *Если* $m \neq 0$ *и* $0 \in [\ f^l(q), f^u(q)\ ]$, *то из списка* $\mathcal{L}_1$ *извлекаем* m*-ую запись. Если извлечённый интервал* $\boldsymbol{r}$ *является вырожденным, то в списке* $\mathcal{L}_1$ *меняем* m*-ую запись на интервал* $\boldsymbol{q}_j$, *в противном случае — на интервал* $[\ \underline{\boldsymbol{r}}, \overline{\boldsymbol{q}}_j\ ]$. *Присваиваем* $j := j+1$ *и переходим на шаг 4.*

4 Внешняя оценка множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений

Для внешнего оценивания множества (5) можно использовать интервальный метод Ньютона [2]-[4]. Пусть $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{IR}^n$ брус, на котором будем искать решение системы (4). Итерационный алгоритм метода Ньютона на основе наклонов определим следующим образом

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}^{(0)} := \boldsymbol{X}, \\ \boldsymbol{X}^{(k+1)} := \boldsymbol{X}^{(k)} \bigcap \mathcal{N}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{12}$$

где $\mathcal{N}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}) = \tilde{X} + Encl\,(\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(\boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}, X^{(k)}), -\boldsymbol{\Phi}(\tilde{X}, \boldsymbol{P}))$, $\tilde{X} \in \boldsymbol{X}$, $X^{(k)}$ — середина бруса $\boldsymbol{X}^{(k)}$, $\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(\boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}, X^{(k)})$ — интервальный наклон функции $\Phi(X, P)$ на брусе $\boldsymbol{X}^{(k)} \times \boldsymbol{P}$ относительно точки $X^{(k)}$, $Encl\,(\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(\boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}, X^{(k)})$ — внешняя оценка множества решений интервальной линейной системы уравнений

$$\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(\boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}, X^{(k)})\,(X - X^{(k)}) = -\boldsymbol{\Phi}(X^{(k)}, \boldsymbol{P}),$$

полученная с помощью некоторой фиксированной процедуры *Encl*.

Компонентами интервального наклона $\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}, \tilde{X})$ являются интервальные полиномы $\boldsymbol{\varphi}_i^{\angle}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}, \tilde{X})$, $i = 1, \ldots, n$, являющиеся интервальными расширениями вещественных наклонов $\varphi_i^{\angle}(X, P, \tilde{X})$ на брусе $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{P}$. Для их нахождения заменим коэффициенты полиномов $\varphi_i^{\angle}(X, P, \tilde{X})$ интервалами их возможных значений. Далее вычислим внешнюю оценку множества значений полученного интервального полинома на брусе $\boldsymbol{X}$. При этом используем процедуру оценивания, предложенную в §2.

Итерационный процесс (12) продолжаем до тех пор, пока расстояние между $\boldsymbol{X}^{(k)}$ и $\boldsymbol{X}^{(k+1)}$ не меньше некоторой малой величины $\delta > 0$. В качестве процедуры $Encl$ решения интервальной системы линейных уравнений (4) применяем метод Хансена-Сенгупты [5].

Известно, что многомерный метод Ньютона работает эффективно лишь на малых исходных брусах. Если же исходный брус $\boldsymbol{X}$ имеет достаточно большие размеры, то метод, как правило, не приводит к значительному сужению этого бруса. Вычисленный на большом брусе $\boldsymbol{X}$ интервальный наклон $\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}, \tilde{X})$ часто оказывается особенной матрицей. В этом случае применение метода Ньютона может не привести к желаемому результату. Поэтому наряду с методом Ньютона мы будем использовать также метод распространения ограничений на основе анализа совместности по брусу [4].

Рассмотрим i–е, $i = 1, \ldots, n$, уравнение системы (4)

$$\boldsymbol{\varphi}_i(X, \boldsymbol{P}) = 0. \tag{13}$$

Зафиксируем некоторую переменную x_j, $j = 1, \ldots, n$, и заменим в уравнении (13) все неизвестные, кроме x_j, интервалами их возможных значений. Тогда уравнение (13) примет вид интервального полиномиального уравнения

$$\boldsymbol{q}_i(x_j) = 0 \tag{14}$$

степени K_j относительно переменной x_j. Коэффициенты интервального полинома $\boldsymbol{q}_i(x_j)$ вычисляются на основе процедуры, описанной в §2. Далее, используя алгоритм, предложенный в §3, вычислим интервальные корни $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m$ уравнения (14) и найдём их пересечения с j-ой компонентой $\boldsymbol{x}_j$ исходного бруса $\boldsymbol{X}$. Обозначим через W_j объединение полученных множеств. В качестве внешней оценки множества решений уравнения (14) на интервале $\boldsymbol{x}_j$ можно взять интервальную оболочку множества W_j. Очевидно, брус $\hat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{j-1}, \square W_j, \boldsymbol{x}_{j-1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ содержит множество решений системы (4) и в случае $\hat{\boldsymbol{X}} \subset \boldsymbol{X}$ является его более точной внешней оценкой. Процедуру анализа совместности по брусу можно применить ко всем уравнениям и неизвестным системы, организовав циклический процесс их перебора.

Для повышения эффективности описанных выше методов будем дробить исходный брус на более мелкие подбрусы. Подбрусы, полученные при дроблении, будем хранить в рабочем списке $\mathcal{L}$, в который изначально записываем брус $\boldsymbol{X}$. На каждом шаге алгоритма будем подвергать дроблению брус, который является первой записью в списке $\mathcal{L}$. Обозначим этот брус через $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{z}_i)$. Если максимальная ширина компонент бруса $\boldsymbol{Z}$ не меньше заданной малой величины $\varepsilon > 0$, то дробим брус $\boldsymbol{Z}$ на два подбруса $\boldsymbol{Z}'$ и $\boldsymbol{Z}''$, разбивая одну из его компонент пополам.

Наибольшее усечение бруса $\boldsymbol{Z}$ следует ожидать по той компоненте, которая имеет достаточно большую ширину и изменение которой приводит к наибольшему изменению функции $\boldsymbol{\Phi}(X, \boldsymbol{P})$. Поэтому будем производить дробление бруса $\boldsymbol{Z}$ по компоненте, для которой максимальна величина

$$\operatorname{wid} \boldsymbol{z}_j \cdot \sum_{i=1}^{n} |\, \boldsymbol{\varphi}^{\angle}_{ij}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{P}, \tilde{Z}) \,|,$$

где $\tilde{Z} = \operatorname{mid} \boldsymbol{Z}$. Таким образом, если

$$\operatorname{wid} \boldsymbol{z}_s \cdot \sum_{i=1}^{n} |\, \boldsymbol{\varphi}^{\angle}_{is}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{P}, \tilde{Z})\,| = \max_{1\le j\le n} \left\{ \operatorname{wid} \boldsymbol{z}_j \cdot \sum_{i=1}^{n} |\, \boldsymbol{\varphi}^{\angle}_{ij}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{P}, \tilde{Z})\,| \right\},$$

то

$$\boldsymbol{Z}' = \boldsymbol{z}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{z}_{s-1} \times [\,\underline{\boldsymbol{z}}_s, \operatorname{mid} \boldsymbol{z}_s\,] \times \boldsymbol{z}_{s+1} \times \ldots \times \boldsymbol{z}_n, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{Z}'' = \boldsymbol{z}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{z}_{s-1} \times [\,\operatorname{mid} \boldsymbol{z}_s, \overline{\boldsymbol{z}}_s\,] \times \boldsymbol{z}_{s+1} \times \ldots \times \boldsymbol{z}_n. \tag{16}$$

К каждому из брусов $\boldsymbol{Z}'$ и $\boldsymbol{Z}''$ применим процедуру сжатия, которую опишем ниже. Полученные в результате этой процедуры брусы помещаем в список $\mathcal{L}$. Удаляем первую запись из списка $\mathcal{L}$, после чего повторяем описанный выше процесс дробления. Брусы, компоненты которых имеют ширину, меньшую ε, не подвергаются дальнейшему дроблению. Интервальная оболочка всех таких брусов, полученных в результате работы алгоритма, является внешней оценкой $\boldsymbol{V}$ множества решений системы интервальных уравнений (4).

Опишем теперь процедуру сжатия бруса, который обозначим через $\boldsymbol{Y}$. Перед тем, как пытаться уменьшить размеры бруса $\boldsymbol{Y}$ с помощью достаточно трудоёмких методов Ньютона и распространения ограничений, имеет смысл выполнить проверку, содержит ли этот брус решения системы уравнений (4). По результатам проверки в случае несуществования решений на брусе $\boldsymbol{Y}$ можно исключить данный брус из рассмотрения.

Очевидно, что i–ое, $i = 1, \ldots, n$, уравнение системы (4) не имеет решений на брусе $\boldsymbol{Y}$, если множество $\operatorname{ran}(\varphi_i, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{P})$ значений функции $\varphi_i(X, P)$ на брусе $\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{P}$ не содержит нуля, т. е. $0 \notin \operatorname{ran}(\varphi_i, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{P})$. Найти точные границы множества $\operatorname{ran}(\varphi_i, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{P})$ достаточно затруднительно, поэтому будем искать внешнюю оценку этого множества, в качестве которой возьмём интервальное расширение полинома $\boldsymbol{\varphi}_i(X, \boldsymbol{P})$ на брусе $\boldsymbol{Y}$. Для вычисления интервального расширения $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{P})$ будем использовать процедуру, предложенную в §2.

Таким образом, если хотя бы одна компонента интервального расширения $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{P})$ не содержит 0, то брус $\boldsymbol{Y}$ может быть исключен из рассмотрения, в противном случае к брусу $\boldsymbol{Y}$ применяем процедуру анализа совместности и многомерный интервальный метод Ньютона.

5 Внутренняя оценка множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений

Для нахождения внутренней оценки множества $\Xi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P})$ на брусе $\boldsymbol{X}$ используем подход, предложенный в [6, 7] для внутреннего оценивания множеств решений неотрицательных интервальных линейных систем. Пусть $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \boldsymbol{X}$, например, $X^* = \operatorname{mid} \boldsymbol{X}$. Рассмотрим прямую, проходящую через точку X^* параллельно оси Ox_k, $1 \le k \le n$,

$$x_j = x_j^*, \qquad j = 1, \ldots, n, \quad j \ne k. \tag{17}$$

Найдём пересечение прямой (17) с множеством $\Xi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P}) \bigcap \boldsymbol{X}$. Для этого подставим (17) в (4), получим систему интервальных полиномиальных уравнений относительно одной переменной x_k

$$\boldsymbol{\varphi}_i(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, x_k, x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*, \boldsymbol{P}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Для каждого уравнения системы (18) вычислим интервальные корни, используя алгоритм, описанный в §3. Пусть $\boldsymbol{r}_{ki}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{r}_{ki}^{(m)}$ — интервальные корни i-го уравнения системы (18). Найдём пересечения данных корней с k-ой компонентой бруса $\boldsymbol{X}$. Получим s ($s \le m$) интервалов $\tilde{\boldsymbol{r}}_{ki}^{(1)}, \ldots, \tilde{\boldsymbol{r}}_{ki}^{(s)}$, объединение которых обозначим через R_{ki}. Множество R_k решений системы (18) находим в виде

$$R_k = \bigcap_{i=1}^{n} R_{ki}. \tag{19}$$

Если $R_k = \varnothing$ для всех $k = 1, \ldots, n$, то можно выбрать другую начальную точку X^*, например, решение точечной системы $\Phi(X, \mathrm{mid}\ \ \boldsymbol{P}) = 0$ на брусе $\boldsymbol{X}$, которое находим, используя метод Ньютона. Предположим теперь, что $R_k \ne \varnothing$ и представляет собой интервал или объединение интервалов. Выберем среди них интервал с наибольшей шириной и обозначим его через $\boldsymbol{r}_k$.

Рассмотрим отрезок прямой (17), определяемый соотношениями

$$\underline{\boldsymbol{r}}_k \le x_k \le \overline{\boldsymbol{r}}_k, \qquad x_j = x_j^*, \qquad j \ne k.$$

Обозначим через $\boldsymbol{d}$ интервал $[\underline{\boldsymbol{r}}_k + \varepsilon, \overline{\boldsymbol{r}}_k - \varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < \mathrm{mid}\ \boldsymbol{d}$. В качестве k-ой компоненты бруса $\boldsymbol{U}$ возьмём интервал $\boldsymbol{d}$, т. е. $\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{d}$. Остальные компоненты $\boldsymbol{u}_j$, $j = \overline{1, n}$, $j \ne k$, этого бруса находим следующим образом. Вычислим отрезки прямых, проходящих через точки $A(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, \underline{d}, x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*)$ и $B(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, \overline{d}, x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*)$ параллельно j-ой, $j = \overline{1, n}$, $j \ne k$, оси координат и принадлежащие множеству $\Xi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P}) \bigcap \boldsymbol{X}$. Для этого подставим координаты a_l, где $l \ne j$, точки A в уравнения системы (4), получим систему интервальных уравнений относительно переменной x_j

$$\boldsymbol{\varphi}_i(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n, \boldsymbol{P}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Для каждого уравнения системы (20) вычислим интервальный корень, содержащий точку a_j. Найдём пересечение полученных интервалов, которое обозначим через $\boldsymbol{d}_j^{(1)}$. Аналогично для точки B получим интервалы $\boldsymbol{d}_j^{(2)}$. Искомые компоненты $\boldsymbol{u}_j$, $j = \overline{1, n}$, $j \ne k$, бруса $\boldsymbol{U}$ равны

$$\boldsymbol{u}_j = [\max\{\, \underline{\boldsymbol{d}}_j^{(1)}, \underline{\boldsymbol{d}}_j^{(2)}\, \},\ \min\{\, \overline{\boldsymbol{d}}_j^{(1)}, \overline{\boldsymbol{d}}_j^{(2)}\, \}].$$

Полученный брус $\boldsymbol{U} \subseteq \Xi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P})$, т. е. является внутренней оценкой множества решений системы (4).

Список литературы

[1] *Stahl V.* Interval methods for bounding the range of polynomials and solving systems of nonlinear equations, Ph. D. dissertation, University of Linz, Linz, 2006.

[2] *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987.

[3] *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007.

[4] *Хансен Э., Уолстер Дж. У.* Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа. — М.- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012.

[5] *Hansen E. R., Sengupta S.* Bounding solutions of systems of equations using interval analysis // BIT. — 1981. — Vol. 21. — P. 203-211.

[6] *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. — Электронная книга URL: `http://www-sbras.nsc.ru/interval/Library/ InteBooks/SharyBook.pdf` (дата обращения: 01.07.2013)

[7] *Шарый С.П.* Внутреннее оценивание множеств решений неотрицательных интервальных линейных систем // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2006. — Том 9, №2. — С. 189-206.