ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ И ОРИЕНТАЦИИ ПРОЕКТИРУЕМОГО ЗДАНИЯ

Федюк Р.С., Мочалов А.В.
Дальневосточный федеральный университет (г. Владивосток)

При проектировании здания архитектор стремится, чтобы он не был похож на соседние, хочет, чтобы он чем-нибудь от них отличался. Стремясь быть оригинальными, проектировщики пытаются усложнить конфигурацию здания, сделать отдельные участки дома выше, другие намного ниже, остеклить целые стены. Конечно, оригинально спроектированный дом смотрится намного эффектнее, чем типовая постройка. Тем не менее, при его проектировании необходимо учитывать особенности эксплуатации здания и климатические факторы, которые могут отрицательно повлиять на создание энергоэффективного здания [6].

Важно отметить следующее: изменение формы, размеров и ориентации здания с целью оптимального учета влияния наружного климата в его тепловом балансе не требует изменения площадей или объема здания - они сохраняются фиксированными.

Оптимизация теплоэнергетического воздействия наружного климата на тепловой баланс здания за счёт выбора при проектировании формы и ориентации здания разрабатывалась рядом ученых [2-5]. В зависимости от положения и ориентации наружной поверхности здания она подвергается различному теплоэнергетическому воздействию наружного климата. Рассмотрим возможность оптимизации теплоэнергетического воздействия наружного климата на тепловой баланс здания путем изменения его формы и ориентации.

При выборе формы здания в плане следует стараться как можно больше упростить его форму. Поскольку наибольшие теплопотери происходят через стены, желательно, чтобы площадь их поверхности была наименьшей [6].

При отсутствии солнечной радиации и ветра и при отрицательных значениях температуры наружного воздуха наименьшие теплопотери через ограждения обеспечивает сферическая форма здания. Однако строить дома в форме шара, стремясь значительно снизить теплопотери, оригинально, но нерационально, потому что рассчитать и конструктивно выполнить здание шаровидной формы очень трудно. В Бельгии специально для выставки «Атомиум» была возведена конструкция, состоящая из девяти шаров, соединенных между собой переходами. Это уникальная, единственная в мире конструкция, потребовавшая огромных затрат на проектирование, инженерные расчеты и строительство [6].

Наиболее приближенной к сфере фигурой является куб. Следовательно, если имеет место только температурное воздействие наружного климата на здание, то идеальной формой здания является куб. Но теплоэнергетическое воздействие солнечной радиации и ветра на различно ориентированные поверхности здания также различно. Для увеличения теплопоступлений от солнечной радиации в зимнее время необходимо увеличить площадь ограждений южной ориентации, так как в зимнее время на поверхность южной ориентации поступает тепла солнечной радиации даже больше, чем в летнее. Таким образом, чтобы оптимальным образом учесть влияние солнечной радиации и ветра на тепловой баланс здания, его форма должна быть изменена от кубической к параллелограмму [5].

Ориентация и размеры здания, обеспечивающие наименьшие затраты тепловой энергии для поддержания определенных параметров внутренней среды за счет оптимального учета тепла солнечной радиации и ветра в тепловом балансе помещения, могут быть определены на основе минимизации удельной тепловой характеристики здания, вычисляемой как частное от деления затрат тепловой энергии на его отопление или охлаждение к величине общей полезной площади F_0 и обозначаемой q_{F0} или к величине объема здания V_0 и обозначаемой как q_{V0} .

Задача оптимизации ориентации и размеров здания имеет следующее содержание: среди всех зданий, имеющих одну и ту же общую полезную площадь или одинаковый объем, выбрать такое, которое при прочих равных условиях требует минимальных затрат тепловой энергии на его отопление в холодный период года и охлаждение в теплый период года. Здесь в качестве целевой функции, которую предстоит минимизировать, приняты затраты энергии. Учитывая то обстоятельство, что затраты тепла или холода как энергетические показатели имеют одну и ту же размерность, но существенно различную стоимость, в качестве целевой функции желательно принимать затраты энергии на отопление или охлаждение здания в их стоимостном выражении. По существу, эта величина может быть рассмотрена как эксплуатационные затраты. В результате задача теплоэнергетической оптимизации ориентации и размеров здания математически запишется так: определить минимум целевой функции $E \rightarrow \min$ при $F = F_0 = const$ или $V = V_0 = const$, где E - эксплуатационные затраты в годовом цикле, вычисляемые по формуле:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} C_н Q_н dt + \int_{t_3}^{t_4} C_c Q_c dt,$$

, где

$C_н$, $C_с$ – соответственно стоимость единицы тепла и единицы холода, руб/Вт;

$Q_н$, $Q_с$ - соответственно затраты тепловой энергии на обогрев и охлаждение здания, Вт;

(t_2-t_1), (t_4-t_3) – соответственно периоды отопления и охлаждения зданий, ч;

Следует отметить, что $C_н$ и $C_с$ в общем случае являются функциями времени (например, дневной и ночной тарифы на электрическую энергию, используемую для отопления зданий).

Количество тепловой энергии, необходимой для отопления или охлаждения здания, определяется для каждого момента времени как результат суммирования его теплопотерь и теплопоступлений, то есть путем решения уравнения теплового баланса внутреннего воздуха.

Уравнение для определения необходимого количества энергии для отопления или охлаждения здания при заданной внутренней температуре воздуха следующее [1]:

$$\sum_{i=1}^{6} q_{Enc,i} F_{Enc,i} + \sum_{i=1}^{5} q_{W,i} F_{W,i} + Q_F = Q$$

,

(1) где $q_{Enc,i}$ – удельные тепловые потоки через наружные ограждающие конструкции, Вт/м^2, (i=1,2,3,4 относится к стенам, i=5 - к покрытию, i=6 – к перекрытию), рассчитываются при помощи соответствующих математических моделей;

$F_{Enc,\,i}$ – площадь наружных стен, покрытия и перекрытия, м^2;

$q_{w,i}$ – удельные тепловые потоки через заполнения световых проемов, Вт/м^2, рассчитываются при помощи соответствующей математической модели, предполагая, что теплопоступления от солнечной радиации, проходящей через заполнения световых проемов, идет на обогрев внутреннего воздуха помещения;

$F_{w,\,i}$ – площадь заполнения светового проема, м^2;

Q_F – потери за счет механической или естественной вентиляции, Вт

Рассмотрим прямоугольное в плане здание. Введем обозначения: F_0 - общая полезная площадь здания, м^2; a - длина здания, *м,* b - ширина здания, м; H - высота этажа, м; Z - число этажей; F_n - общая полезная площадь на одном этаже, м^2. Кроме того, будем считать, что площади наружных вертикальных ограждающих конструкций (стен и заполнений световых проемов) со стороной «а» равны $F_1 = F_3 = aZH$; соответственно со стороной «*b*» равны $F_2=F_4=bZH;$ тогда площади покрытия и перекрытия $F_5 = F_6= ab.$

Пусть коэффициент остекления наружного ограждения i-ориентации будет P_i ,тогда уравнение (1) может быть переписано как [1]:

$$\sum_{i=1}^{6} q_{Enc,i}(1-P_i)F_{Enc,i} + \sum_{i=1}^{5} q_{W,i}P_iF_{W,i} + Q_F = Q$$

Для перекрытия P_6=0. Правую и левую части последнего уравнения разделим на F_0.

$$\frac{Q}{F_0} = \sum_{i=1,3}[q_{Enc,i}(1-P_i)+q_{wi}P_i]\frac{aHZ}{abZ} + \sum_{i=2,4}[q_{Enc,i}(1-P_i)+q_{wi}P_i]\frac{bHZ}{abZ} +$$

$$+ [q_{Enc,5}(1-P_5)+q_{w,5}P_5+q_{Enc,6}]\frac{ab}{abZ} + Q_F\frac{1}{F_0}$$

Обозначим $q_{F_0} = \frac{1}{F_0}$ - удельная тепловая характеристика здания q_{F_0}, Вт/м^2

Оптимальные значения a_{opt}, и b_{opt} , обеспечивающие при заданной общей полезной площади здания минимальные затраты энергии на его отопление или охлаждение, определяются минимизацией удельной тепловой характеристики здания как функции переменных *a* и *b*. Выполнив соответствующие вычисления, получим [1]:

$$a_{opt} = \sqrt[3]{\frac{HF_0}{q_{Enc,5}(1-P_5)+q_{w,5}P_5+q_{Enc,6}}\frac{\left\{\sum_{i=2,4}[q_{Enc,i}(1-P_i)+q_{w,i}P_i]\right\}^2}{\sum_{i=1,3}[q_{Ent,i}(1-P_i)+q_{w,i}P_i]}}$$

$$b_{opt} = \sqrt[3]{\frac{HF_0}{q_{Enc,5}(1-P_5)+q_{w,5}P_5+q_{Enc,6}}\frac{\left\{\sum_{i=1.3}[q_{Enc,i}(1-P_i)+q_{w,i}P_i]\right\}^2}{\sum_{i=2.4}[q_{Ent,i}(1-P_i)+q_{w,i}P_i]}}$$

Соответственно получим выражения для вычисления оптимального количества этажей[1] Z_{opt} и минимальной удельной тепловой характеристики здания $q_{F_0}^{\min}$ [1]:

$$Z_{opt} = \frac{F_0}{a_{opt}b_{opt}}$$

$$q_{F_0}^{\min} = 3\sqrt[3]{\frac{H^2}{F_0}[q_{Enc,5}(1-P_5)+q_{w,5}P_5+q_{Enc,6}]\psi}$$, где

$$\psi = \left\{\sum_{i=1,3} q_{Enc,i}(1-P_i)+q_{w,i}P_i]\right\}\left\{\sum_{i=2,4} q_{Enc,i}(1-P_i)+q_{w,i}P_i]\right\}$$

Необходимо отметить, что выполненные выше вычисления будут справедливы в том случае, если принять, что тепло проникающей солнечной радиации через заполнение светового проема идет на нагревание внутреннего воздуха и, следовательно, может быть включено в уравнение (1).

Аналогично решается задача определения оптимальных размеров и удельной тепловой характеристики здания при наложении ограничений на его размеры или объем. Теперь найдем решение задачи оптимизации формы и размеров здания в более общем

[1] Оптимальное количество этажей здесь есть рассчитанная величина, как правило, получающаяся дробным значением и ее следует округлять до ближайшего целого значения

виде. Пусть наружная поверхность здания будет иметь криволинейную цилиндрическую поверхность с параллельными образующими осями *OZ.* Решение этой задачи состоит в нахождении уравнения директрисы и высоты цилиндрической поверхности. Введем следующие обозначения:

$q_{Enc}(\varphi)$, $q_w(\varphi)$ - удельные тепловые потоки, проходящие соответственно через наружные вертикальные незастекленные и застекленные ограждающие конструкции, рассчитанные с учетом направленного воздействия солнечной радиации и ветра (фильтрация воздуха) в полярных координатах, *Вт/м* ;

q_{roof}, q^{g}_{roof} удельные тепловые потоки, соответственно, через незастекленные и застекленные части покрытия, рассчитанные с учетом воздействия солнечной радиации, *Вт/м2;*

q_{ft} - удельный тепловой поток через ограждающую конструкцию перекрытия первого этажа, *Вт/м* ;

P_w - коэффициент остекления вертикальной ограждающей конструкции;

P_{roof} - коэффициент остекления покрытия;

r(φ) - радиус (уравнение директрисы), *м;*

φ - угол.

Учитывая принятые обозначения, уравнение теплового режима здания может быть записано так [1]:

$$Q = ZH\int_0^{2\pi}[q_{Enc}(\varphi)(1-P_w)+q_w(\varphi)P_w]\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2}[q_{roof}(1-P_{roof})+q^{gl}_{roof}P_{roof}]\int_0^{2\pi}r^2(\varphi)d\varphi+\frac{1}{2}q_{ft}\int_0^{2\pi}r^2(\varphi)d\varphi = \tag{2}$$

$$= ZH\int_0^{2\pi}q_1(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi+q_2\int_0^{2\pi}r^2(\varphi)d\varphi$$

, где обозначено:

$$q_1(\varphi) = q_{Enc}(\varphi)(1-P_w)+q_w(\varphi)P_w$$

$$q_2 = \frac{1}{2}[q_{roof}(1-P_{roof})+q^{gl}_{roof}P_{roof}+q_{ft}]$$

Q - количество тепла, необходимого для поддержания заданной температуры помещения, *Вт.*

Теперь задача оптимизации формы и размеров здания может быть рассмотрена как

изопараметрическая задача (2).

Определим экстремум функции (2) из уравнения

$$F_0 = \frac{1}{2}Z\int_0^{2\pi}r^2(\varphi)d\varphi \tag{3}$$

Здесь Fo, *H,* q_1 (φ), q - заданные величины, а r (φ), Z - неизвестные переменные, которые нужно определить.

Для определения необходимого начального условия в изопараметрической задаче по нахождению экстремума функции из уравнения представим дополнительную функцию [25]:

$$J^* = \int_0^{2\pi}(Q_1+\lambda Q_2)d\varphi = \int_0^{2\pi}Qd\varphi , \tag{4}$$

где обозначено

$$Q = Q_1+\lambda Q_2$$

$$Q_1 = ZHq_1(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)} + \frac{1}{2}q_2 r^2(\varphi)$$

$$Q_2 = Zr^2(\varphi)$$

λ – некоторая константа, которую нужно определить

Для дополнительной функции (4) запишем уравнение Эйлера для переменной r(φ):

$$\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\partial}{d\varphi}\left(\frac{\partial Q}{\partial r'}\right) = 0$$

и дифференциальное уравнение (4) через Z:

$$\frac{dJ^*}{dZ} = 0$$

В результате мы получим систему уравнений:

$$ZHq_1(\varphi)\left[\frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}} + \frac{r''(r^2+r'^2) - r'^2(r+r'')}{r^2}\right] + ZHq_1'(\varphi)\frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}} + (q_2+2\lambda Z)r = 0 \tag{5}$$

$$\int_0^{2\pi}[Hq_1(\varphi)\sqrt{r^2+r'^2} + \lambda r^2]d\varphi = 0 \tag{6}$$

Следовательно, для определения r(φ), Z, λ у нас есть уравнения (5) и (6) и изопараметрическое условие (3), а для определения неизвестных констант C_1 и C_2 в общем решении уравнения Эйлера (5) у нас есть граничные условия:

$$r(0)=r(2\pi);\quad r'(0) = r'(2\pi)$$

Возьмем частный случай решения задачи оптимизации при $q_1(\varphi)$=const. Тогда *r(φ)=const*, $r'(\varphi) = 0$. Уравнение (14) будет следующим образом:

$$ZHq_1 + (q_2 2\lambda Z)r = 0 \tag{7}$$

Уравнения (3) и (6) соответственно:

$$F_0 = \pi Z r^2; Hq_1 r + \lambda r^2 = 0 \tag{8}$$

Решая совместно систему уравнений (7) и (8), мы получаем:

$$r = \sqrt[3]{\frac{HF_0 q_1}{\pi q_2}} \tag{9}$$

Литература:

1. Табунщиков Ю.А., Бродач М.М. Математическое моделирование и оптимизация тепловой эффективности зданий. М.: АВОК-ПРЕСС, 2002. - 194 с : ил.
2. Брайнина Е. Ю. Пути снижения теплопотерь крупнопанельных зданий. Научно-техническое общество строительной индустрии, материалы совещания. М., 1964. Тепловой режим жилых и общественных зданий из крупноразмерных элементов. Выпуск III.
3. Денисов П. П. Показатель влияния объемно-планировочного решения здания на расход тепла // Жилищное строительство, 1981, №1.
4. Денисов П. П. Теплоэнергетическая оценка зданий различной этажности // Жилищное строительство, 1983, №5.
5. Табунщиков Ю.А., Бродач М.М., Шилкин Н.В. Теплоэнергетические нормативы для теплозащиты зданий АВОК № 4 – 2001
6. Умнякова Н.И. Как сделать дом теплым. М.: Стройиздат, 1996