

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Е.И.Васильева

Новокузнецкий институт (филиал) Кемеровского государственного
университета, Новокузнецк

Рассматривается задача моделирования стационарного течения вязкой сжимаемой жидкости. Разработан алгоритм расчёта узловых значений скоростей. Получено точное решение стационарной задачи, которое в дальнейшем использовано для проверки работоспособности численного алгоритма.

1. Дискретная модель

Разрешающие уравнения задачи гидродинамики имеют вид:

$$(C(v) + S)v = Q \quad (1)$$

где $C = \int_{\Omega} \rho N^T \dot{\epsilon} N d\Omega$ - матрица конвективных масс, $\dot{\epsilon}$ - матрица скоростей деформаций, N - матрица функций формы, ρ - плотность,

$$S = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega - \text{матрица демпфирования, } B - \text{матрица деформаций, } D -$$

матрица упругости, Q - вектор эквивалентных нагрузок, v - вектор скорости.

Стационарное поле скоростей получается решением нелинейных системы уравнений (1).

2. Алгоритм расчёта узловых значений скоростей

Разработан алгоритм расчёта узловых значений скоростей, который состоит в следующем:

Шаг 1. Задаются начальные значения вектора скорости v , эквивалентных нагрузок Q и точность решения ϵ .

Шаг 2. Вычисляется матрица демпфирования, которая не пересчитывается:

$$S = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad (2)$$

Шаг 3. $n = n + 1$. На n -й итерации вычисляем матрицу конвективных масс, которая изменяется после каждого изменения вектора скоростей:

$$C_{v_n} = \int_{\Omega} \rho N^T \dot{\varepsilon}(v_n) N d\Omega \quad (3)$$

Шаг 4. Решается нелинейная система уравнений:

$$v_{n+1} = (C_{v_n} + S)^{-1} Q. \quad (4)$$

Шаг 5. Проверка условия сходимости итерационного процесса

$$|v_{n+1} - v_n| \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Шаг 6. Если сходимость не достигнута, то возвращаемся на шаг 3.

3. Программный комплекс «Композит»

Разработанный алгоритм расчёта поля скоростей вязкой сжимаемой жидкости реализован в составе программного комплекса «Композит».

Алгоритм состоит в виде последовательных шагов, выполняемых независимыми приложениями с общими данными: «Вычисление локальных матриц», «Сборка глобальных матриц», «Факторизация матрицы коэффициентов», «Решение системы линейных уравнений».

В результате выполнения этих шагов получаем массив узловых значений скоростей, который на следующем цикле используется для формирования локальных матриц элементов. Таким образом, на каждой итерации выполняются четыре приложения. Форма приложения «Задача гидродинамики» представлена на рисунке 1.

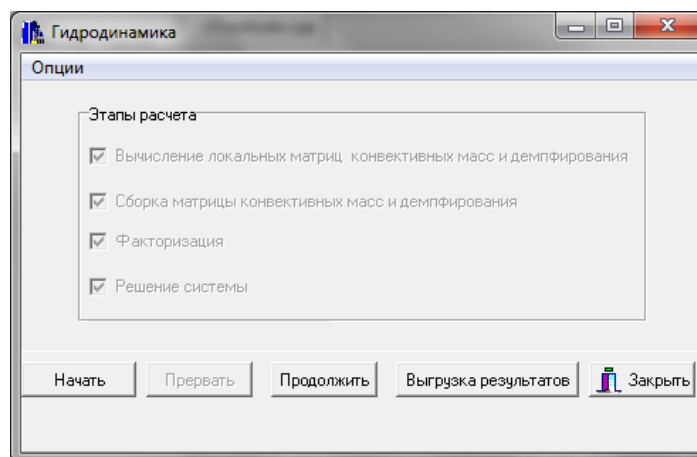


Рисунок 1 - Форма приложения «Задача гидродинамики»

4. Результаты расчётов

4.1 Плоская задача

Пусть в области $\Omega = (x, y): 0 \leq x \leq 200, 0 \leq y \leq 100$ с границами $\Gamma_1 - \Gamma_4$ протекает вязкая сжимаемая жидкость. Ширина канала слева, куда втекает жидкость, имеет размер $H=100$.

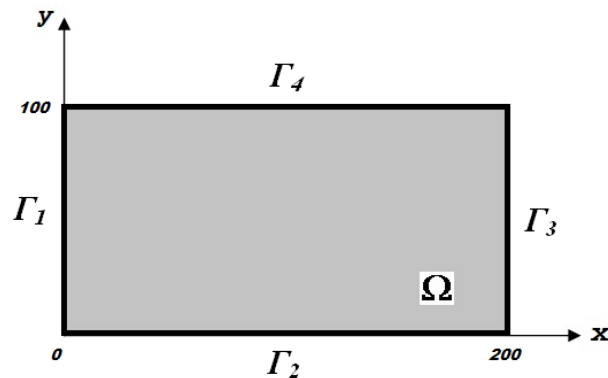


Рисунок 2 – Область определения задачи

Решим численно в указанной области (рисунок 2) уравнение (1) со следующими граничными условиями: $v|_{\Gamma_1} = 0$, $v|_{\Gamma_2} = 0$, $p|_{\Gamma_3} = 1.733 \cdot 10^{-6}$, $v|_{\Gamma_4} = 0$.

При решении задачи методом конечных элементов, исходная область была разбита на 100 треугольных элементов [1]. Результаты численного и аналитического решения приведены на рисунке 3.

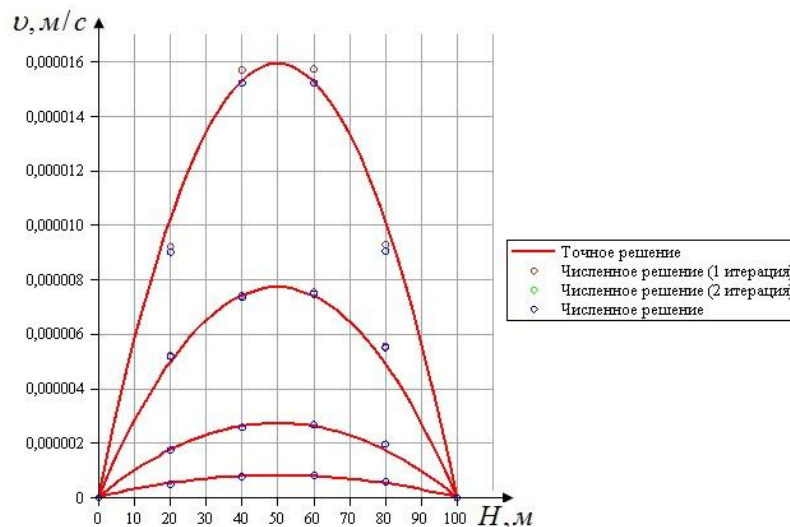


Рисунок 3 – Зависимость распределения скорости по ширине канала от коэффициента объёмной вязкости ξ : 5.3, 15, 105, 505

Также на рисунке 3 показано влияние коэффициента объёмной вязкости на скорость течения жидкости. При увеличении коэффициента объёмной вязкости скорость уменьшается.

4.2 Пространственная задача

Пусть в области $\Omega = (x, y, z) : 0 \leq x \leq 200, 0 \leq y \leq 100, 0 \leq z \leq 100$ протекает вязкая сжимаемая жидкость.

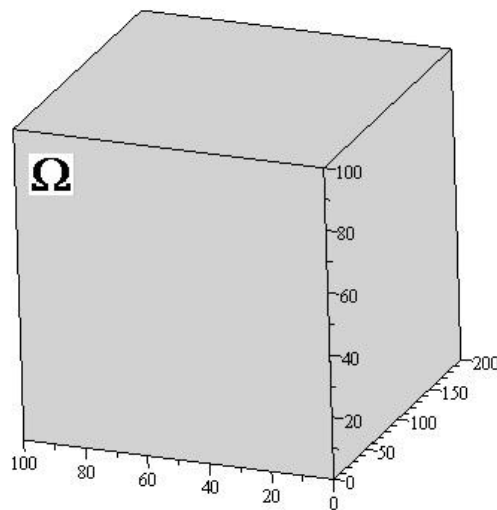


Рисунок 4 – Область определения задачи

Рассмотрим одномерный случай. При решении задачи методом конечных элементов, исходная область была разбита на 10 прямоугольных призм [1]. На рисунке 5 показано, как согласуется численное решение с аналитическим.

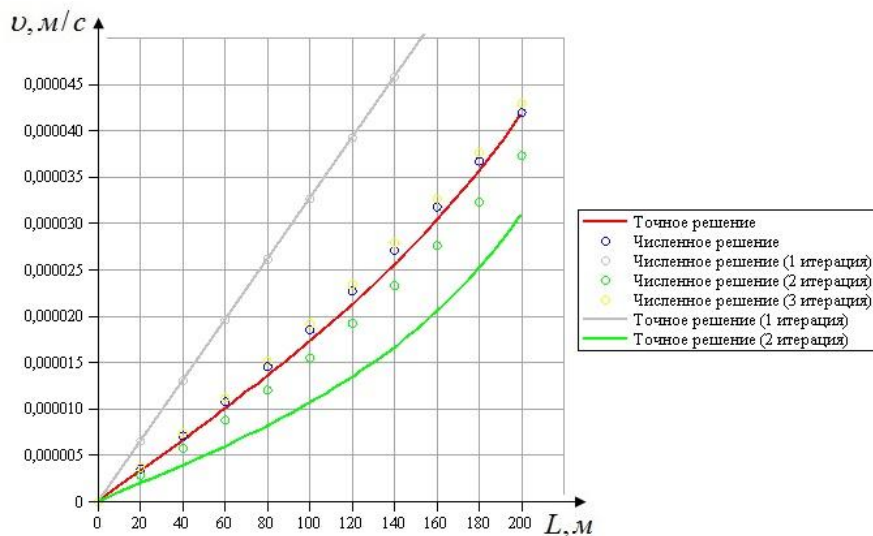


Рисунок 5 – Аналитическое и численное решение задачи по итерациям

Из рисунков 3, 5 видно, что численные решения на каждой итерации хорошо согласуются с аналитическими решениями этих же краевых задач.

Список литературы

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов [Текст] / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.