**Дифференциальные уравнения
- инструмент для изучения экономических систем**

**Московский Государственный Университет Экономики, Статистики и Информатики (МЭСИ)**

В условиях современного развития экономики и науки дифференциальные уравнения выступают в роли актуального инструмента и фундамента для построения научных трудов, функционально применяются в производстве. Необходимость проведения исследований поведения различных систем (технических, экологических и, конечно же, экономических) в конечно итоге достаточно часто приводит к анализу и последующему решению уравнений, включающим: параметры самой системы, скорости их изменения, аналитические выражения в виде производных. Именно такие уравнения с производными и являются дифференциальными.

В рамках данной работы рассмотрены возможности применения методов теории линейных дифференциальных уравнений к исследованию известных макроэкономических динамических моделей, где независимой переменой является **t**. Такие модели достаточно эффективны при исследовании эволюции экономических систем на длительных интервалах времени, эти системы являются предметом исследования экономической динамики.

Экономическая система – это совокупность национальных хозяйственных единиц, т.е. предприятий, организаций, объединенных производственно-технологическими и организационно-хозяйственными связями.

Система называется динамической, если в ее состав входит хотя бы один динамический элемент.

Выход динамического элемента в любой момент времени t зависит от значений входов и выходов в прошлые моменты времени t-1, t-2 и т.д.

Рассмотрим экономические динамические системы как линейные с непрерывным временем. Линейный динамический элемент n-го порядка задается следующим образом:

 (1)

Наиболее часто на практике применяются элементы нулевого (мультипликатор, акселератор), первого (инерционное звено) и второго порядка.

Изучение динамических процессов связано с переходом экономической системы из одного состояния равновесия в другое. Если время перехода на новое состояние равновесия велико, то само понятие экономического равновесия теряет смысл, в этом случае надо изучать процессы непрерывного изменения экономики в динамике. Математическим инструментом для этого служит теория дифференциальных уравнений (ДУ).

1. Экономика в форме динамической модели Кейнса

В модели Кейнса предполагается, что ВВП y(t+1) следующего года равен совокупному спросу текущего года, а совокупный спрос, состоящий из спроса на потребительские (С) и инвестиционные (I) товары, зависит только от ВВП текущего года:

y(t+1)=C[y(t)]+I(t) (2)

При линейной зависимости спроса на потребительские товары от ВВП и примерном постоянстве спроса на инвестиционные товары приходим к соотношению

y(t+1)=C+с y(t)+I, (3)

где C – минимальный объем фонда потребления, не изменяющийся при росте национального дохода;

с (0<c<1) – склонность к потреблению.

Соотношение, действующее при дискретности времени в один год, при дискретности Δt, примет форму:

y(t+Δt)-y(t)=[C-(1-c)y(t)+I]Δt, (4)

где (1-с) – склонность к накоплению.

Однако для анализа динамики лучше использовать непрерывное время. В этом случае используют формальную запись модели в виде дифференциального уравнения.

Проведем анализ динамики перехода к равновесному состоянию национального дохода используя модель в форме дифференциального уравнения, используя непрерывное время.

Путем преобразования при Δt→0 приходим к уравнению:

$\frac{1}{1-с}$ $\frac{dy}{dt}$+y= $\frac{\overline{C}+I}{1-c}$ (5)

Как известно, в качестве общего решения неоднородного ДУ есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного ДУ:

yо.н.=yо.о.+yч.н. (6)

В качестве частного решения последнего уравнения возьмем так называемое равновесное (стационарное) решение

yE =$ \frac{\overline{C}+I}{1-c}$. (7)

Рассмотрим однородное ДУ

$\frac{1}{1-с}$ $\frac{dy}{dt}$+y=0. (8)

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$\frac{dy}{y} $= - (1-c) dt. (9)

Проинтегрировав обе части уравнения, получаем:

ln|y| = -(1-c)t+lnc0, где с0>0, (10)

yо.о.=с0 e-(1-c)t (11)

yо.н.= с0 e-(1-c)t+$ \frac{\overline{C}+I}{1-c}$. (12)

Если спрос на инвестиционные товары изменился с величины I0 до I, I>I0, то в экономике будет происходить переходный процесс от значения ВВП y0=$ \frac{\overline{C}+I\_{0}}{1-c}$ до значения yE, при этом

y(t)=yE+(y0-yE)$e^{-t(1-c)}$. (13)

Как видно из данного выражения, каково бы ни было значение y0 национального дохода в начальный период времени, через некоторое время его значение становится близким к значению в состоянии равновесия yE. Скорость перехода к равновесному состоянию определяется коэффициентом склонности к сбережению $1-c$. Чем больше значение этого коэффициента, тем быстрее значение национального дохода приближается к равновесному.

Если в начальный момент времени y0 > yE, то в последующие моменты времени значение национального дохода остается больше равновесного на всем интервале времени, с постоянным уровнем инвестиций.

 Если в начальный момент времени y0 < yE, то в последующие моменты времени значение национального дохода остается меньше равновесного на всем интервале времени, с постоянным уровнем инвестиций.

1. Экономика в форме модели Самуэльсона-Хикса как линейное динамическое звено второго порядка.

Введем в динамическую модель Кейнса акселератор.

Акселератор – дифференцирующее звено нулевого порядка, выход которого пропорционален скорости входа [1]. Современный экономический словарь дает следующее определение: «отношение прироста индуцированных подъемом производства инвестиций к вызвавшему его относительному приросту объема производства» [2]. Инвестиции могут быть представлены как:

** (14),

r – коэффициент акселерации, прирост потребности в инвестициях при увеличении ВВП на единицу, 0<r<1.

 (15)

Подставим полученное выражение динамическую модель Кейнса:

 (16)

Далее преобразуем:

 (17)

Перейдем к непрерывному времени Δt→0:

 (18)

Получено линейное неоднородное уравнение второго порядка. Общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений.

Найдем общее решение линейного однородного уравнения:

 (19)

Для этого необходимо сделать замену . Тогда получим:

 (20)

Общее решение однородного уравнения есть линейная комбинация фундаментальных решений  и :

 (21)

Частное решение неоднородного уравнения:

 (22)

Общее решение неоднородного уравнения:

 (23)

Частное стационарное решение в этом случае совпадает с решением в модели Кейнса:

 (24)

Если рассмотреть небольшие отклонения от точки равновесия, вызванные некоторым внешним воздействием, то можно обнаружить, что система не всегда будет устойчивой. Экономика, описываемая моделью Самуэльсона-Хикса, устойчива при 0<r<1 и неустойчива при r≥1.

Список литературы:

1. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности 061800 «Математические методы в экономике» – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 295с.
2. Райзберг Б.А., Лозовский Л.Ш., Стародубцева Е.Б. Современный экономический словарь. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.:ИНФРА-М, 2008. – 512с.