Об одной нелинейной разностной схеме 1-го порядка

Вяткин Александр Владимирович
e-mail: vyatkin@icm.krasn.ru

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + u\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\sigma}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\sigma}{2}\frac{\partial v}{\partial y} = f(t,x,y). \tag{1}$$

Здесь $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$, $f(t,x,y)$ — известные функции из класса $C^2(\overline{\Omega})$, где $\overline{\Omega} = [0,T]\times[0,1]\times[0,1]$, а $\sigma(t,x,y)$ — искомая функция. Будем считать, что

$$u(t,x,y) \ge 0, \quad v(t,x,y) \ge 0, \quad \sigma(t,x,y) > 0 \tag{2}$$

на $\overline{\Omega}$, а при $t=0$, $x=0$ и $y=0$ заданы соответственно начальные и граничные условия. Для поиска численного решения используем следующую явную нелинейную разностную схему:

$$\frac{\sigma_{j,k}^m}{\tau} - \frac{1}{\tau}\Bigg[(\sigma_{j,k}^{m-1})^2 + \frac{\tau}{h}\Big[(\sigma_{j-1,k}^{m-1})^2 u_{j-1,k}^{m-1} - (\sigma_{j,k}^{m-1})^2 u_{j,k}^{m-1}\Big] + \\ + \frac{\tau}{h}\Big[(\sigma_{j,k-1}^{m-1})^2 v_{j,k-1}^{m-1} - (\sigma_{j,k}^{m-1})^2 v_{j,k}^{m-1}\Big]\Bigg]^{1/2} = f_{j,k}^m, \tag{3}$$

где $m = 1,\ldots,M$; $j,k = 1,\ldots,N$. Здесь $f_{j,k}^m = f(t_m,x_j,y_k)$, а $\sigma_{j,k}^m$ — значение искомой сеточной функции σ^h в узле (t_m,x_j,y_k). Пусть $\tau \le c\,h$, где c — некоторая константа. Тогда численная схема аппроксимирует уравнение на решении $\sigma(t,x,y)$ с первым порядком точности по h. Проведённый вычислительный эксперимент подтвердил сходимость численного решения с первым порядком точности в норме пространства L_2.