

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ ИМ. М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ:  
ТЕОРИЯ И НОВЫЕ  
ПРИЛОЖЕНИЯ**

*посвященная 70-летию со дня рождения  
члена-корреспондента РАН В. М. Тешукова*

29 февраля – 2 марта 2016 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Новосибирск  
2016

Программный комитет:

Ляпидевский В. Ю., д.ф.-м.н. — сопредседатель (Новосибирск)  
Чупахин А. П., д.ф.-м.н. — сопредседатель (Новосибирск)  
Чесноков А. А., д.ф.-м.н. — заместитель председателя (Новосибирск)  
Данилова К. Н., к.ф.-м.н. — ученый секретарь (Новосибирск)  
Паршин Д. В., к.ф.-м.н. — ученый секретарь (Новосибирск)  
Алексеев Г. В., д.ф.-м.н. (Владивосток)  
Алексеев С. В., чл.-корр. РАН (Новосибирск)  
Андреев В. К., д.ф.-м.н. (Красноярск)  
Гаврилюк С. Л., профессор (Марсель, Франция)  
Гайфуллин А. М., чл.-корр. РАН (Москва)  
Головин С. В., д.ф.-м.н. (Новосибирск)  
Кедринский В. К., д.ф.-м.н. (Новосибирск)  
Козлов В. В., д.ф.-м.н. (Новосибирск)  
Куликовский А. Г., академик РАН (Москва)  
Липатов И. И., чл.-корр. РАН (Москва)  
Макаренко Н. И., д.ф.-м.н. (Новосибирск)  
Плотников П. И., чл.-корр. РАН (Новосибирск)  
Пухначев В. В., чл.-корр. РАН (Новосибирск)  
Федорук М. П., д.ф.-м.н. (Новосибирск)  
Фокин М. В., д.ф.-м.н. (Новосибирск)

Всероссийская конференция “Нелинейные волны: теория и новые приложения” посвящена памяти чл.-корр. РАН В. М. Тешукова и приурочена к 70-летию со дня его рождения. Инициаторами проведения конференции и ее организаторами выступают Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, который В. М. Тешуков возглавлял с 2004 по 2008 год, и Новосибирский государственный университет, где он с 1989 по 2008 год руководил кафедрой гидродинамики механико-математического факультета. Основная тематика конференции — развитие математических методов исследования актуальных проблем гидродинамики, газовой динамики и смежных областей механики сплошных сред. В программе работы конференции представлены оригинальные сообщения по следующим научным направлениям:

- математическая теория нелинейных волновых процессов в неоднородных средах;
- новые модели многофазных сред и жидкостей с усложненными свойствами;
- аналитические и численные методы в механике сплошных сред.

Сборник включает тезисы докладов, представленных на конференцию учеными из различных научных центров России и зарубежья. Они объединены общим научным направлением — нелинейные волновые процессы в неоднородных средах, крупный вклад в развитие которого внес В.М.Тешуков.

Оргкомитет конференции выражает благодарность за финансовую поддержку Российскому фонду фундаментальных исследований (код проекта 16-01-20043) и Новосибирскому технологическому центру Шлюмберже.

ISBN 978-5-94671-021-3 © Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

## СОДЕРЖАНИЕ

АКСЕНОВ А. В., ДРУЖКОВ К. П. <i>Законы сохранения и симметрии системы уравнений мелкой воды над неровным дном</i> . . . . .	10
АЛЕКСЕЕВ Г. В. <i>Теоретический и численный анализ задач маскировки материальных тел на основе волнового обтекания</i> . . . . .	11
АЛЕКСЕЕНКО С. В., КУЙБИН П. А., ШТОРК С. И., СКРИПКИН С. Г., ЦОЙ М. А. <i>Явление вихревого перезамыкания в закрученном потоке</i> . . . .	12
АЛЛИЛУЕВА А. И., ШАФАРЕВИЧ А. И. <i>Эволюция локализованных асимптотических решений уравнений МГД и линеаризованных уравнений Навье — Стокса</i> . . . . .	13
АНДРЕЕВ В. К. <i>О некоторых задачах для ползущих движений вязкой жидкости</i> . . . . .	14
АБЕНОВ М. М. <i>О классах точных решений уравнения неразрывности</i> . . . .	15
БАЙКИН А. Н., ГОЛОВИН С. В. <i>Развитие трещины гидроразрыва пласта в поропругой среде</i> . . . . .	15
БАНЩИКОВА И. А., ПЕТРОВ Д. М., ЦВЕЛОДУБ И. Ю. <i>Кручение анизотропных стержней при ползучести</i> . . . . .	17
БАСМАНОВА Е. С., ОСТАПЕНКО В. В. <i>Волновые течения, возникающие при подъеме симметричного выпуклого тела, частично погруженного в мелкую воду</i> . . . . .	18
БАТИЩЕВ В. А., ГЕТМАН В. А., ГАЙЛАМАЗЯН А. А. <i>Моделирование коротких спиральных волн в аорте</i> . . . . .	19
БАУТИН С. П., ЗАМЫСЛОВ В. Е., СКАЧКОВ П. П. <i>Теорема о кратных частотах для трехмерных нестационарных течений вязкого теплопроводного газа</i> . . . . .	20
БЕЙЗЕЛЬ С. А., ТОЛЧЕННИКОВ А. А. <i>Локализованные вихри в модели мелкой воды</i> . . . . .	21
БЕКЕЖАНОВА В. Б., ГОНЧАРОВА О. Н., ШЕФЕР И. А. <i>Характеристические возмущения двухслойного течения с испарением</i> . . . . .	22
БЕЛЫХ В. Н. <i>Об эволюции конечного объема идеальной жидкости</i> . . . . .	23
БЕРДНИКОВ В. С., ВИНОКУРОВ В. А., ВИНОКУРОВ В. В., ГРИШКОВ В. А. <i>Особенности ламинарно-турбулентных переходов при свободной конвекции в вертикальных плоских и кольцевых слоях</i> . . . . .	24
БЕРДНИКОВ В. С., МИТИН К. А. <i>Ламинарно-турбулентный переход в свободноконвективном пограничном слое на вертикальной стенке</i> . . . . .	25
БЕРДНИКОВ В. С., МИТИН К. А., КИСЛИЦИН С. А. <i>Нестационарная термогравитационная конвекция в полостях с тонкой стенкой</i> . . . . .	26
БЕРДНИКОВ В. С., МИТИН К. А., ЧЕПУРОВ А. И. <i>Нестационарная конвекция в модели разлома в земной коре после внезапного нагрева его основания</i> . . . . .	27
БОБКОВА М. С., ХЕ А. К., ЧУПАХИН А. П., КРИВОШАПКИН А. Л., ОРЛОВ К. Ю. <i>Численное моделирование гемодинамики в гигантской церебральной аневризме</i> . . . . .	28

БОГАН Ю. А. <i>Сингулярное возмущение стационарной задачи теплопроводности для слоистой среды</i> . . . . .	29
БОГДАНОВ А. Н. <i>Динамика ударных волн в средах с продольной стратификацией</i> . . . . .	30
БОРД Е. Е., ЧЕРЕВКО А. А., ЧУПАХИН А. П. <i>Диаграммы Найквиста для уравнения релаксационных колебаний в гемодинамике головного мозга</i> .	30
БОРИСОВ С. П., КУДРЯВЦЕВ А. Н. <i>Роль линейных и нелинейных эффектов в процессе формирования структуры детонационных волн</i> . . . . .	31
БОРОНИНА М. А., ВШИВКОВ В. А. <i>Реализация и исследование алгоритма расчета уравнений Максвелла в плоских областях</i> . . . . .	32
БРИЗИЦКИЙ Р. В., САРИЦКАЯ Ж. Ю. <i>Коэффициентные обратные задачи для уравнения конвекции–диффузии–реакции</i> . . . . .	34
БУРМИСТРОВА О. А. <i>Термокапиллярная неустойчивость жидкого слоя на внутренней поверхности вращающегося цилиндра</i> . . . . .	35
ВАЛОВ А. В., ГОЛОВИН С. В. <i>Использование стационарной закачки для определения параметров трещины гидроразрыва пласта</i> . . . . .	36
ВИХТЕНКО Э. М., НАММ Р. В., ЧЕРВЯКОВА М. В. <i>О методе двойственности для решения задачи с трещиной</i> . . . . .	37
ВЛАСОВА С. С., ПРОСВИРЯКОВ Е. Ю. <i>Нестационарная температурная конвекция при теплообмене на границах плоского слоя несжимаемой жидкости</i> . . . . .	38
ГОЛОВНЕВ И. А., ГОЛОВНЕВА Е. И., МЕРЖИЕВСКИЙ Л. А. <i>Молекулярно-динамическое исследование влияния размеров наноструктур на динамику ударно-волнового сжатия</i> . . . . .	39
ГОЛУБЯТНИКОВ А. Н., КОВАЛЕВСКАЯ С. Д. <i>О распространении разрывов по неоднородному статическому фону</i> . . . . .	40
ГОЛЫХ Р. Н. <i>Динамика газовой полости в анизотропной неньютоновской жидкости под воздействием высокочастотных акустических полей</i> .	41
ГРЕБЕНЁВ В. Н., НАЗАРЕНКО С. В., МЕДВЕДЕВ С. Б. <i>Промежуточная асимптотика плотности спектра энергии для волновой турбулентности</i> . . . . .	42
ГРИГОРЬЕВ Ю. Н., ЕРШОВ И. В. <i>Асимптотическая теория кривой нейтральной устойчивости течения Куэтта колебательно-возбужденного газа</i> . . . . .	43
ДЕНИСЕНКО Н. С., ЯНЧЕНКО А. А., ЧЕРЕВКО А. А., ХЕ А. К., ЧУПАХИН А. П., ТУЛУПОВ А. А., САВЕЛОВ А. А., АКУЛОВ А. Г., МОШКИН М. П., БОЙКО А. В., КРИВОШАПКИН А. Л., ОРЛОВ К. Ю. <i>Моделирование движения жидкости в упругом тройнике</i> . . . . .	44
ДОБРОХОТОВ С. Ю., МИНЕНКОВ Д. С. <i>О фазовом сдвиге в анзаце Кузмака — Уизема для нелинейных волн</i> . . . . .	45
ДОБРОХОТОВ С. Ю., МИНЕНКОВ Д. С., НАЗАЙКИНСКИЙ В. Е., ТИРОЦЦИ Б. <i>Асимптотические формулы для заплеска длинных волн, порожденных локализованным источником</i> . . . . .	46

ЕФИМОВА А. А., ДУДНИКОВА Г. И., ВШИВКОВ В. А. Численное моделирование структуры ударной ионной волны в бесстолкновительной плазме . . . . .	47
ЖИБЕР А. В., КАМАЕВА С. Н. Построение точных решений уравнения Клейна — Гордона на основе его характеристического кольца Ли . . .	47
ЗАМУРАЕВ В. П., КАЛИНИНА А. П. Влияние односторонних колебаний на аэродинамические характеристики крыловых профилей при трансзвуковом обтекании . . . . .	48
ЗАМУРАЕВ В. П., КАЛИНИНА А. П. Нелинейное воздействие волн давления от источников энергии и втекающей струи на сверхзвуковое течение в канале . . . . .	50
ЗАНИН Б. Ю., ПАВЛЕНКО А. М. Волны и вихри на модели крыла в турбулентном потоке в аэродинамической трубе . . . . .	51
КАЗАКОВ А. Л., ЛЕМПЕРТ А. А., ОРЛОВ СВ. С. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности, имеющих вид тепловой волны . . . . .	52
КАПЦОВ О. В. Идеалы дифференциальных уравнений и точные решения . .	53
КАРАБУТ Е. А., ПЕТРОВ А. Г., ЖУРАВЛЕВА Е. Н. Эволюция кумулятивной струи, возникающей при деформации цилиндрической полости в жидкости. . . . .	54
КИРИЛОВСКИЙ С. В., ПОПЛАВСКАЯ Т. В., ЦЫРЮЛЬНИКОВ И. С. О влиянии модового состава возмущений в высокочастотной аэродинамической трубе на волновые процессы в гиперзвуковом вязком ударном слое . . . . .	54
КОВТУНЕНКО П. В. Одномерная модель эволюции слоя смешения в течи-нии Хеле-Шоу . . . . .	56
КОЗЛОВ В. В., ГРЕК Г. Р., КОРОБЕЙНИЧЕВ О. П., ЛИТВИНЕНКО Ю. А., ШМАКОВ А. Г. Горение истекающей в воздух высокоскоростной микроструи водорода . . . . .	57
КОСТИКОВ В. К., МАКАРЕНКО Н. И. Движение эллиптического цилиндра под свободной поверхностью . . . . .	57
КРИВОШЕИНА М. Н., КОБЕНКО С. В., КОЗЛОВА М. А., ТУЧ Е. В. Моделирование распространения “объемных” волн в анизотропных материалах в условиях динамических нагружений на примере преграды из монокристалла цинка . . . . .	58
КРУТОВА И. Ю., КАЗАЧИНСКИЙ А. О., ОПРЫШКО О. В. Моделирование трехмерных течений в придонных частях восходящих закрученных потоков типа торнадо . . . . .	59
КУЛИКОВ И. М., ЧЕРНЫХ И. Г., ПРОТАСОВ В. А. Математическое моделирование образования, эволюции и взаимодействия галактик в космологическом контексте . . . . .	60
КУЛИКОВСКИЙ А. Г. О применении комплексных уравнений Гамильтона для изучения развития возмущений на стационарном одномерном слабонеоднородном фоне. . . . .	60

КУРМАЕВА К. В., ТИТОВ С. С. <i>Явление гистерезиса звуковой линии . . . . .</i>	61
ЛАЗАРЕВА Г. Г., ФЕДОРОВ Е. А. <i>Математическое моделирование технологии ТГХВ БС . . . . .</i>	62
ЛИ Ю. В., БАРАННИКОВА С. А., БОЧКАРЕВА А. В., ЛУНЕВ А. Г., ЗУЕВ Л. Б. <i>Автоволны локализации пластической деформации высокохромистой стали в присутствии водородосодержащей среды . . . . .</i>	63
ЛИПАТОВ И. И. <i>Распространение возмущений в пограничном слое на поверхности вращающегося конуса . . . . .</i>	64
ЛИПАТОВ И. И., ЛЯПИДЕВСКИЙ В. Ю., ЧЕСНОКОВ А. А. <i>Вынужденные колебания псевдоскачка в плоском канале . . . . .</i>	64
ЛОБАНОВ А. В. <i>Теоретический и численный анализ задачи маскировки для 2D-модели рассеяния при наличии РЕМС-слоя . . . . .</i>	66
ЛЯПИДЕВСКИЙ В. Ю., СТЕПАНОВА И. В., ЧЕСНОКОВ А. А. <i>Структура катящихся волн в двухслойном течении Хеле-Шоу . . . . .</i>	67
ЛЯПИДЕВСКИЙ В. Ю., ТИХОНОВ В. С. <i>Лагранжесв подход при моделировании нестационарных газожидкостных потоков в скважине . . . . .</i>	68
МАКАРЕНКО Н. И., МОРОЗОВ Е. Г., ТАРАКАНОВ Р. Ю., ГРИГОРЕНКО К. С. <i>Стратифицированные течения и внутренние волны в западной Атлантике . . . . .</i>	69
МАКАРОВ П. В., ПЕРЫШКИН А. Ю. <i>Численное моделирование медленных движений — автоволн неупругой деформации . . . . .</i>	69
МАКРИДИН З. В., МАКАРЕНКО Н. И. <i>Синхронизация бегущих волн в диспергирующих системах, близких к распавшимся . . . . .</i>	71
МАЛЬЦЕВА Ж. Л., МАКАРЕНКО Н. И., ЧЕРЕВКО А. А. <i>Стратифицированные течения над сложным рельефом . . . . .</i>	72
МАШКОВ Д. В. <i>Метод оптимизации в задачах идентификации для стационарной модели конвекции–диффузии . . . . .</i>	72
МЕЛЕШКО С. В., МОШКИН Н. П., ПУХНАЧЕВ В. В. <i>Течение вязкоупругой среды Максвелла вблизи критической точки . . . . .</i>	73
МЕРЖИЕВСКИЙ Л. А. <i>Моделирование ударно-волновых процессов в упруго-вязкой среде Максвелла . . . . .</i>	74
МЕСТНИКОВА А. А., СТАРОВОЙТОВ В. Н. <i>Задача о форме свободной поверхности идеальной жидкости над сингулярным стоком . . . . .</i>	75
НАЛИМОВ В. И. <i>Замена переменных в уравнениях волн на воде . . . . .</i>	76
НЕВЕРОВ В. В. <i>Течение микрополярных и вязкопластических жидкостей в ячейке Хеле-Шоу . . . . .</i>	77
ОБУХОВ А. Г., БАРАННИКОВА Д. Д. <i>Численное моделирование огненных вихрей . . . . .</i>	78
ОСТАПЕНКО В. В., КОВЫРКИНА О. А., ЗЮЗИНА Н. А. <i>О монотонных модификациях схемы Кабаре . . . . .</i>	79
ПАВЛОВ М. В. <i>Построение точных решений многомерных нелинейных уравнений в частных производных сведением к одномерному уравнению Хопфа . . . . .</i>	80

ПАПИН А. А., СИБИН А. Н. <i>Об одной модельной системе уравнений одномерного движения двух жидкостей в пороупругой среде . . . . .</i>	80
ПАРШИН Д. В., ЧЕРЕВКО А. А., УФИМЦЕВА И. В., ОРЛОВ К. Ю., КРИВОШАПКИН А. Л., ЧУПАХИН А. П. <i>О перспективной диагностике артериальных аневризм сосудов головного мозга . . . . .</i>	81
ПЕРЕВАЛОВА Е. Г. <i>Параметры стратификации и дисперсионные свойства уединенных внутренних волн . . . . .</i>	83
ПЕРЕПЕЛИЦА Б. В. <i>Структура ламинарной круглой министруи в акустическом поле . . . . .</i>	84
ПЕТРЕНКО И. А., ЧЕРЕВКО А. А., ГОЛОГУШ Т. С., ЧУПАХИН А. П. <i>Моделирование эмболизации артерио-венозной мальформации на основе модели двухфазной фильтрации . . . . .</i>	85
ПРОСВИРЯКОВ Е. Ю. <i>Усиление волн Стокса в вязкой несжимаемой жидкости . . . . .</i>	86
РОМЕНСКИЙ Е. И., ДУМБСЕР М., ПЕШКОВ И. М., ЗАНОТТИ М. <i>Гиперболическая модель течений вязкой жидкости: формулировка уравнений и численные примеры . . . . .</i>	87
РУДОЙ Е. М. <i>Численное решение задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жестким включением . . . . .</i>	88
РЫЖКОВ И. И., СТЕПАНОВА И. В. <i>О термодиффузии бинарных смесей при температурной зависимости коэффициентов переноса . . . . .</i>	89
РЫЧКОВ А. Д., ХАКИМЗЯНОВ Г. С., ЧУБАРОВ Л. Б., ШОКИН Ю. И. <i>Сравнительный анализ некоторых алгоритмов моделирования наката волн цунами на берег . . . . .</i>	90
САВКИН Л. В. <i>“Жесткие” модели осцилляторов Дуффинга и их приложения в радиофизических системах . . . . .</i>	91
САРЫЧЕВА Е. В., САРЫЧЕВ В. Д., НЕВСКИЙ С. А. <i>Исследование зависимости декремента неустойчивости Кельвина — Гельмгольца вязкой жидкости от характеристик материала . . . . .</i>	92
СЕННИЦКИЙ В. Л. <i>Нестационарное течение вязкой жидкости в присутствии твердых стенок . . . . .</i>	93
СИМАКОВ С. С., ГАМИЛОВ Т. М., СО Я. Н. <i>Математическое моделирование волновых процессов и транспорта веществ в кровеносной системе человека . . . . .</i>	94
СОБОЛЕВА О. В. <i>Численный анализ обратных экстремальных задач для нестационарной модели переноса вещества . . . . .</i>	94
СПИВАК Ю. Э. <i>Численный анализ двумерной задачи маскировки с использованием дискретизации маскировочной оболочки . . . . .</i>	95
СУХИНИН С. В. <i>Критерии образования сильных разрывов для длинных волн в неоднородных каналах с упругими стенками. Примеры реальных явлений . . . . .</i>	97
ТАКМАЗЬЯН А. К. <i>Влияние дисперсии волн на механизм создания тяги против волн у плавучей наклонной пластины . . . . .</i>	98
ТАЛЫШЕВ А. А. <i>Вихрь Овсянникова и автоморфные системы . . . . .</i>	99

ТАРАСОВ Б. Г., САДОВСКИЙ В. М., САДОВСКАЯ О. В. Анализ веерного механизма образования глубинных тектонических разломов . . . . .	100
ТЕРЕХОВА Н. М. Моделирование динамики возмущений в слабонелинейной области развития для сверхзвукового пограничного слоя . . . . .	101
ТЕРЕШКО Д. А. Численное решение задач управления для нестационарных уравнений тепловой конвекции . . . . .	102
ТЕРСЕНОВ АЛ. С., ТЕРСЕНОВ АР. С. О гладкости решений анизотропных параболических уравнений . . . . .	103
ТКАЧЕНКО С. Д. Неустановившиеся длинные волны в слое жидкости над деформирующимся дном . . . . .	104
ТОКАРЕВА М. А. Корректность начально-краевых задач для уравнений фильтрации в пороупругой среде . . . . .	105
ТРИЛИС А. В., ВАСИЛЬЕВ А. А., СУХИНИН С. В. Бегущая окружная волна неустойчивости цилиндрического фронта горения . . . . .	106
УФИМЦЕВА И. В., ЧЕРЕВКО А. А., ХЕ А. К., ЧУПАХИН А. П., КРИВОШАПКИН А. Л., ОРЛОВ К. Ю. Анализ гемодинамических параметров кровотока при наличии церебральных аневризм . . . . .	107
ФЕДОРОВ А. В., БЕДАРЕВ И. А. Решение типа бегущей волны и его численная реализация в гетерогенных средах с двумя давлениями . . . . .	108
ФИЛИМОНОВ М. Ю., МАСИХ А., ЕМЕЛЬЯНОВ М. И. Представление специальными рядами с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами решений нелинейных эволюционных уравнений . . . . .	109
ХАБИРОВ С. В. Инвариантные плоские установившиеся изэнтропические вихревые течения газа . . . . .	110
ХЕНКИН Г. М., ШАНАНИН А. А. О проблеме Коши — Гельфанда . . . . .	111
ХЛУДНЕВ А. М. Задачи сопряжения тонких включений в упругих телах . . . . .	112
ХМЕЛЬ Т. А., ФЕДОРОВ А. В. Ударно-волновые процессы в столкновительных газовзвезях . . . . .	113
ЧАНЫШЕВ А. И., БЕЛОУСОВА О. Е. Задача Коши для волнового уравнения. Аналитическое решение и схема численного счета . . . . .	114
ЧАНЫШЕВ А. И., АБДУЛИН И. М. Задача о разрушении горных пород вокруг выработки . . . . .	115
ЧЕРЕВКО А. А., УФИМЦЕВА И. В., ХЕ А. К., ЧУПАХИН А. П., ТУЛУПОВ А. А. Обобщенный осциллятор Ван дер Поля — Дуффинга как уравнение реологии мозга . . . . .	116
ЧИРКУНОВ Ю. А. Подмодели модели нелинейной диффузии в неоднородной среде . . . . .	117
ЧУГАЙНОВА А. П. Единственность автомодельных решений задачи о распаде произвольного разрыва уравнения Хопфа со сложной нелинейностью. . . . .	118
ШЕЛУХИН В. В. Жидкость Коссера — Бингама: корректность уравнений . . . . .	118
ЩЕРБАКОВ В. В. Сингулярные инвариантные интегралы для упругих тел с тонкими упругими включениями . . . . .	119



---

ЯКОВЕНКО С. Н. Развитие неустойчивости и турбулентности при опрокидывании подветренных волн . . . . .	120
ЯНЧЕНКО А. А., ЧУПАХИН А. П., РОМЕНСКИЙ Е. И. Исследование одномерных решений термодинамически согласованной системы законов сохранения течения сжимаемой жидкости в упругой пористой среде	121
ЯНЬКОВА Г. С., МАЛЬЦЕВА С. В., ЧЕРЕВКО А. А., ПАРШИН Д. В., ХЕ А. К., АКУЛОВ А. Е., МОШКИН М. П., ЧУПАХИН А. П. Построение и исследование 3D-сети сосудов головного мозга по данным МРТ методом варьирования сканирующей плоскости . . . . .	122
GAVRILYUK S., LIAPIDEVSKII V. YU., CHESNOKOV A. A. Toward a universal model of breaking waves on shallow water . . . . .	123
RICHARD G. L., VILA J. P. A three-equations model for thin films down an inclined plane . . . . .	124
Авторский указатель . . . . .	126

# ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И СИММЕТРИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

А. В. Аксенов, К. П. Дружков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В безразмерных переменных система уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \eta_x &= 0, \\ \eta_t + [(\eta + h)u]_x &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $y = -h(x)$ ,  $h(x) \geq 0$  — профиль дна,  $u = u(x, t)$  — средняя по глубине горизонтальная скорость,  $\eta = \eta(x, t)$  — отклонение свободной поверхности.

В работе [2] было найдено, что система уравнений мелкой воды с профилем дна  $h(x) = -x$  может быть линеаризована в характеристических переменных. Позже в работе [3] было показано, что в этом случае исходная система уравнений (1) точечной заменой переменных может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} U_T + N_X &= 0, \\ N_T - XU_X - U &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

который формально получается отбрасыванием нелинейных слагаемых в системе уравнений (1). Классы точных решений линейной системы уравнений (2) приведены в [4, 5].

В настоящей работе найдены все гидродинамические законы сохранения для всевозможных профилей дна. Получен новый закон сохранения, дополнительный к двум базовым законам сохранения. Решена задача групповой классификации. Показано, что система уравнений мелкой воды может быть линеаризована точечной заменой переменных только в случаях постоянного и линейного профилей дна. Приведены примеры инвариантных решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 15-01-00361 и 15-01-04677).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Stoker J. J. *The formation of breakers and bores. The Theory of Nonlinear Wave Propagation in Shallow Water and Open Channels*. Comm. Pure Appl. Math. 1948. V. 1. № 1. P. 1–87.
2. Carrier G. F., Greenspan H. P. *Water waves of finite amplitude on a sloping beach*. J. Fluid Mech. 1958. V. 4. № 1. P. 97–109.
3. Pelinovsky E. N., and Mazova R. Kh. *Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles*. Natural Hazards. 1992. V. 6. № 3. P. 227–249.
4. Доброхотов С. Ю., Тироцци Б. *Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью  $c = \sqrt{x}$* . Успехи математических наук. 2010. Т. 65. № 1. С. 185–186.

5. Чиркунов Ю. А., Доброхотов С. Ю., Медведев С. Б., Миненков Д. С. *Точные решения одномерных нелинейных уравнений мелкой воды над ровным и наклонным дном*. Теоретическая и математическая физика. 2014. Т. 178. № 3. С. 322–345.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ МАСКИРОВКИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ ВОЛНОВОГО ОБТЕКАНИЯ

*Г. В. Алексеев*

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток  
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

В последние годы значительное внимание уделяется дизайну устройств, служащих для маскировки материальных тел от их обнаружения с помощью радаров или сонаров. Начиная с пионерских работ [1, 2], большое количество исследований посвящено развитию разных схем маскировки материальных тел. Наиболее популярным из них является метод оптических преобразований, предложенный в [2]. Методология маскировки, основанная на этом методе, получила название прямого дизайна, поскольку она основана на решении прямых задач электромагнитного рассеяния.

Нужно отметить, что указанная методология обладает рядом недостатков. Главным недостатком является трудность в реализации маскировочных оболочек, основанных на использовании МОПа. Это связано с тем, что некоторые компоненты тензоров магнитной и электрической проницаемостей в случае электромагнитной маскировки либо компоненты тензора плотностей масс в случае акустической маскировки должны принимать бесконечные значения на внутренней границе маскировочной оболочки для обеспечения идеальной маскировки. Техническая реализация полученных решений невозможна, даже если использовать метаматериалы. Один из подходов преодоления такого типа трудностей состоит в использовании методов оптимизации для решения задач маскировки (см. [3, 4]).

Именно этот метод применяется в данной работе при решении рассматриваемых задач маскировки. На основе математического аппарата, разработанного в [3, 4], доказывается разрешимость соответствующих экстремальных задач, выводятся системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума, исследуется единственность и устойчивость оптимальных решений. Развиваются численные алгоритмы решения задач маскировки, обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00365-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Долин Л. С. *О возможности сопоставления трехмерных электромагнитных систем с неоднородным анизотропным заполнителем*. Изв. Вуз. Радиофизика. 1961. Т. 4. № 4. С. 964–967.

2. Pendry J. B., Shurig D. R. *Controlling electromagnetic fields*. Science. 2006. V. 312. № 5781. P. 1780–1782.
3. Alekseev G. V. *Cloaking via impedance boundary condition for 2D Helmholtz equation*. Appl. Anal. 2014. V. 93. P. 254–268.
4. Алексеев Г. В., Левин В. А. *Оптимизационный метод отыскания параметров неоднородной жидкой среды в задаче маскировки материальных тел от акустической локации*. ДАН. 2014. Т. 454. № 4. С. 406–410.

## ЯВЛЕНИЕ ВИХРЕВОГО ПЕРЕЗАМЫКАНИЯ В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ

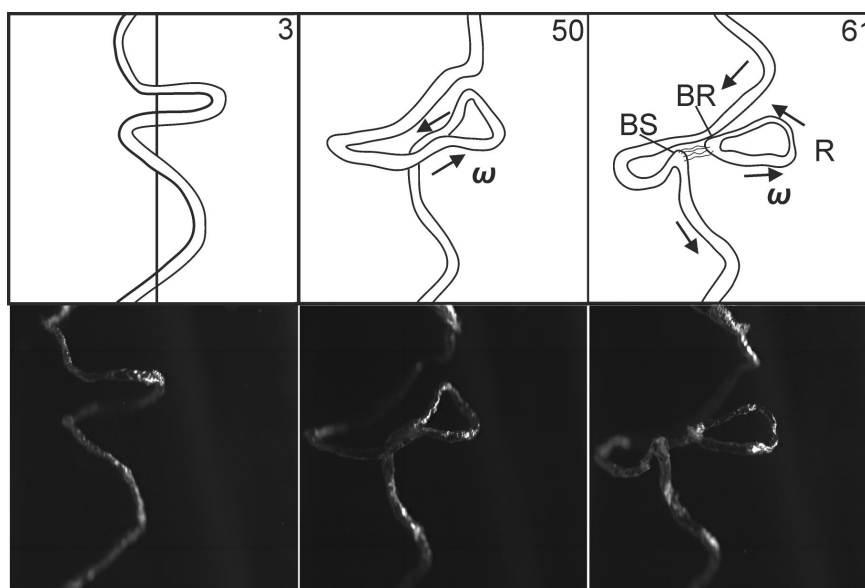
*С. В. Алексеев, П. А. Куйбин, С. И. Шторк, С. Г. Скрипкин, М. А. Цой*

*Институт теплофизики им. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет*

Среди огромного многообразия вихревых структур выделяются концентрированные вихри типа бесконечно тонких вихревых нитей или вихревых трубок, имеющих конечный размер ядра [1]. Важным свойством вихревых трубок является их индуцированное движение, которое приводит к взаимодействию как разных трубок друг с другом, так и отдельных частей одной искривленной трубки между собой. Особенно важным представляется явление вихревого перезамыкания (vortex reconnection), приводящее к кардинальному изменению топологии вихревых структур [2].

В работе впервые продемонстрировано явление процессов вихревого перезамыкания на спиральной вихревой трубке, которая формируется в закрученном потоке в коническом диффузоре. Результатом перезамыкания может быть образование изолированного вихревого кольца либо системы, состоящей из вихревого кольца, зацепленного со спиральной трубкой. В зоне перезамыкания на исходной спирали всегда генерируется волна Кельвина, завитая влево и бегущая вверх по вихревой трубке.

На рисунке показаны схема и визуализация процесса вихревого перезамыкания на кавитационной спиральной вихревой трубке с образованием изолированного вихревого кольца, зафиксированная в эксперименте ( $R$  — вихревое кольцо,  $BS$  и  $BR$  — мостики на спиральной вихревой трубке и кольце, соответственно,  $\omega$  — вектор завихренности). Частота съемки равнялась 7 000 кадр/с, время экспозиции — 50 мкс.



Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект № 14-29-00093).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеенко С. В., Куйбин П. А., Окулов В. Л. *Введение в теорию концентрированных вихрей*. Москва — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
2. Kida S., Takaoka M. *Vortex reconnection*. *An. Rev. Fluid Mech.* 1994. V. 26. P. 169–177.

## ЭВОЛЮЦИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МГД И ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

А. И. Аллилуева<sup>1</sup>, А. И. Шафаревич<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики РАН, Москва

<sup>2</sup>Московский государственный университет

В докладе обсуждаются асимптотические решения МГД и линеаризованных уравнений Навье — Стокса, локализованные в малой окрестности кривых или поверхностей. Исследована возможность роста возмущения; для уравнений МГД описывается поведение альфвеновских мод и обсуждается их взаимодействие.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Allilueva A. I., Shafarevich A. I. *Asymptotic solutions for linear and nonlinear MHD systems with a rapid jump near a surface. Dynamics of the surface of the jump and evolution of the magnetic field*. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. V. 20. № 6. P. 691–700.

2. Allilueva A. I., Shafarevich A. I. *Asymptotic solutions of linearized Navier — Stokes equations localized in small neighborhood of curves and surfaces* Russian Journal of Mathematical Physics. 2015. V. 22. № 4. P. 421–426.

## О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПОЛЗУЩИХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. К. Андреев

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

Рассматриваются ползущие двумерные двухслойные движения жидких сред в плоском канале — вязких теплопроводных жидкостей или вязкой жидкости и бинарной смеси. Такие движения возникают либо при малых числах Рейнольдса, либо при малых чисел Марангони в случае тонких слоёв, либо малых касательных напряжениях в задачах о ветровых волнах в двухслойной среде в неглубоких водоёмах. Стенки канала могут перемещаться по заданному закону. Если искать решения типа Хименца [1] соответствующих уравнений, то все упомянутые задачи сводятся к анализу линейной сопряжённой задачи для параболических уравнений. Эта задача является обратной, поскольку правые части уравнений содержат искомые функции времени — градиенты давлений вдоль слоя. Другая характерная особенность задачи — нелокальность части граничных условий, которые содержат интегралы по области искомого решения.

Найдено стационарное решение поставленной задачи. Получены априорные оценки решения в равномерной метрике и указаны достаточные условия на входные данные, когда с ростом времени решение выходит на стационарный режим по экспоненциальному закону. В изображениях по Лапласу построено точное решение в виде квадратур и приведены численные результаты о поведении полей скоростей, температур и концентраций для конкретных жидких сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00067).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Hiemenz K. *The boundary layer on a submerged in the uniform flow of liquid straight circular cylinder*. Dingler's Polytech. J. 1911. V. 326. P. 321–324.

## О КЛАССАХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

*М. М. Абенюв*

*Институт фундаментальных исследований, Алматы, Казахстан*

В некоторой области  $D$  рассмотрим общее уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_3)}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\rho(x, y, z, t)$  — неизвестная плотность,  $V_k(x, y, z, t), k = \overline{1, 3}$  — неизвестные компоненты скорости жидкости.

Уравнение (1) можно считать безразмерным. Далее, пусть  $u_k(x, y, z, t), k = \overline{0, 3}$  — компоненты регулярной в  $D$  четырехмерной функции. Свойства бесконечномерного пространства такого рода функций, а также виды элементарных функций описаны в работе [2].

**Теорема.** Каждой регулярной в  $D$  четырехмерной функции соответствует точное решение уравнения неразрывности следующего вида:

$$\rho = u_0(x, y, z, t), \quad V_1 = \frac{u_1(x, y, z, t)}{u_0(x, y, z, t)}, \quad V_2 = -\frac{u_2(x, y, z, t)}{u_0(x, y, z, t)}, \quad V_3 = -\frac{u_3(x, y, z, t)}{u_0(x, y, z, t)}. \quad (2)$$

В формулах (2) компоненты четырехмерной функции можно подобрать так, что  $\rho(x, y, z, t)$  станет ограниченной и всюду положительной функцией в области  $D$ . Аналогичный подход дает континуум точных решений уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Дрофа, 2003.
2. Абенюв М. М. *Решения системы уравнений Навье — Стокса*. Алматы: К-2, 2013.

## РАЗВИТИЕ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

*А. Н. Байкин<sup>1</sup>, С. В. Головин<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Гидроразрыв пласта является важной частью современных технологий интенсификации добычи углеводородов. Распространение трещины гидроразрыва обусловлено закачкой в неё вязкой жидкости, которая создаёт давление на стенках, достаточное для преодоления горного давления и разрушения породы. Процесс развития трещины управляется несколькими факторами: течением вязкой жидкости по

тонкой трещине, упругой реакцией стенок трещины, фильтрацией жидкости через стенки трещины в пласт, разрывом породы и продвижением кончика трещины. Описание динамики трещины является сложной задачей и редко решается в её полной постановке.

В настоящей работе для описания процесса гидроразрыва за основу была взята модель трещины в пороупругой среде, предложенная в [1]. Модель позволяет определить поровое давление и деформацию горной породы совместно с раскрытием трещины и давлением жидкости в ней. В этой модели горная порода рассматривается как однородная проницаемая среда, подчиняющаяся уравнениям пороупругости Био [2]. Положительным качеством модели является более точный учёт взаимодействия пластовой жидкости и жидкости гидроразрыва, основанного на выполнении законов сохранения массы, а не на искусственных подходах типа формулы Картера для утечек жидкости в пласт, обычно применяемой в классических моделях KGD и PKN [3].

Численное решение задачи проводилось методом конечных элементов с помощью модификации алгоритма [1]. Особенности алгоритма является отсутствие необходимости явно отслеживать положение кончиков трещины и перестраивать сетку, что характерно для задач такого типа. В работе показана численная сходимость алгоритма, а также вычислительная возможность расчета задач масштаба реальной инженерной практики при достаточной точности. По результатам расчетов с помощью представленной модели был проведен численный анализ зависимости геометрии трещины от вязкости жидкости гидроразрыва и параметров пласта, а также исследовано поведение давления на забое скважины. Кроме того, показаны возможности модели учитывать неоднородности в пласте и различие вязкостей пластовой жидкости и жидкости гидроразрыва в трещине.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00610).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Shelukhin V.V., Baikov V.A., Golovin S.V., Davletbaev A.Y., Starovoitov V.N. *Fractured water injection wells: Pressure transient analysis*. Int. J. Sol. Struct. 2014. V. 51. № 11. P. 2116–2122.
2. Biot M. A. *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. II*. J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. № 2. P. 168–178.
3. Adachi J., Siebrits E., Peirce A., Desroches J. *Computer simulation of hydraulic fractures*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. 2007. V. 44. № 5. P. 739–757.



## КРУЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

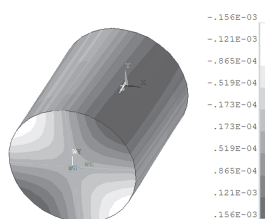
И. А. Банщикова<sup>1</sup>, Д. М. Петров<sup>1,2</sup>, И. Ю. Цвелодуб<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный технический университет

Рассмотрены задачи о кручении сплошных стержней, вырезанных в продольном направлении плиты и по нормали к плите из сплава с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в направлении под углом  $45^\circ$  к направлению нормали плиты. Численное моделирование было проведено для сплава В95пчТ2, который при  $T = 180^\circ\text{C}$  (толщина плиты 50 мм) обладает существенной анизотропией при ползучести, а самое слабое направление — это направление под углом  $45^\circ$  к нормали плиты: интенсивность процесса ползучести при растяжении образцов, вырезанных под углом  $45^\circ$  к направлению нормали плиты, почти в шесть раз выше, чем при растяжении образцов, вырезанных в продольном, поперечном и по нормали плиты направлениях. Для описания анизотропной (трансверсально-изотропной) ползучести была использована потенциальная функция тензора напряжений Хилла.

Для численного моделирования были протестированы элементы Beam189 и Solid45 комплекса Ansys. Приближенные оценки и расчет методом конечных элементов (МКЭ) для круглых стержней, вырезанных в продольном направлении из трансверсально-изотропного сплава со слабым сдвиговым направлением, показали, что возникает депланация поперечного сечения (см. рисунок), при этом угол закручивания получается в три раза больше угла, рассчитанного в изотропной постановке [1]. Визуально на экспериментальных образцах депланация проявляется в виде спиралевидных линий. Расчет МКЭ для круглых стержней, вырезанных из такого же сплава в направлении нормали плиты показал, что депланация поперечного сечения отсутствует, но при этом угол закручивания в десять раз превосходит угол закручивания, полученный при решении задачи в изотропной постановке.



Изолинии смещений (депланации) в направлении оси стержня  $z$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-07631-а, 16-08-00713-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Банщикова И. А., Цвелодуб И. Ю., Петров Д. М. *Деформирование элементов конструкций из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в сдвиговом направлении*. Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2015. Т. 157. Кн. 3. С. 34–41.

# ВОЛНОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ПОДЪЕМЕ СИММЕТРИЧНОГО ВЫПУКЛОГО ТЕЛА, ЧАСТИЧНО ПОГРУЖЕННОГО В МЕЛКУЮ ВОДУ

Е. С. Басманова<sup>1</sup>, В. В. Остапенко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup> Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Подъем тела с поверхности жидкости и возникающее при этом течение представляют интерес как с теоретической, так и прикладной точек зрения. К настоящему времени проведены теоретические, экспериментальные и численные исследования подъема тел с поверхности глубокой жидкости без учета влияния дна [1, 2]. Экспериментальное изучение подъема стеклянного круглого диска с поверхности воды, целью которого было объяснить процесс лакания кошачьими, показало [1], что в основном процесс подъема жидкости вслед за диском определяется силами тяжести и инерции, а вязкость жидкости и ее поверхностное натяжение оказывают на этот процесс пренебрежимо малое влияние. В работе [3] изучены волновые течения, возникающие на первом этапе при вертикальном подъеме прямоугольного бруса, частично погруженного в мелкую воду, заполняющую прямоугольный призматический канал с горизонтальным дном. Подъем выпуклых тел произвольной формы, частично погруженных в жидкость конечной глубины с учетом влияния дна, ранее не рассматривался.

Поэтому целью настоящей работы является изучение волновых течений, возникающих при вертикальном подъеме симметричного выпуклого тела, частично погруженного в мелкую воду, заполняющую прямоугольный призматический канал с горизонтальным дном. Моделирование таких течений выполнено в рамках первого приближения теории мелкой воды без учета влияния трения, вязкости жидкости и ее поверхностного натяжения. Определяющим для построения решения является получение закона движения границы области контакта жидкости с нижней поверхностью тела. Возможны два различных случая. В первом из них линия контакта тела и жидкости движется с докритической скоростью и уравнение ее движения зависит от значения инварианта, приносимого из внешней области течения со свободной верхней границей. Во втором случае линия контакта движется с критической скоростью и ее движение не зависит от внешней области течения. В настоящей работе подробно исследовано течение жидкости в первом случае. Детально исследованы течения жидкости в случае, когда нижняя поверхность тела представляет собой клин и параболический контур. Приведены результаты тестовых расчетов, иллюстрирующих подъем жидкости вслед за такими телами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Reis P. M., Jung S., Aristoff J. M., Stocker R. *How cats lap: water uptake by Felis catus*. Science. 2010. V. 330. P. 1231–1234.
2. Korobkin A. A. *A linearized model of water exit*. J. Fluid Mech. 2013. V. 737. P. 368–386.

3. Кузнецова В. В., Остапенко В. В. *Волновые течения, возникающие при вертикальном подвеме из мелкой воды прямоугольного бруса*. Прикл. мех. и техн. физика. 2015. Т. 56. № 5. С. 102–110.

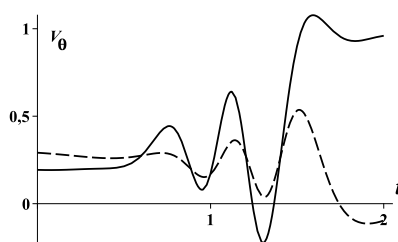
## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРОТКИХ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН В АОРТЕ

В. А. Батищев, В. А. Гетман, А. А. Гайламазян

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В конце прошлого века активизировались исследования спиральных течений крови в артериальной системе человека и животных. Еще в семнадцатом веке W. Nagwey наблюдал закрученные потоки крови в сердце. Анализ экспериментальных данных показал, что вращающийся поток крови возникает в левом желудочке сердца и переносится в восходящую аорту. Исследования показали, что в аорте распространяется средний стационарный поток. На фоне этого потока движутся длинные продольные пульсовые волны, свойства которых сильно зависят от вязкости жидкости и упругих свойств стенок сосудов. Эти волны были предметом интенсивных исследований в конце девятнадцатого века.

В докладе на основе нелинейной системы Навье — Стокса и динамических уравнений оболочки построена математическая модель коротких спиральных волн в восходящей аорте. Предполагается, что спиральные волны в аорте вызваны закрученным потоком жидкости, поступающим на вход в аорту из левого желудочка сердца. Аорта моделируется круговым цилиндром, ограниченным тонкой упругой изотропной оболочкой. Решения модели построены асимптотическими и численными методами.



Амплитуды спиральных волн в зависимости от времени

Численные расчеты коротких спиральных волн показывают, что возможны различные варианты закручивания потока жидкости в течение систолы. Систола — одна из фаз сердечного цикла — сокращение сердца. Во время систолы кровь нагнетается в артериальную систему. Возможен режим, когда в период систолы жидкость вращается в одну сторону, за исключением небольшого промежутка времени, в течение которого жидкость вращается в обратном направлении. Этот промежуток может находиться вблизи любой временной точки систолы. Полученный режим подтверждается экспериментальными исследованиями. На рисунке изображена зависимость

амплитуды спиральных волн от времени в течение систолы. С ростом расстояния от входа в цилиндр короткие спиральные волны затухают по экспоненциальному закону. Механизмами переноса этих волн являются как стационарный поток, так и длинные продольные волны. Показано, что короткие спиральные волны слабо зависят от упругих свойств стенок аорты.

## ТЕОРЕМА О КРАТНЫХ ЧАСТОТАХ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

*С. П. Баутин, В. Е. Замыслов, П. П. Скачков*

*Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург*

В работах [1–3] с помощью тригонометрических рядов строятся решения полной системы уравнений Навье — Стокса, которые моделируют одномерные течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа. В частности, доказаны теоремы о кратных частотах, которые описывают механизм передачи возмущений в рассматриваемых течениях и математически обосновывают правила образования музыкальных обертонов.

В данной работе подобной методикой исследуются трехмерные нестационарные течения, имеющие представления

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = f_0(t) + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_{ik1}(t) \cos(kx_i) + f_{ik2}(t) \sin(kx_i) \right] \quad (1)$$

и являющиеся решениями полной системы уравнений Навье — Стокса. Под  $f$  подразумеваются величины  $\delta$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ , где  $\delta$  — удельный объем;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — проекции вектора скорости газа на декартовы оси;  $p$  — давление. Для коэффициентов  $f_{ikj}(t)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $f_0(t)$  выписаны бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Теорема о кратных частотах.** Пусть заданы три набора целых положительных чисел и их наибольшие общие делители

$$d_1 = \text{НОД}(\ell_0, \dots, \ell_L); \quad d_2 = \text{НОД}(m_0, \dots, m_M); \quad d_3 = \text{НОД}(n_0, \dots, n_N).$$

Пусть при  $t = 0$  начальные данные для представлений (1) содержат конечное число гармоник. Причем гармоники, зависящие от  $x_1$ , имеют частоты  $\ell_0, \dots, \ell_L$ ; зависящие от  $x_2$  — частоты  $m_0, \dots, m_M$ ; зависящие от  $x_3$  — частоты  $n_0, \dots, n_N$ . Тогда в решении бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений все коэффициенты  $f_{ikj}(t)$ , у которых первый индекс  $i$  не кратен числу  $d_i$ , являются тождественными нулями.

Теорема говорит о том, что при  $t > 0$  в решении, представленном в виде (1) и содержащим в начальный момент времени только конечное число гармоник, могут присутствовать гармоники от  $x_i$  только с частотами, кратными  $d_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С. П., Замыслов В. Е. *Представление приближенных решений полной системы уравнений Навье — Стокса в одномерном случае*. Вычисл. Технологии. 2012. Т. 17. № 3. С. 3–12.
2. Замыслов В. Е. *Стоячие волны как решения полной системы уравнений Навье — Стокса в одномерном случае*. Вычисл. Технологии. 2013. Т. 18. № 2. С. 33–45.
3. Баутин С. П., Замыслов В. Е., Скачков П. П. *Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа*. Новосибирск: Наука, 2014.

## ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВИХРИ В МОДЕЛИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

С. А. Бейзель<sup>1</sup>, А. А. Толченников<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Институт проблем механики РАН, Москва

<sup>3</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В работах [1, 2] рассматривался локализованный вихрь (характерный размер — малый параметр), движущийся вдоль траекторий фонового течения, т.е. заданного двумерного поля скоростей, которое вместе с возвышением свободной поверхности удовлетворяет нелинейной системе уравнений мелкой воды. В этих работах была построена асимптотика для поля скоростей вихря в предположении, что вихрь удовлетворяет системе уравнений мелкой воды, линеаризованной на фоновом течении. Также в этих работах было замечено, что вихрь сохраняет свою форму при условии, что на траектории фона выполняются условия Коши — Римана, т.е. дифференциал фазового потока на траектории является конформным. В докладе будут рассматриваться локализованные вихри, удовлетворяющие нелинейной системе уравнений мелкой воды.

В качестве фонового течения с условиями Коши — Римана используется точное решение из работы [3], в котором поле скоростей линейно по координатам, а дно является параболоидом вращения. Траектории этого фонового течения являются эллипсами, проходимыми против часовой стрелки. Нами получена точная формула для симметричного локализованного вихря с некоторым ненулевым начальным возвышением. В рассмотренных модельных примерах оказалось, что если вихрь закручивается относительно своего центра против часовой стрелки, то возмущение свободной поверхности имеет форму впадины, которая тем глубже, чем больше параметр нелинейности задачи. А если вихрь закручивается по часовой стрелке, то при малом параметре нелинейности возвышение имеет форму горба, в центре которого при увеличении параметра нелинейности образуется впадина. Численные эксперименты показали, что при задании начального поля скорости, как в точном решении, но с нулевым начальным возвышением, на поверхности после “отбрасывания” волнового

фронта образуется вихрь той же формы, что и в случае ненулевого начального возмущения. В докладе будут также приведены результаты численных экспериментов для вихрей других форм.

Результаты получены совместно с С. Ю. Доброхотовым и А. И. Шафаревичем. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-31-00442).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dobrokhotov S. Yu., Shafarevich A. I., Tirozzi B. *Localized Wave and Vortical Solutions to Linear Hyperbolic Systems and Their Application to Linear Shallow Water Equations*. Russ. J. Math. Phys. 2008. V. 15. № 2. P. 192–221.
2. Доброхотов С. Ю., Тироцци Б., Шафаревич А. И. *Условия Коши — Римана и локализованные асимптотические решения линеаризованных уравнений теории мелкой воды*. Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. № 5. P. 804–809.
3. Rogers C., Hongli An. *Ermakov — Ray — Reid Systems in (2+1)-Dimensional Rotating Shallow Water Theory*. Stud. Appl. Math. 2010. V. 125. P. 275–299.

## ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ С ИСПАРЕНИЕМ

В. Б. Бекежанова<sup>1</sup>, О. Н. Гончарова<sup>2</sup>, И. А. Шефер<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

<sup>2</sup>Алтайский государственный университет, Барнаул

<sup>3</sup>Сибирский федеральный университет, Красноярск

Исследуется задача о двухслойном течении жидкости и парогазовой смеси с учётом испарения на термокапиллярной границе раздела при условии заданного потока газа. Построено точное решение уравнений Обербека — Буссинеска, являющееся аналогом решения Остроумова — Бириха [1, 2], которое позволяет учесть эффект диффузионной теплопроводности в парогазовом слое. На твёрдых внешних стенках канала поддерживается постоянный продольный градиент температуры, межфазной границей раздела является плоская термокапиллярная поверхность раздела.

Выделены характерные типы течений, возникающие в системе, и изучено влияние толщин слоёв, величины расхода газа и интенсивности тепловой нагрузки на структуру течения: возможно качественное изменение картины течения с формированием чисто термокапиллярного, смешанного или пуазейлевского профиля скорости. Получены количественные характеристики массовой скорости испарения через границу раздела.

Методом нормальных мод исследована линейная устойчивость полученного точного решения в случае равной тепловой нагрузки на границах канала. Возникающие характеристические возмущения могут приводить к формированию вихревых или термокапиллярных структур, концентрационных и тепловых валов или “пятен”, которые могут “дрейфовать” за счёт взаимодействия с основным течением. При этом

гидродинамические возмущения полностью определяют распределение возмущений концентрации в газовой фазе. Установлено, что при больших значениях расхода газа коротковолновые возмущения порождают высокочастотные колебательные режимы. Кроме того, с уменьшением длины волны возмущений имеет место переход от критических возмущений вихревого типа к термокапиллярным структурам. В зависимости от типа основного течения и значений параметров задачи, определены стабилизирующие факторы и наиболее опасные механизмы, приводящие к неустойчивости основного течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-08-00163).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Остроумов Г. А. *Свободная конвекция в условиях внутренней задачи*. М.: ГИТТЛ, 1952.
2. Бирих Р. В. *О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости*. ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.

## ОБ ЭВОЛЮЦИИ КОНЕЧНОГО ОБЪЁМА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Н. Белых

*Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск*

Рассмотрена задача об отыскании свободного (в отсутствие массовых сил) неустановившегося движения области  $\omega \subset \mathbb{R}^3$ , занятой несжимаемой жидкостью, в предположении, что на всей границе  $\partial\omega$  области давление постоянно. Такое движение по инерции возникает под действием некоторого импульса, распределённого по  $\partial\omega$  в начальный момент времени. Объём  $\omega$ , занятый жидкостью, заранее не фиксирован и состоит из жидких частиц. Спецификой исследуемой задачи является то, что граница  $\partial\omega$  (свободная поверхность) является элементом решения задачи. Для её определения имеются два нелинейных условия (кинематическое и динамическое), связывающих форму поверхности  $\partial\omega$  и скорости жидких частиц на ней. В предположении потенциальности и осесимметричности движения жидкости задача редуцируется к её одномерному аналогу, описываемому системой нелинейных эволюционных псевдодифференциальных уравнений на  $\partial\omega$ , дополненной данными Коши.

В работе доказана локальная теорема существования и единственности аналитического по времени решения задачи о “капле” в точной математической постановке. В итоге получено строго обоснованное описание начальной стадии движения осесимметричной капли, предшествующей её эволюционному “разрушению”. Обратим внимание, что отсутствие конструктивных представлений и неразвитость математического языка для описания режимов поведения жидкости в момент зарождения в ней особенностей является характерной чертой нестационарных задач со свободными границами. С полученной теоремой появляется потенциальная возможность

разрешения проблемы разрушения свободной поверхности  $\partial\omega$  путём аналитического продолжения решения задачи “далеко” по времени с целью отыскания особенностей (если они есть) на положительной вещественной части оси времени.

Интерес автора к указанной проблематике был инициирован Л. В. Овсянниковым.

## ОСОБЕННОСТИ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫХ ПЕРЕХОДОВ ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПЛОСКИХ И КОЛЬЦЕВЫХ СЛОЯХ ЖИДКОСТИ

*В. С. Бердников<sup>1,2</sup>, В. А. Винокуров<sup>2</sup>, В. В. Винокуров<sup>2</sup>, В. А. Гришков<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт теплофизики им С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный технический университет*

Экспериментально исследованы процессы ламинарно-турбулентного перехода в свободноконвективных пограничных слоях (ПС) у нагретых до разных температур вертикальных стенок плоского и кольцевого слоев жидкости. Работа является развитием исследований [1]. Эксперименты выполнялись на стендах “Вертикальный плоский слой” (ВПС) и “Вертикальный кольцевой слой-12” (ВКС). Оба стенда имеют прозрачные рабочие участки, позволяющие проводить качественные и количественные исследования пространственной формы течений, полей скорости и температуры в широких диапазонах чисел Рэлея  $Ra_x$ . Экспериментально исследованы зависимости от продольной координаты средних по времени и мгновенных локальных характеристик гидродинамических и тепловых свободноконвективных ПС в режимах ламинарно-турбулентного перехода. Изучены процессы турбулизации ядра слоев, которые оказывают обратное влияние на особенности развития ПС на стенках. Исследования проведены на жидкости с числом Прандтля, равным 16. На стенде ВПС исследован слой толщиной 60 мм. ПС на горячей и холодной стенках в этом случае развиваются без непосредственного гидродинамического взаимодействия. На стенде ВКС исследован слой высотой 1473 мм и толщиной 12,65 мм при четырех перепадах температуры между вертикальными стенками 2,35 К; 3,28 К; 4,52 К; 6,76 К. Пограничные слои на горячей и холодной стенках в этом случае развиваются в условиях существенного гидродинамического взаимодействия. В переходных режимах и в турбулентном потоке обнаружено сосуществование двух принципиально разных по физической природе когерентных составляющих. Они являются следствием нелинейного развития двух типов неустойчивости. Во-первых, всплывающие вихри в ПС вблизи горячей стенки и дрейфующие вниз на холодной стенке. Эти вихри теряют устойчивость в азимутальном направлении при критическом значении  $Ra_x$ . Наблюдаются прорывы переднего фронта, где скапливается нагретая жидкость. Возникает подобие  $\Lambda$ -структур, из которых в дальнейшем возникают продольные вихри. Эти продольные вихри при критических значениях  $Ra_x$  начинают колебаться в радиальном и азимутальном направлениях. Во-вторых, в кольцевом слое возникают вихри на границе встречных потоков — подъемного на горячей стенке и опускного на холодной. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 15-08-07991а.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Бердников В. С., Гришков В. А. *Структура течения и теплообмен в вертикальных слоях жидкости в режимах термогравитационной и тепловой гравитационно-капиллярной конвекции*. Сб. тр. Всерос. конференции по аэродинамике летательных аппаратов и прочности авиационных конструкций. СибНИА, 17–19 июня 2008. Новосибирск, 2009. С.124–131.

## ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕХОД В СВОБОДНОКОНВЕКТИВНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ

В. С. Бердников<sup>1,2</sup>, К. А. Митин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт теплофизики им С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный технический университет

Каноническим объектом в исследовании устойчивости течений при термогравитационной конвекции является течение в вертикальном слое жидкости, заключенном между параллельными стенками, нагретыми до разных температур. В цикле работ, выполненных в ИТ СО РАН, исследовалась устойчивость и структура течений в ламинарных режимах и в развитых турбулентных режимах. Важнейшие результаты этих исследований обобщены в работе [1]. Дальнейшие экспериментальные исследования были направлены на изучение процессов ламинарно-турбулентного перехода в свободноконвективных пограничных слоях [2]. Эксперименты выполнялись на рабочих участках с вертикальными стенками высокой теплопроводности и с прозрачными вертикальными стенками низкой теплопроводности. Экспериментально определить поле температуры внутри прозрачных стенок невозможно. Возникает вопрос о степени влияния локального сопряженного теплообмена на локальную структуру пограничного слоя. Поэтому проведены численные исследования в сопряженной постановке задачи при геометрии расчетной области, совпадающей с геометрией рабочего участка стенда “Вертикальный плоский слой” [2].

Численно в сопряженной постановке исследована конвективная теплоотдача от вертикальной стенки с низкой теплопроводностью в режиме ламинарно-турбулентного перехода. Исследование проведено при числе Прандтля  $Pr = 16$  и числе Грасгофа  $Gr = 6 \cdot 10^6$ . Рассчитаны поля температуры как в жидкости, так и в твердых вертикальных стенках. В пограничном слое возникают всплывающие вторичные вихри. Все вихри на горячей стенке вращаются в одну сторону, в головной части вихрей горячая жидкость уходит от стенки в ядро, а в кормовой части вихрей на стенку натекает холодная жидкость из ядра слоя. В результате на поверхности и внутри вертикальных стенок начинает бежать тепловая волна. Низкая теплопроводность вертикальных стенок приводит к заметному сдвигу фаз волны в жидкости, на поверхности стенки и внутри вертикальной стенки.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 15-08-07991а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kutateladze S. S., Berdnikov V. S. *Structure of thermogravitational convection in flat variously oriented layers of liquid and on a vertical wall*. Int. J. Heat Mass Transfer. 1984. Vol.27. N9. P. 1595–1611.
2. Бердников В. С., Гришков В. А. *Структура течения и теплообмен в вертикальных слоях жидкости в режимах термогравитационной и тепловой гравитационно-капиллярной конвекции*. Сб. тр. Всерос. конференции по аэродинамике летательных аппаратов и прочности авиационных конструкций. СибНИА, 17–19 июня 2008, Новосибирск, 2009, С.124–131.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННАЯ  
КОНВЕКЦИЯ В ПОЛОСТЯХ С ТОНКОЙ ПЕРЕГОРОДКОЙ

В. С. Бердников<sup>1,2</sup>, К. А. Митин<sup>2</sup>, С. А. Кислицин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт теплофизики им С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный технический университет

Численно в сопряженной постановке исследовано влияние нестационарной термогравитационной конвекции на поля температуры в тонкой вертикальной металлической перегородке, отделяющей полость с жидкостью с  $Pr = 16$  от полости с газом с  $Pr = 0.71$ , возникающей после внезапного нагрева правой стенки полости. Исследования производились для двух типов расчетных областей с соотношениями толщины слоя жидкости к его высоте, равными 0.5 [1] и 12.6. Отношение толщины металлической перегородки к толщине слоя жидкости равняется 0.0025 и 0.005 соответственно. Диапазон чисел Грасгофа  $10^2 \leq Gr \leq 10^7$  и  $10^2 \leq Gr \leq 10^4$  для первой и второй задач соответственно. Для расчетов чисел Грасгофа, Прандтля и других параметров были использованы фиксированные значения теплофизических свойств 96% этилового спирта и воздуха при 293 К. Методом конечных элементов решены уравнения термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска, записанные в переменных “температура”, “вихрь скорости” и “функция тока”.

При внезапно включенном боковом подводе тепла в исследуемой составной области наблюдаются следующие этапы развития течения и эволюции полей температуры. Вначале во всех режимах наблюдается прогрев тонких слоев неподвижной жидкости вблизи нагреваемой стенки. Интервалы времени от начала нагрева до возникновения конвективного течения уменьшаются при увеличении приложенной разности температуры. После возникновения конвективного течения и развития нестационарного течения тонкая перегородка, на которую натекает поток горячей жидкости, нагревается неравномерно. В результате удара горячей струи происходит локальный нагрев перегородки, и в ней возникают большие градиенты температуры. Именно в этой области появятся максимальные термические напряжения. Тепловой удар после достижения тепловой волной тонкой стенки сглаживается за счет ее тепловой инерции и растекания тепла в плоскости стенки. В полости, растянутой по

горизонталю при  $Gr \geq 5 \cdot 10^5$ , наблюдается отражение разогретой струи от перегородки. Формируется отраженная волна, которая с ростом числа  $Gr$  приобретает характер солитона.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 15-08-07991а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бердников В. С., Митин К. А., Кислицын С. А. *Влияние нестационарной гравитационно-капиллярной конвекции на поля температуры в тонкой стенке*. Научный вестник НГТУ. 2014. Т. 57, №4. С. 131–146.

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНВЕКЦИЯ В МОДЕЛИ РАЗЛОМА В ЗЕМНОЙ КОРЕ ПОСЛЕ ВНЕЗАПНОГО НАГРЕВА ЕГО ОСНОВАНИЯ

*В. С. Бердников<sup>1,2</sup>, К. А. Митин<sup>2</sup>, А. И. Чепуров<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>*Институт теплофизики им С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный технический университет*

<sup>3</sup>*Институт геологии и минералогии СО РАН, Новосибирск*

Конвективные течения в вертикальных слоях текучих сред, подогреваемых снизу — это простейшие модели таких природных систем, как разломы и трещины в земной коре, глубокие впадины на дне океанов [1]. Среди геодинамических систем, в которых возникают течения из-за подогрева снизу, важное место занимают вулканы и кимберлитовые трубки [1]. Возможные сценарии формирования кимберлитовой трубки многовариантны и зависят от локальной обстановки в земной коре. Если имеется разлом — трещина, заполненная однородной текучей средой или пористой средой, насыщенной текучей средой, то конвективные течения могут быть инициированы внезапным нагревом при выходе головной нагретой части геодинамического плюма к нижней границе земной коры. В ИТ СО РАН были выполнены экспериментальные и численные исследования процессов формирования и выхода на дневную поверхность плюмов, развивающихся над линейными источниками тепла [2, 3]. Изучена эволюция во времени пространственной формы течения, полей температуры и скорости в зависимости от подводимой мощности. В качестве следующего шага естественно рассмотреть развитие нестационарного конвективного течения в прямоугольной полости, внезапно нагретой снизу. В сопряженной постановке численно исследованы процессы развития полей температуры в твердом массиве при достижении головной части плюмов нижней границы модели земной коры и развитие конвективного течения в прямоугольной модели разлома в режимах нестационарного теплообмена конвектирующей жидкости со стенками разлома. Показано, что в придонной части наблюдается колебательный процесс возникновения и развития двухвихревого течения. Поочередно меняется интенсивность течения то в правом, то

в левом вихре, в котором нагретая жидкость поднимается вдоль вертикальных стенок, а навстречу проваливается относительно холодная жидкость. В результате чего в жидкости течение имеет волновой характер, и в твердых стенках бежит тепловая волна.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 13-05-12096 офи-м).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Добрецов Н. Л. *Основы тектоники и геодинамики*. Учеб. пособие / Новосибирск: НГУ, 2011.
2. Антонов П. В., Арбузов В. А., Бердников В. С. и др. *Экспериментальные и численные исследования нестационарных плавучих струй*. *Автометрия*. 2012. Т.48. №3. С. 90–100.
3. Арбузов В. А., Арбузов Э. В., Бердников В. С. и др. *Оптическая диагностика структуры и эволюции плавучих струй в сильновязкой жидкости*. *Автометрия*. 2014. Т.50. №5. С. 90–100.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕМОДИНАМИКИ В ГИГАНТСКОЙ ЦЕРЕБРАЛЬНОЙ АНЕВРИЗМЕ

М. С. Бобкова<sup>1</sup>, А. К. Хе<sup>1,2</sup>, А. П. Чупахин<sup>1,2</sup>, А. Л. Кривошапкин<sup>3</sup>, К. Ю. Орлов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>3</sup>Новосибирский научно-исследовательский институт патологии кровообращения им. акад. Е. Н. Мешалкина

Одной из важных и актуальных задач гидродинамики является задача о течении крови в сердечно-сосудистой системе. Математическое моделирование, основанное на реальных клинических данных, позволяет получать качественные и количественные характеристики кровотока в норме и патологии. Это даёт возможность решать такие важные медицинские задачи, как выявление закономерностей функционирования кровеносной системы, прогнозировать последствия хирургических вмешательств и различных заболеваний. Одним из таких опасных заболеваний являются аневризмы сосудов головного мозга.

Целью настоящего исследования является численное моделирование кровотока в крупных артериях заднего бассейна кровообращения головного мозга при наличии гигантской аневризмы бифуркации базилярной артерии, а также сравнение результатов расчётов на основе трёх моделей: модель течения крови в сосудах с жёсткими стенками, модель односторонней гидроупругости, модель двусторонней гидроупругости.

Течение крови описывается уравнениями Навье — Стокса для трёхмерного нестационарного движения вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости. В качестве граничных условий задаются значения скорости и давления, измеренные в ходе операции. Для описания напряженно-деформированного состояния стенок сосуда применяется модель изотропного линейно-упругого материала. В качестве граничных

условий задаются давление жидкости на стенку сосуда, полученное в гидродинамическом расчете на каждом шаге по времени, и реакция упругой опоры, моделирующая окружающее вещество мозга. Для описания взаимодействия крови со стенками сосуда одновременно решаются система уравнений Навье — Стокса и система уравнений теории упругости с кинематическим и динамическим условиями на границе контакта.

Трехмерная геометрия области течения (сосуды головного мозга с гигантской аневризмой) построена по данным магнитно-резонансной томографии конкретного пациента. Внутрисосудистые измерения скорости и давления кровотока проводились во время операции для этого же пациента.

Численное решение задач осуществляется в программном комплексе ANSYS. В расчётах получены гидродинамические параметры кровотока и механические параметры стенки сосуда. Сравнение результатов по трём моделям показало, что пренебрежение упругими свойствами стенки сосуда приводит к повышению давления и изменению картины течения внутри аневризмы. Использование модели односторонней гидроупругости приводит к большим напряжениям, деформациям и перемещениям стенки сосуда.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-31-00223).

## СИНГУЛЯРНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Ю. А. Боган

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

В этой работе подсчитаны осредненные коэффициенты теплопроводности для тонко-слоистой среды в предположении, что слои лежат параллельно выделенной плоскости, и межслойная граница — это тонкий слой (нулевой толщины) слабопроводящего материала. Осредненные коэффициенты зависят от параметра  $k > 0$ , связывающего скачок температуры и поток тепла на межслойной границе. Показано, что в пределе  $k \rightarrow +0$  понижается размерность предельного уравнения. Доказана слабая сходимость исходной краевой задачи к предельной и приведены два примера негладких решений предельной краевой задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Canon, Éric, and Pernin, Jean-Noel. *Homogénéisation d'un problème de diffusion en milieu composite avec barrière à l'interface*. C. R. Acad. Sci. Paris. 1997. Т.325. Série 1. P. 123–126.
2. Sanches-Palencia E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag. 1980. V. 127.
3. Radkevich E.V. *Equations with nonnegative characteristic form. I*. Journal of Mathematical Sciences. 2009. V. 158. P. 297–411.

## ДИНАМИКА УДАРНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ПРОДОЛЬНОЙ СТРАТИФИКАЦИЕЙ

А. Н. Богданов

*НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва*

Рассмотрены задачи динамики плоских ударных волн в средах с одномерной продольной стратификацией плотности. Обсуждаются обоснование, особенности и границы применимости метода Уизема [1].

Получена зависимость скорости плоской ударной волны от плотности среды перед ее фронтом для любой интенсивности волны. Определены потери энергии ударной волны при прохождении слоев продольной стратификации плотности.

Обсуждается применение аналогичных методов анализа к задачам обтекания твердых искривленных поверхностей сверхзвуковым потоком газа.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны*. М.: Мир, 1977.

## ДИАГРАММЫ НАЙКВИСТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ГЕМОДИНАМИКЕ ГОЛОВНОГО МОЗГА

Е. Е. Борд<sup>1</sup>, А. А. Черевко<sup>1,2</sup>, А. П. Чупахин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Релаксационные колебания в сложной составной системе “пульсирующий поток крови — упругие стенки сосудов — окружающая среда мозга” описываются уравнением нелинейного осциллятора Ван дер Поля — Дуффинга

$$\varepsilon q''(t) + P_2(q)q' + P_3(q) = k u(t). \quad (1)$$

В уравнении (1) функции  $q(t)$  и  $u(t)$  — гемодинамические параметры. Коэффициенты  $P_2(q) = a_1 + a_2 q + a_3 q^2$ ,  $P_3(q) = b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3$ ;  $a_i, b_i, k \in \mathbb{R}$  определяют демпфирующие и упругие свойства системы,  $\varepsilon$  — малый параметр. Коэффициенты  $\{a_i, b_i, k\}$  определяются индивидуально для каждого пациента на основе экспериментальных данных [1]. Уравнение (1) обладает разнообразным множеством решений, тип которых определяется коэффициентами  $\{a_i, b_i, k\}$  и правой частью [3, 4]. Это устойчивые периодические решения, системы субгармоник, непериодические решения.

Уравнения вида (1), построенные по клиническим данным, обладают, как правило, устойчивым периодическим решением [2]. Диаграммы Найквиста (ДН) являются удобным инструментом аналитического и численного исследования решений уравнения (1) с гармонической правой частью  $u(t) = A \sin(\omega t)$  при различных  $A$  и  $\omega$ . ДН

дают связь между параметрами внешнего возбуждения ( $A$  и  $\omega$ ) и параметрами возбуждаемых в системе колебаний. Такой подход существенно дополняет экспериментальные данные и позволяет расширить диапазон возможных внешних воздействий на гемодинамическую систему мозга, описываемую уравнением (1).

Проведенный анализ ДН для уравнений (1), описывающих системы сосудов головного мозга при наличии церебральных аневризм (ЦА), показывает характерный вид решений (1) при наличии аномалий такого типа. Обнаружено конечное число паттернов, представляющих динамику изменения решения (1), начиная с появления систем субгармоник и заканчивая разрушением периодического решения. Применительно к живой системе это может означать нарушение ее функционирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00036).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чупахин А. П., Черевко А. А., Хе А. К., Кривошапкин А. Л., Орлов К. Ю., Баранов В. И., Телегина Н. Ю., Панарин В. А. *Измерения и анализ локальной церебральной гемодинамики у больных с сосудистыми мальформациями головного мозга*. Патология кровообращения и кардиохирургия. 2012. Т. 16. № 4. С. 21–26.
2. Михайлова А. В., Черевко А. А., Чупахин А. П. *Построение гемодинамической модели по экспериментальным данным: обратная задача*. Архив заседаний семинара “Математика в приложениях” за 2013 год, Институт математики им. С. Л. Соболева.
3. Плисс В. А. *Исследование одного трансцендентного случая теории устойчивости движения*. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 911–924.
4. Cartwright M. L. and Littlewood J. E. *On nonlinear differential equations of the second order*. Math. Soc. 1945. V. 20. P. 180–189.

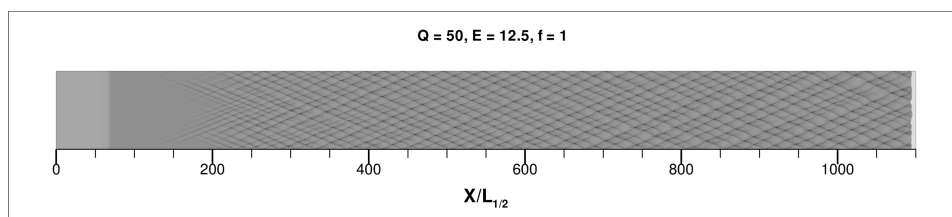
## РОЛЬ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ДЕТОНАЦИОННЫХ ВОЛН

*С. П. Борисов, А. Н. Кудрявцев*

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет*

Хорошо известно, что детонационная волна (ДВ) имеет сложную нестационарную самоподдерживающуюся многофронтную структуру. Её образование может быть объяснено неустойчивостью плоской ДВ по отношению к поперечным возмущениям. К сожалению, линейная теория устойчивости ДВ хорошо развита лишь для простой химической модели с одной необратимой реакцией и никогда не сравнивалась с экспериментами. Таким образом, её выводы и связь с реальной ячеистой структурой

остается предметом обсуждений. Мы показываем, что для ДВ, распространяющейся в плоском или прямоугольном канале, линейный анализ позволяет предсказать ряд параметров ячеистой структуры в качественном согласии с экспериментальными наблюдениями. Далее численно исследуются нелинейные стадии формирования детонационных ячеек в плоском канале. Двумерные уравнения Эйлера для химически реагирующего газа решаются WENO схемой 5-го порядка точности. Сеточное разрешение варьировалось, наиболее подробная сетка состояла из  $2720 \times 3400$  точек; для расчетов использовалось до 80 ядер вычислительного кластера. На рисунке ниже показан пример полученного численного следового отпечатка.



С помощью преобразования Фурье по поперечной координате определялся преобладающий масштаб и, соответственно, число детонационных ячеек, укладывающихся в канале. Было обнаружено, что сразу же после формирования ячеек их число хорошо согласуется с предсказаниями линейной теории. Однако, далее, когда многофронтная структура становится хорошо развитой, их число уменьшается примерно в два раза. Очевидно, что данный процесс “спаривания” обусловлен влиянием нелинейных эффектов. Таким образом, можно заключить, что предсказания линейной теории оказываются верны для ранних стадий формирования ячеистой структуры. Определение конкретных нелинейных механизмов, ответственных за удвоение размера ячеек при выходе на самоподдерживающийся режим с развитой многофронтной структурой может стать предметом дальнейших исследований.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ (договор №14.Z50.31.0019) для поддержки исследований под руководством ведущих ученых.

## РЕАЛИЗАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РАСЧЕТА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ

*М. А. Боронина, В. А. Вшивков*

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
Новосибирск*

При численном моделировании динамики частиц в самосогласованных электромагнитных полях стандартной схемой расчетов является схема с перешагиванием, где значения всех физических величин берутся на сетках, сдвинутых друг относительно друга на полшага. Схема обладает вторым порядком точности, но является условной устойчивой. В случае плоских пучков частиц и, соответственно, плоских областей условие устойчивости определяется наименьшим пространственным шагом,



величина которого минимум в 100 раз меньше, чем пространственный шаг в другом направлении [1, 2]. Это условие приводит к необходимости уменьшать временной шаг. Решаемая на суперЭВМ полностью трехмерная задача динамики ультрарелятивистских частиц требует снижения временных затрат на расчеты [3].

Предлагается на основе схемы с перешагиванием использовать схему с весами [4], добавив неявность в направлении наименьшего размера области. Это приводит к изменениям в формулах подсчета полей в других направлениях [5]. Для обеих схем характерно то, что при определенном соотношении пространственного и временного шагов высокочастотные колебания могут распространяться в обратную сторону. Обе схемы со вторым порядком точности сохраняют амплитуду волн и скорость их распространения.

В зависимости от граничных условий удобно использовать новые формулы либо для магнитного поля, либо для электрического. Например, в задаче динамики заряженных частиц в ускорителях на каждом шаге по времени вычисляются граничные условия для электрического поля, а магнитное поле на границе определяется через дополнительные узлы электрического поля. Поэтому изменения в схеме с перешагиванием касаются только двух формул для вычисления электрического поля. Также требуется хранить и использовать две компоненты электрического поля и тока на предыдущем временном шаге. Вычисление компонент электрического поля производится в помощь метода прогонки.

В докладе будут представлены результаты исследования основных характеристик предложенной схемы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 16-31-00301, 14-01-00392, 14-07-00241, 16-01-00209).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Boronina M. A., Vshivkov V. A. *Parallel Three-dimensional PIC Code for Beam-beam Simulation in Linear Colliders*. Proceedings of IPAC14. 2014. MOPME027.
2. Boronina M. A., Vshivkov V. A., Dudnikova G. I. *3D Computer Simulations of the Ultrarelativistic beam Dynamics in Super Colliders*. Proceedings of IPAC15. 2015. MOPJE023. С. 24–31.
3. Boronina M. A., Vshivkov V. A. *Parallel 3D particle-in-cell modelling of charged ultrarelativistic beam dynamics*. Journal of Plasma Physics. 2015. V. 81. 495810605.
4. Самарский А. А. Гулин А. В. *Численные методы: Учеб. пособие для вузов*. М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат. лит., 1989.
5. Боронина М. А., Вшивков В. А., Дудникова Г. И. *Неявная схема для решения уравнений Максвелла в областях с различными масштабами*. Доклады Академии наук высшей школы России. 2014. № 4(25). С. 39–46.

## КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ–РЕАКЦИИ

*Р. В. Бризицкий<sup>1</sup>, Ж. Ю. Сарицкая<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток*

<sup>2</sup>*Дальневосточный федеральный университет*

В ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma$  рассматривается краевая задача

$$-\lambda \Delta \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi + \tilde{k}(\varphi, \mathbf{x})\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (1)$$

Здесь функция  $\varphi$  имеет смысл концентрации загрязняющего вещества,  $\mathbf{u}$  — заданный вектор скорости,  $f$  — объемная плотность внешних источников вещества,  $\lambda$  — постоянный коэффициент диффузии, функция  $\tilde{k} = \tilde{k}(\varphi, \mathbf{x})$  имеет смысл коэффициента реакции.

Доказана глобальная разрешимость задачи (1) при коэффициентах реакции, зависящих как от концентрации вещества, так и от пространственных переменных и принадлежащих достаточно широкому классу функций, и локальная единственность ее решения. Исследована задача идентификации для коэффициентов реакции вида  $\tilde{k} = \beta(\mathbf{x})k(\varphi)$ , заключающаяся в восстановлении функции  $\beta(\mathbf{x})$  по измеренной в некоторой подобласти  $Q \subset \Omega$  концентрации вещества. При этом условия на функции  $\beta(\mathbf{x})$  и  $k(\varphi)$  также достаточно общие. Предложенный подход в определенном смысле обобщает постановки краевых и экстремальных задач в [1, 2].

Наконец, для конкретного случая  $k(\varphi) = \varphi^2$ , которому отвечает коэффициент реакции  $\tilde{k}(\varphi, \mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})\varphi^2$ , выведена система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума, и на основе ее анализа получены оценки локальной устойчивости решения экстремальной задачи относительно малых возмущений как функционала качества, так и плотности источников  $f$  в правой части уравнения в (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-11-00079).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Г. В., Вахитов И. С., Соболева О. В. *Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции–диффузии–реакции*. Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2012. Т. 52. № 12. С. 2190–2205.
2. Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю. *Краевые и экстремальные задачи для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции*. Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 447–456.

# ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКОГО СЛОЯ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

О. А. Бурмистрова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается задача об устойчивости жидкости, частично заполняющей цилиндр, который вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Изотермическая задача изучалась в работах [1]–[5] (см. также ссылки в [4, 5]). В данной работе предполагается, что течение неизотермическое, и сила тяжести отсутствует. Основное решение уравнений Навье — Стокса и теплопроводности имеет вид  $\vec{V} = (0, \omega r, 0)$ ,  $p = \rho\omega^2 r^2/2 + p_0$ ,  $T = T_1 \log(r/r_2) + T_0$ , где  $p_0$ ,  $T_1$ ,  $T_0$  — постоянные. Поверхность  $r = r_2$  является свободной. Известно, что существует область устойчивости по отношению к плоским возмущениям [5]. Обнаружено, что осесимметрические возмущения способны ее дестабилизировать. По аналогии с [6] рассматривались нейтральные возмущения, где в качестве спектрального параметра выбиралось число Марангони. Температура на свободной поверхности удовлетворяет условию третьего рода. Независимыми безразмерными параметрами задачи являются  $a = r_1/r_2$  (отношение внешнего радиуса цилиндра к внутреннему),  $Ma = \kappa\delta T r_2/\rho\nu^2$  (число Марангони),  $We = \rho\omega^2 r_2^3/\sigma_0$  (число Вебера),  $Bi = \beta r_2$  (число Био),  $Cr = \kappa\delta T/\sigma_0$  (характеризует изменение поверхностного натяжения),  $Pr = \nu/\chi$  (число Прандтля). Критические значения числа Марангони получены для различных волновых чисел. Кроме неустойчивости типа Пирсона существует длинноволновая капиллярная неустойчивость, которая также имеет место для изотермического течения. Что касается неустойчивости, обусловленной силой плавучести, то она может возникать только при очень больших числах Прандтля [7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пухначев В.В. *Ветвление вращательно-симметричных решений, описывающих течения вязкой жидкости со свободной поверхностью*. ПМТФ. 1973. Т. 14. № 2. С. 127–134.
2. Johnson R. E. *Steady state coating flows inside a rotating horizontal cylinder*. J. Fluid Mech. 1988. V. 190. P. 321–342.
3. Benilov E. S, Kopteva N. & O'Brien S. B. G. *Does surface tension stabilize liquid films inside a rotating horizontal cylinder*. Q. J. Mech. Appl. Math. 2005. V. 58. P. 158–200.
4. Leslie G. A, Wilson S. K & O'Duffy B. R. *Three-dimensional coating and rimming flow: a ring of fluid on a rotating horizontal cylinder*. J. Fluid Mech. 2013. V. 716. P. 51–82.
5. Benilov E. S, Lapin V. N. *Inertial instability of flows on the inside or outside of a rotating horizontal cylinder*. J. Fluid Mech. 2013. V. 736. P. 107–129.
6. Pearson J. R. A. *On convection cells induced by surface tension*. J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 489–500.
7. Пухначев В.В. *Тепловая конвекция во вращающемся слое жидкости в условиях невесомости*. Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2003. С. 285–290.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НАСТАЦИОНАРНОЙ ЗАКАЧКИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

А. В. Валов<sup>1</sup>, С. В. Головин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Одной из важных компонент производства трещины гидроразрыва пласта с целью интенсификации добычи углеводородов является контроль трещины гидроразрыва, состоящий в определении её основных геометрических параметров: размера и положения. Контроль трещины обычно осуществляется в момент её производства на основе данных микросейсмического мониторинга. Однако данный подход даёт только приблизительную информацию о параметрах трещины, поэтому другие способы контроля трещины гидроразрыва являются крайне актуальными.

В данной работе дано теоретическое обоснование возможности использования нестационарной закачки жидкости для определения параметров трещины гидроразрыва пласта. Предполагается, что закачка жидкости в скважину с трещиной гидроразрыва организована с периодически меняющимся по времени расходом. Показано, при этом будет наблюдаться фазовый сдвиг между волнами давления и расхода жидкости. Фазовый сдвиг зависит от параметров пласта, а также от длины трещины ГРП. Таким образом, одновременное измерение давления и расхода жидкости на забое скважины даёт дополнительную информацию о трещине ГРП.

Математическое моделирование процесса основывается на модели пороупругой среды Био [1] с условиями на трещине, аналогичными используемым в работе [2]. Предполагается что длина и ширина трещины фиксированы. Построены два точных решения: для случая бесконечно длинной трещины и для случая скважины без трещины. Для случая бесконечно длинной трещины решение найдено в виде волновых пакетов, что позволяет явно определить фазовый сдвиг. В случае скважины без трещины сдвиг определен на основе исследования аналитического решения в виде функций Бесселя. В численном счёте фазовый сдвиг между волнами расхода и давления найден для трещины конечной длины. Показано, что во всех случаях величина фазового сдвига зависит от физических параметров задачи и от геометрии трещины. Это даёт возможность определять по измеряемому фазовому сдвигу параметры трещины, в частности её длину.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00610).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M. A. *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid*. J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. № 2. P. 168–178.
2. Shelukhin V. V., Baikov V. A., Golovin S. V., Davletbaev A. Y., Starovoitov V. N. *Fractured water injection wells: Pressure transient analysis*. Int. J. Sol. Struct. 2014. V. 51. № 11. P. 2116–2122.

## О МЕТОДЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ТРЕЩИНОЙ

Э. М. Вихтенко<sup>1</sup>, Р. В. Намм<sup>2</sup>, М. В. Червякова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск

<sup>2</sup>Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск

Классические постановки задачи упругости с трещиной внутри области предполагают, как правило, что напряжение на берегах трещины равно нулю [1, 2]. Но равенство нулю напряжения на берегах трещины не исключает возможности проникновения берегов трещины друг в друга, что является неестественным с точки зрения механики процесса. В последнее время в работах по теории трещин рассматриваются модели с нелинейными краевыми условиями на берегах трещины [3, 4]. Указанные краевые условия записываются в виде неравенств и обеспечивают взаимное непроникновение берегов трещины. С точки зрения механики такие модели более предпочтительны в сравнении с их классическими аналогами. Эти модели допускают вариационную постановку в виде минимизации квадратичного функционала на замкнутом выпуклом подмножестве исходного гильбертова пространства.

Для анализа проблем механики сплошной среды большую популярность получили вариационные постановки исследуемых задач. В последнее время особенно актуальной становится разработка специальных методов для численного исследования вариационных неравенств. В указанных выше работах, а также в ряде других исследований отражен опыт численного решения нелинейных вариационных задач механики, в том числе задач с трещинами.

В предлагаемой работе для решения задачи с трещиной с условиями непроникновения берегов трещины друг в друга исследуется схема двойственности, построенная на основе модифицированного функционала Лагранжа. В этих исследованиях, как правило, предполагалась достаточная регулярность решения исходной задачи, которая обеспечивает существование решения двойственной задачи. Однако для задачи теории упругости с трещиной регулярность решения в окрестности краев трещины может быть как угодно плохой, и двойственная задача может быть неразрешимой. Несмотря на указанную проблему, удастся построить и обосновать схему двойственности для решения поставленной задачи, а также доказать соотношение (равенство) двойственности для исходной и двойственной задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости*. М.: Наука, 1980.
2. Морозов Н. Ф. *Математические вопросы теории трещин*. М.: Наука, 1984.
3. Khludnev A. M., Kovtunenkov V. A. *Analysis of cracks in solids*. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
4. Хлуднев А. М. *Задачи теории упругости в негладких областях*. М.: Физматлит, 2010.

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕМПЕРАТУРНАЯ КОНВЕКЦИЯ ПРИ ТЕПЛООБМЕНЕ НА ГРАНИЦАХ ПЛОСКОГО СЛОЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

*С. С. Власова<sup>1</sup>, Е. Ю. Просвиряков<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева — КАИ*

<sup>2</sup>*Институт машиноведения УрО РАН*

Решение модельных задач, посвященных теоретическому описанию конвективных движений жидкости, довольно часто основано на предположении об идеальном теплообмене на границах слоя жидкости. Таким свойством обладают все известные классические точные решения естественной конвекции. Это предположение оправдано тем, что авторы классов точных решений рассматривали установившиеся движения жидкости. Однако нельзя пренебрегать теплообменом на границах при изучении нестационарных краевых режимов при течении неизотермической жидкости.

Рассматривается решение задачи для теплового источника, который описывается квадратичной формой по горизонтальной координате

$$T = T_0(t, z) + T_1(t, z)x + T_{11}(t, z)\frac{x^2}{2}.$$

Закон изменения давления записывается аналогично:

$$P = P_0(t, z) + P_1(t, z)x + P_{11}(t, z)\frac{x^2}{2}.$$

Подставив данные выражения в двумерную систему Обербека — Буссинеска, получим формулы для скоростей  $V_x$  и  $V_z$ . Нетрудно показать, что линии уровня температуры, давления и скоростей представляют собой алгебраические кривые третьего, четвертого и пятого порядков соответственно. Изучение изолиний гидродинамических полей даже в стационарном случае является очень трудной проблемой, поскольку в зависимости от параметров задачи качественное поведение изолиний кардинально меняется.

Целесообразно рассматривать краевые нестационарные режимы, раскладывая каждое слагаемое температурного источника по полной системе функций, поскольку разрешающая система уравнений в этом случае близка к стационарной. На основе разложения гидродинамических полей в конечный ряд Фурье найдено точное решение. Данное решение удовлетворяет граничным условиям третьего рода и описывает конвекцию при квадратичном законе нагрева (охлаждения) границ. Приводятся аналитические и численные методы решения такого класса задач. Обсуждаются достоинства и недостатки каждого метода. Изучены топология изолиний (в стационарном случае) и свойства амплитуд решений (при неустановившейся конвекции).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта “Проектная часть государственного задания в сфере научной деятельности” (9.1694.2014/К)

# МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗМЕРОВ НАНОСТРУКТУР НА ДИНАМИКУ УДАРНО-ВОЛНОВОГО СЖАТИЯ

*И. Ф. Головнев<sup>1</sup>, Е. И. Головнева<sup>1</sup>, Л. А. Мержиевский<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

Известно, что обычные микроструктурные и наноструктурные среды резко отличаются по своим механическим, физико-химическим и термодинамическим свойствам. Как показывают расчеты, это обусловлено различием в соотношении количества поверхностных и объемных атомов. В этой связи представляет интерес исследование влияния размеров наноструктур (нанокристаллов) на особенности протекания динамических процессов и характеристики динамического деформирования. Ранее в наших работах [1, 2] было показано, что при распространении ударной волны в наноструктуре определенного размера возникают ротационные поля и происходит интенсивная генерация дефектов кристаллической структуры. В данной работе методом молекулярной динамики исследуется влияние размеров наноструктур (нанокристаллов) на особенности процесса одноосного ударного (кратковременного) сжатия. Методом молекулярной динамики проводятся расчеты динамического (ударно-волнового) сжатия нанокристалла меди, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда. Нагружение моделировалось заданием кратковременного напряжения (силы) на одном из торцов цилиндра. После прекращения внешнего воздействия система оставалась замкнутой и изолированной. В расчетах варьировались поперечные размеры кристалла, которые обуславливали соотношение количества поверхностных и объемных атомов. Были выбраны следующие размеры поперечного сечения (число кристаллических ячеек в направлении осей YZ): 5x5, 7x7, 10x10. В направлении сжатия вдоль оси X число кристаллических ячеек было фиксированным и равным 50. Установлено, что с увеличением поперечного размера изменяется характер деформирования (движения мезообъемов) в области ударного сжатия. Происходит уменьшение ротационных составляющих (интенсивности вихрей, моментов импульса в выделяемых при анализе ячейках) и относительного вклада ротационной энергии во внутреннюю энергию нанокристалла. С ростом поперечного размера температурный скачок на фронте ротационной волны уменьшается и сглаживается. Таким образом, полученные результаты показывают, что структура ударной волны существенно зависит от размеров нанокристалла.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00468).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Головнев И. Ф., Головнева Е. И., Мержиевский Л. А., Фомин В. М. *Генерация дефектов как явление самоорганизации структуры под влиянием внешних нагрузок*. Физическая мезомеханика. 2013. Т. 16. № 3. С. 35–43.

2. Головнев И. Ф., Головнева Е. И., Мержиевский Л. А., Фомин В. М., Панин В. Е. *Молекулярно-динамическое исследование кластерной структуры и свойств ротационной волны в твердых наноструктурах*. Физическая мезомеханика. 2014. Т. 17. № 4. С. 41–48.

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ РАЗРЫВОВ ПО НЕОДНОРОДНОМУ СТАТИЧЕСКОМУ ФОНУ

*А. Н. Голубятников, С. Д. Ковалевская*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Рассматривается одномерная нестационарная задача о движении плоской ударной волны, вызванной, например, поршнем, по произвольному статическому фону. Газ считается совершенным, движение — адиабатическим. Равновесный фон может быть создан гравитационным или электрическим полями, зависящими от массовой переменной. Задача решается путем разложения закона движения и давления в ряды Тейлора по ударной переменной, равной разности текущего времени и времени прихода ударной волны к данному значению массы, с коэффициентами, зависящими от этой же массовой переменной. В результате все коэффициенты последовательно определяются как рациональные функции скорости движения ударной волны по массе, начального фона и их производных. Затем производится отыскание коэффициентов ряда для времени движения ударной волны по массе через заданные коэффициенты ряда Тейлора движения поршня по времени. Доказывается однозначная разрешимость этой процедуры.

Как показывают точные решения (Голубятников А. Н., Ковалевская С. Д.), ударная волна может уходить на бесконечность как при конечной массе, так и за конечное время. Это освобождает, в какой-то степени, от необходимости исследования сходимости ряда для закона движения, но требует проведения такого анализа для распределения давления. Вопрос пока остается открытым.

Препятствием к построению таким способом решения служит обращение в нуль знаменателей формул, когда мы имеем дело со слабым разрывом (скорость газа на ударной волне равна нулю). Решение перестраивается. В этом случае для ускорения газа на ударной волне получается обыкновенное дифференциальное уравнение Риккати для массы, которое явно решается с определением произвольной постоянной по начальному ускорению поршня. Все последующие дифференциальные уравнения первого порядка для определения высших производных по времени линейны. Если начальное ускорение поршня достаточно велико, со временем происходит опрокидывание слабого разрыва. Для слабых разрывов всех высших порядков, когда ускорение газа на ударной волне (вместе с начальным ускорением поршня) равно нулю, остаются только линейные уравнения первого порядка, опрокидывания нет.

Исследование приближения слабой ударной волны, связанное с параметрическим переходом к слабому разрыву, сводится к асимптотическому анализу полученных общих формул по одному малому параметру — начальной скорости поршня. Производные высших порядков по времени в силу наличия логарифмических членов



оказываются уже не малыми и в пределе удовлетворяют определенным выше дифференциальным уравнениям по массовой переменной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 14-01-00056 и 15-01-00361).

## ДИНАМИКА ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ В АНИЗОТРОПНОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

*Р. Н. Голых*

*Бийский технологический институт АлтГТУ*

В последние десятилетия анизотропные неньютоновские жидкости получают всё более широкое применение в различных областях человеческой деятельности. Постоянно возрастающие требования к полимерным композиционным материалам (по их прочности после отвердевания), лакокрасочным материалам (по коррозионной стойкости) и многим другим подклассам анизотропных неньютоновских жидкостей обуславливают необходимость модификации их физико-химической структуры.

Многими исследователями установлено [1, 2], что одним из перспективных подходов к изменению структуры таких сред является кавитационное воздействие (создаваемое акустическими колебаниями, гидродинамическим разрежением и т. д.). Для подбора режимов кавитационного воздействия, а также понимания характера изменения физических свойств анизотропных неньютоновских жидкостей необходимо изучение поведения кавитационного пузырька в средах данного типа.

В связи с этим автором предложена модель динамики газовой полости в жидкости, учитывающая зависимость вязкости не только от модуля, но и от направления скорости сдвига. Эта зависимость, обусловленная, как правило, наличием определённой ориентации молекулярных цепочек, приводит к отклонению формы полости от сферической. В рамках модели первоначально определяются компоненты сил вязких напряжений в анизотропной неньютоновской жидкости в зависимости от модуля, направления скорости сдвига и функции распределения макромолекул по ориентации и размерам на основании вероятностно-статистического подхода. Затем анализируется течение жидкости, обтекающей газовую полость, в зависимости от частоты и амплитуды акустического давления, создаваемого в ней.

Предложенная модель служит основой для определения формы кавитационного пузырька и характеристик ударной волны в анизотропной неньютоновской среде. Это в дальнейшей перспективе даст возможность проанализировать воздействие кавитации на молекулярную структуру и физические свойства анизотропных неньютоновских жидкостей и, в конечном итоге, подобрать режимы воздействия, обеспечивающие достижение требуемых свойств таких сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-08-01298).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Huang Y. D., Liu L., Qiu J. H., Shao L. *Influence of ultrasonic treatment on the characteristics of epoxy resin and the interfacial property of its carbon fiber composites*. Composit. Sci. Techn. 2002. V. 62. № 16. P. 2153–2159.
2. Brujan E. A., Williams P. R. *Influence of ultrasonic treatment on the characteristics of epoxy resin and the interfacial property of its carbon fiber composites*. Reology reviews. 2005. P. 146–172.

## ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА ПЛОТНОСТИ СПЕКТРА ЭНЕРГИИ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В. Н. Гребенёв<sup>1</sup>, С. В. Назаренко<sup>2</sup>, С. Б. Медведев<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Математический институт, университет Уорвик, Великобритания

<sup>3</sup>Новосибирский государственный университет

Получен фундаментальный результат [1], [2] о характере затухания энергетического спектра турбулентности, дополняющий закон Колмогорова  $-5/3$ . Показано, что процесс проходит в режиме с обострением — возбуждение энергии турбулентности по всем волновым модам  $k$  спектра  $E(k, t)$  происходит за конечное время  $t = t_*$  с формированием промежуточной асимптотики. Доказано существование аномального показателя  $x^*$  затухания спектра  $E(k, t_*) \sim Ck^{-x^*}$ ,  $k \rightarrow \infty$ , который находится в интервале  $x_2 > x^* > 5/3$ , где  $5/3$  — колмогоровский показатель спектра, а  $x_2 \approx 1.95$ . Значение показателя  $x_2$  соответствует периодическому возбуждению спектра при бифуркации Хопфа. Значение  $x^* \approx 1.856$  было получено в результате численных экспериментов в работе [3]. Формирование аномального спектра энергии турбулентности, т.е. переходного режима затухания энергии турбулентности, ранее наблюдалось при прямом численном моделировании турбулентности в рамках спектральных уравнений Навье — Стокса. Результаты аналитического исследования данной работы получены в рамках спектральной модели Лейта [4], которая является прямым следствием спектральных уравнений Навье — Стокса с наследованием свойства конечной ёмкости энергии (см. дискуссию в [3]). Промежуточная асимптотика находилась как решение автомодельной задачи на собственные значения 2-го рода, где показатель  $x^*$  определялся в результате решения задачи. Сходимость к полученному автомодельному решению за конечное время  $t = t_*$  доказывалась для произвольного начального возмущения спектра с компактным носителем. Дополнительно были получены новые результаты в теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений для неоднородной среды.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Grebenev V. N., Nazarenko S. V., Medvedev S. B., Schwab I. V., Chirkunov Yu. A. *Self-similar solution in the Leith model of turbulence: Anomalous power law and asymptotic analysis*. In: Highlights. A collection of outstanding research published in 2014. Fluid and plasma theory. Special Issue J. Phys. A: Mathematical and Theoretical. 2015. P.40.

2. Grebenev V. N., Nazarenko S. V., Medvedev S. B., Schwab I. V., Chirkunov Yu. A. *Self-similar solution in the Leith model of turbulence: Anomalous power law and asymptotic analysis*. J. Phys. A: Mathematical and Theoretical. 2014. V. 47. N. 2. P. 025401–025509.
3. Connaughton C., Nazarenko S. V. *Warm cascade and anomalous scaling in a diffusion model of turbulence*. Phys. Rev. Letters. 2004. V. 92. N. 4. P. 044501–506.
4. Leith C. *Diffusion Approximation to Inertial Energy Transfer in Isotropic Turbulence*. Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 1409–1425.

## АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КРИВОЙ НЕЙТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОГО ГАЗА

Ю. Н. Григорьев<sup>1,2</sup>, И. В. Ершов<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет,

<sup>3</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

Для сверхзвукового плоского течения Куэтта колебательно-возбужденного газа построены асимптотические решения спектральной задачи линейной теории устойчивости. Исходной математической моделью служили уравнения двухтемпературной вязкой газовой динамики, из которых в рамках классической линейной теории получена спектральная задача для линейной системы восьмого порядка.

Единые для всех сдвиговых течений преобразования системы выполнялись по классической схеме, впервые использованной в известной работе [1]. Два линейно независимых “вязких” решения при  $Re \rightarrow \infty$  были построены методом Фробениуса на основе асимптотического разложения в окрестности критического слоя. Для “вязких” решений система после ряда упрощений, позволивших отщепить уравнение Ландау — Теллера, была приведена к системе Дана — Линя шестого порядка [1]. Входящие в нее уравнения для возмущений продольной скорости и статической температуры преобразовывались к уравнениям Эйри. В результате “вязкие” решения были представлены через обобщенные функции Эйри нулевого, первого и второго порядков. Спектральная задача рассматривалась для плоского течения Куэтта с двумя краевыми условиями, устойчивость которого в рамках асимптотической теории ранее не исследовалась даже для случая совершенного газа. Секулярное уравнение было получено после перенормировки граничных значений “вязких” решений. Использование функций Эйри позволило выразить “вязкую” часть уравнения через функцию Титьенса и ее производную [1].

Алгебраическое секулярное уравнение решалось численно с использованием таблиц для функции Титьенса и ее производной [2]. Для значений аргумента за пределами таблиц использовалась асимптотика “вязкой” части. Рассчитанные таким образом кривые нейтральной устойчивости показывают, что с возрастанием возбуждения

критическое число Рейнольдса возрастает, а нейтральная кривая смещается в область больших волновых чисел. Эта тенденция подтверждается также полученным асимптотическим выражением для критического числа Рейнольдса в пределе  $M \leq 4$  и малых значений фазовых скоростей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00274а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. *Теория гидродинамической устойчивости*. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Miles J. W. *The hydrodynamic stability of a thin film of liquid in uniform shearing motion*. J. Fluid Mech. 1960. V. 8. P. 593–610.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В УПРУГОМ ТРОЙНИКЕ

Н. С. Денисенко<sup>1,2</sup>, А. А. Янченко<sup>1,2</sup>, А. А. Черевко<sup>1,2</sup>, А. К. Хе<sup>1,2</sup>, А. П. Чупахин<sup>1,2</sup>,  
А. А. Тулунов<sup>1,3</sup>, А. А. Савелов<sup>3</sup>, А. Е. Акулов<sup>4</sup>, М. П. Мошкин<sup>1,4</sup>, А. В. Бойко<sup>5</sup>,  
А. Л. Кривошапкин<sup>6</sup>, К. Ю. Орлов<sup>6</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>3</sup>Институт “Международный томографический центр” СО РАН, Новосибирск

<sup>4</sup>Федеральный исследовательский центр Институт цитологии и генетики СО РАН, Новосибирск

<sup>5</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

<sup>6</sup>ННИИ патологии кровообращения им. ак. Е. Н. Мешалкина, Новосибирск

В докладе дается обзор результатов по лабораторному и численному моделированию церебральной гемодинамики человека.

Эксперименты проводились с использованием программируемого насоса CompuFlow 1000 MR, позволяющего задавать произвольную зависимость расхода от времени. Изучались характеристики течения в модели бифуркации сонной артерии, выполненной в упругом силиконовом блоке, моделирующем внешнее окружение кровеносного сосуда. В качестве рабочей жидкости использовалась смесь воды и глицерина, подобная по своим свойствам крови. Измерения скорости и давления потока при различных нестационарных режимах течения производились датчиком ComboWire в комплекте с прибором ComboMap (ННИИПК).

Визуализация потоков и измерения скорости и расхода при различных режимах течения осуществлялась в магнитно-резонансных томографах Philips Intera Achieva с силой поля 1.5 Т (МТЦ СО РАН) и Bruker BioSpec 117/16 USR с силой поля 11.7 Т (ФЦ ИЦиГ СО РАН).

Полученные экспериментальные данные использовались для компьютерного 3D-моделирования движения жидкости с помощью пакета ANSYS/CFX в информационном вычислительном центре НГУ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00036) в части численного моделирования и экспериментов в НИИПК. Проведение экспериментов в МР сканерах МТЦ и ИЦИГ осуществлялось при поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-35-00020).

## О ФАЗОВОМ СДВИГЕ В АНЗАЦЕ КУЗМАКА — УИЗЕМА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

С. Ю. Доброхотов<sup>1,2</sup>, Д. С. Миненков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт

Анзацем Кузмака — Уизема в однофазовой ситуации называется представление специальных асимптотических решений многих важных нелинейных уравнений в виде  $X(S(x, t)/h + \phi(x, t), I(x, t), x, t) + O(h)$ , где фаза  $S(x, t)$ , аналог нелинейной амплитуды  $I(x, t)$  и фазовый сдвиг  $\phi(x, t)$  — медленно меняющиеся функции, а  $h$  — малый параметр. Для многих физически интересных уравнений (в частности, для уравнения Кортевега — де Фриза, синус-Гордона) периодическая по первому аргументу  $y$  функция  $X(y, x, t)$  выражается через эллиптические функции, поэтому часто с анзацем Кузмака — Уизема связывают “искаженные кноидальные волны”. Фаза  $S(x, t)$  и нелинейная амплитуда  $I(x, t)$  находятся из получаемой в результате осреднения системы уравнений Уизема. Уравнение для фазового сдвига получается при изучении второй поправки к главному члену асимптотического решения. При этом процедура построения поправки неравномерна по отношению к переходу к волнам с малой амплитудой. Наше наблюдение, по-существу, вытекающее из работ Р. Хабермана и его соавторов, состоит в том, что включение фазового сдвига в фазу и замена  $S \rightarrow \tilde{S} = S + h\phi + O(h^2)$ ,  $I \rightarrow \tilde{I} = I + I_1 h + O(h^2)$  на “новые подправленные функции”  $\tilde{S}, \tilde{I}$ , приводит к той же системе Уизема, что и для  $S$  и  $I$ , при этом нужно подправить начальные данные в задаче Коши для этой системы. Это соображение позволяет достаточно просто полностью описать главный член асимптотических решений в форме Кузмака — Уизема, при этом такое описание оказывается равномерным при переходе из области сильной нелинейности в область слабой нелинейности. В качестве примеров мы рассматриваем уравнение Кортевега — де Фриза и уравнение синус-Гордона.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Доброхотов С. Ю., Миненков Д. С. *О фазовом сдвиге в анзаце Кузмака — Уизема*. ТМФ. Т. 166. № 3. С. 350–365.

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЗАПЛЕСКА ДЛИННЫХ ВОЛН, ПОРОЖДЕННЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

С. Ю. Доброхотов<sup>1,2</sup>, Д. С. Миненков<sup>1</sup>, В. Е. Назайкинский<sup>1,2</sup>, Б. Тироцци<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет),  
Долгопрудный, Московская область

<sup>3</sup>CINFAI и Лаборатория Епеа Frascati, Рим, Италия

Е. Н. Пелиновский и Р. Х. Мазова [1] предложили метод расчета заплеска длинных волн (в частности, волн цунами), описываемых одномерными нелинейными уравнениями мелкой воды над линейным дном  $D(x) = cx$ , на основе известного преобразования, построенного Кэрриером и Гринспеном. Соображения из [1] и преобразование Кэрриера — Гринспена использовались во многих работах, в частности, в [2, 3].

Мы рассматриваем аналогичную задачу для волн, описываемых *двумерной нелинейной системой уравнений мелкой воды и порождаемых локализованным (по сравнению с характерным размером бассейна) источником*. Сначала с помощью модифицированного канонического оператора Маслова [4] строится асимптотика решения линеаризованной задачи [5], для чего в окрестности береговой линии, рассматриваемой как каустика специального типа, вводятся специальные канонические координаты и используются хорошо известные формулы Фока квантования канонических преобразований, чтобы записать асимптотику решения в окрестности берега с помощью преобразования типа Ханкеля. Затем с учетом наличия разных масштабов волнового поля в окрестности береговой линии “на физическом уровне строгости” применяется одномерное преобразование Кэрриера — Гринспена, что дает формулы для нелинейной волны в окрестности береговой линии и, в частности, алгебраические формулы для заплеска волны в случае источников специального вида.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00521) и проекта RITMARE, CINFAI (Italy).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Pelinovsky E., Mazova R. *Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles*. Natural Hazards. 1992. V. 6. P. 227–249.
2. Доброхотов С. Ю., Тироцци Б. *Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью  $c = \sqrt{x}$* . УМН. 2010. Т. 65. Вып. 1(391). С. 185–186.
3. Миненков Д. С. *Асимптотики решений одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды с вырождающейся скоростью*. Матем. заметки. 2012. Т. 92. Вып. 5. С. 721–730.
4. Назайкинский В. Е. *Канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, соответствующем вырождающемуся на границе волновому уравнению*. Матем. заметки. 2014. Т. 96. Вып. 2. С. 261–276.
5. Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B. *Two-dimensional wave equation with degeneration on the curvilinear boundary of the domain and asymptotic solutions with localized initial data*. Russ. Journ. Math. Phys. 2013. V. 20. № 4. P. 389–401.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ УДАРНОЙ ИОННОЙ ВОЛНЫ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

А. А. Ефимова<sup>1</sup>, Г. И. Дудникова<sup>2</sup>, В. А. Вишивков<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

<sup>3</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

На основе численного моделирования исследованы процессы формирования бесстолкновительной ионно-звуковой ударной волны (УВ) в плазме для широкого диапазона чисел Маха, имеющие важное значение для физики плазмы и астрофизики. Рассмотрены две постановки задачи генерации УВ: 1) отражение входящего потока плазмы от проводящей границы; 2) распад разрыва плотности плазмы. Используемые одномерные модели основаны на кинетическом описании ионной компоненты плазмы и использовании бoльцмановской или адиабатической функций распределения электронов. Уравнение Власова решается с использованием метода частиц в ячейках. Найдена зависимость энергии и количества ускоренных ионов от скорости и амплитуды ударной волны, проведено сравнение полученных результатов с теоретическими оценками.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 16-31-00304, 16-01-00209).

## ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОРДОНА НА ОСНОВЕ ЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО КОЛЬЦА ЛИ

А. В. Жибер<sup>1</sup>, С. Н. Камаева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа

<sup>2</sup>Уфимский государственный авиационный технический университет

Известно, что метод обратной задачи теории рассеяния позволяет строить точные решения уравнения Клейна — Гордона

$$u_{xy} = e^u + e^{-u}, \quad (1)$$

так называемые солитоны (см., например [1],[2]).

В настоящей работе рассматривается альтернативный подход к построению точных решений уравнения (1) на основе характеристического кольца Ли. Характеристическое кольцо  $A$  уравнения (1) порождается векторными полями

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial u_1} + D(f) \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots, X_2 = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1}.$$

Здесь  $\bar{u}_1 = u_y$ ,  $u_1 = u_x$ ,  $u_2 = u_{xx}, \dots$ ,  $f = e^u + e^{-u}$ , а  $D$  — оператор полного дифференцирования по переменной  $x$ . Пусть  $L_n$  — линейное пространство коммутаторов, образующих длины  $n - 1$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Тогда характеристическое кольцо Ли  $A$  представимо в виде

$$A = \mathfrak{L}_n + \sum_{i=2}^{\infty} L_i, \quad \mathfrak{L}_n = \sum_{i=2}^n L_i.$$

Полное описание структуры кольца Ли  $A$  приведено в [3].

Точные решения уравнения (1)  $N$ -го порядка возникают, если на пространство  $\mathfrak{L}_{2N}$  наложить условие  $\dim \mathfrak{L}_{2N} = \dim \mathfrak{L}_{2N-1} + 1$ . В работе исследуется случай  $N = 3$ . В этом случае справедливы соотношения

$$u_1 u_4 - u_2 u_3 - u_1^3 u_2 = 0, \quad \text{либо} \quad u_2 u_5 - u_3 u_4 - 3u_1 u_2^3 = 0. \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-11-20007).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. *Теория солитонов: Метод обратной задачи*. Под ред. С. П. Новикова. М.: Наука, 1980.
2. Тахтанжян Л. А., Фаддеев Л. Д. *Гамильтонов подход в теории солитонов*. М.: Наука, 1986.
3. Жибер А. В., Муртазина Р. Д., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б. *Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения*. Москва — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012.

## ВЛИЯНИЕ ОДНОСТОРОННИХ КОЛЕБАНИЙ НА АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ ПРИ ТРАНСЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ

В. П. Замураев<sup>1,2</sup>, А. П. Калинина<sup>1,2</sup>

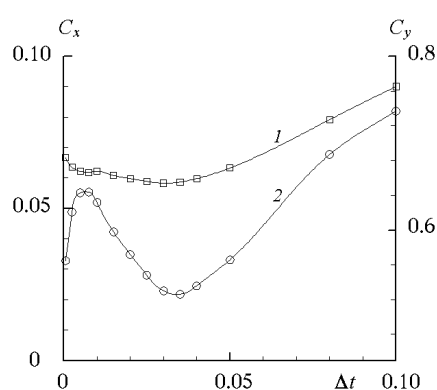
<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет

Исследование колебаний элемента поверхности крылового профиля при трансзвуковом обтекании представляет интерес с различных точек зрения. В первую очередь это необходимо для изучения бафтинга летательных аппаратов. С другой стороны, интерес могут представлять вынужденные колебания как средство управления обтеканием. Трансзвуковое обтекание крылового профиля без колебаний представляет собой сложную задачу, поскольку включает в себя моделирование вязких и тепловых явлений, физические модели которых постоянно совершенствуются [1]. Введение колебаний в постановку задачи значительно повышает вычислительную сложность



задачи. В работе исследование трансзвукового обтекания проводится на основе решения двумерных нестационарных уравнений Эйлера при колебании участка поверхности. Такая постановка задачи позволяет оценить все эффекты по максимуму, так как учет диссипативных явлений приводит к уменьшению воздействия колебаний на поток. В данной работе рассмотрен случай колебаний участка поверхности на одной из сторон крылового профиля в широком диапазоне частот. Исследовано влияние периода гармонического колебания участка поверхности. На рисунке показано влияние периода  $\Delta t$  на осредненные по времени коэффициенты волнового сопротивления  $C_x$  (кривая 1) и подъемной силы профиля  $C_y$  (кривая 2) для заданного значения амплитуды скорости, равном примерно 1.26 от скорости звука набегающего потока (произведение амплитуды колебаний на частоту постоянно и составляет 0.2). Вибрирующий участок расположен перед невозмущенным положением замыкающего скачка.



В зависимости  $C_y$  от  $\Delta t$  получены экстремумы: максимум при высокочастотных колебаниях и минимум при переходе к импульсно-периодическому режиму.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов А. Н., Диесперов В. Н., Жук В. И., Королев Г. Л. *Трансзвуковой переход: особенности, сопутствующие явления, модели, подходы, возможности управления течением*. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теор. и прикл. мех. Казань: Изд-во Казанского ун-та. 2015. С. 485–486.

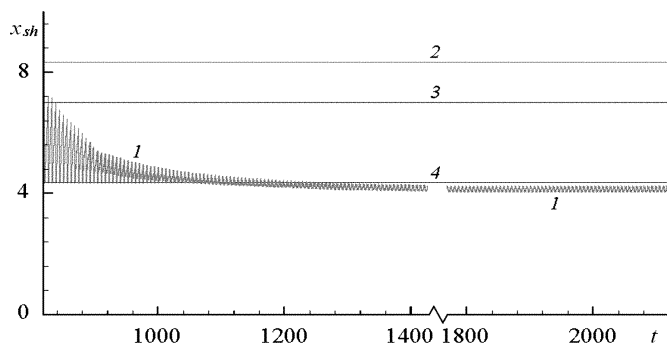
# НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ ОТ ИСТОЧНИКОВ ЭНЕРГИИ И ВТЕКАЮЩЕЙ СТРУИ НА СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ

*В. П. Замураев, А. П. Калинина*

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск*

*Новосибирский государственный университет*

Одним из способов снижения потерь полного давления в высокоскоростных ПВРД является предварительное торможение потока до околосвуковых скоростей [1]. В докладе представлен численно-аналитический анализ возможности создания околосвуковой области в канале с помощью струи и пристеночного энергоподвода. Канал состоит из сопла со скоростью звука на входе, секции постоянного сечения, в которую втекает струя и осуществляется импульсно-периодический подвод энергии (число Маха равно  $M = 2$ ), и расширяющегося участка, завершающегося секцией постоянного сечения. Решаются двумерные нестационарные уравнения Эйлера. Струя подается из газогенератора с постоянным давлением и температурой, равной ее значению на входе в канал. Искомый периодический режим возникает благодаря механизму отрицательной обратной связи по давлению: когда источники энергии повышают давление, перепад давлений между газогенератором и каналом снижается, расход газа в струе уменьшается. Формирование режима показано на рисунке ( $1$  — координата фронта ударной волны  $x_{sh}$ , распространяющейся вверх по потоку;  $2$  и  $3$  — координаты скачка уплотнения на стенках от струи при отсутствии источников энергии,  $4$  — граница источника энергии). Фронт смещается вверх по потоку, но при этом остается в секции постоянного сечения. Непосредственно за фронтом скорость потока несколько ниже звуковой благодаря эффекту дросселя, который создают приповерхностные источники и струя, ниже их дозвуковой поток ускоряется до значений, незначительно превышающих скорость звука.



Это создает благоприятные условия для эффективного подвода и горения топлива в расширяющейся секции канала.

Работа выполнена в рамках проекта СО РАН III.22.6.2. (№ 01201351870) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-08-00820).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Третьяков П. К., Забайкин В. А., Прохоров А. Н. *Высокоскоростной ПВРД с пульсирующим режимом запуска*. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теор. и прикл. мех. Казань: Изд-во Казанского ун-та. 2015. С. 3778–3780.

## ВОЛНЫ И ВИХРИ НА МОДЕЛИ КРЫЛА В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ В АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

*Б. Ю. Занин, А. М. Павленко*

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск*

В работе представлен обзор результатов экспериментов по визуализации пристенных течений, возникающих на поверхности моделей крыльев при обтекании дозвуковым потоком воздуха с повышенным уровнем турбулентности. Высокий уровень возмущений набегающего потока обеспечивался с помощью турбулизирующих сеток, устанавливавшихся в начале рабочей части каждой из двух аэродинамических труб, в которых проводились исследования. Основным методом получения результатов была визуализация с помощью “саже-масляной” пленки. Кроме того, проводились термоанемометрические измерения характера течения в пограничном слое на поверхности обтекаемых тел и в набегающем потоке. Цель работы заключалась в том, чтобы определить, какие изменения пространственных вихревых картин течения происходят при увеличении внешней турбулентности. Также изучалось, как изменяются параметры волн неустойчивости в пограничном слое при ламинарно-турбулентном переходе.

Эксперименты проводились в дозвуковых аэродинамических трубах при малых скоростях воздушного потока до 30 м/сек. Исследовалось обтекание моделей прямоугольных крыльев, устанавливавшихся под различными углами атаки. В зависимости от величины угла атаки, на поверхности крыла реализовывались три основных вида течения: локальный отрывной пузырь в виде узкой полосы вдоль размаха крыла, отрыв турбулентного пограничного слоя в задней части крыла и срыв с передней кромки, при котором область отрыва занимала всю поверхность крыла.

Исследования показали, что во всех этих трех вариантах обтекания увеличение степени турбулентности набегающего потока оказывает значительное влияние на развитие возмущений в пограничном слое и на образование вихревых структур над поверхностью крыла [1, 2]. При малых углах атаки изменяются параметры пакета волн неустойчивости, развивающегося в пограничном слое перед локальным отрывным пузырем. При отрыве турбулентного пограничного слоя и при срыве изменяются форма и размер крупномасштабных вихрей, существующих в областях отрыва. Становится возможным необратимое устранение срыва, когда поток остается присоединенным после прекращения управляющего воздействия. На нижней поверхности крыла появляются продольные вихревые структуры.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Занин Б. Ю., Козлов В. В. *Вихревые структуры в дозвуковых отрывных течениях*. Учебное пособие / Новосибирск: НГУ, 2011.
2. Занин Б. Ю., Катасонов М. М., Михаэлис М. В., Павленко А. М. *Экспериментальные исследования влияния вихревых возмущений на обтекание модели крыла при малых числах Рейнольдса*. Вестник НГУ. Серия: Физика. 2014. Т. 9. Вып. 3. С. 32–38.

## О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ИМЕЮЩИХ ВИД ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ

*А. Л. Казаков, А. А. Лемперт, Св. С. Орлов*

*Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск*

Объектом исследования настоящей работы выступает нелинейное параболическое уравнение («the porous medium equation» [1])

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{1}{\sigma}u_{\rho}^2 + \frac{\nu}{\rho}uu_{\rho}, \quad \nu \in \{0, 1, 2\}, \sigma \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (1)$$

где  $u \stackrel{\text{def}}{=} u(t, \rho)$  — искомая функция,  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  — переменная времени,  $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$  — пространственная переменная. Данное уравнение обладает широким спектром приложений. Из наиболее значимых следует отметить описание процесса распространения тепла на прямой ( $\nu = 0$ ), плоскости ( $\nu = 1$ ) и в пространстве ( $\nu = 2$ ) симметрично относительно начала координат. Тогда переменная  $\rho$  интерпретируется как расстояние от начала координат до произвольной точки, прямой или плоскости соответственно.

Рассматривается вопрос построения решений уравнения (1), имеющих вид тепловой волны, которая распространяется по нулевому фону с конечной скоростью. Тепловые волны являют собой важный и интересный с физической точки зрения класс решений нелинейного уравнения теплопроводности. Наглядным представлением таких решений служит геометрическая конфигурация, состоящая из двух гиперповерхностей  $u = \varphi(\tau, \rho) > 0$  (возмущенное решение) и  $u \equiv 0$  (нулевой фон), непрерывно состыкованных вдоль некоторой достаточно гладкой кривой  $\rho = f(t)$  (фронт тепловой волны).

Авторами исследовались две краевые задачи специального вида, порождающие решения типа тепловой волны уравнения (1): задача А. Д. Сахарова об иницировании тепловой волны и “обратная” задача, когда задается закон движения фронта тепловой волны [2]. Для первой из них путем перехода к характеристической задаче Коши были построены решения в классе кусочно-аналитических функций. Во второй задаче найден класс допустимых граничных условий для уравнения (1), в соответствии с которым построены новые обобщенно-автомодельные решения. Установлено, что процедура построения этих решений редуцируется к классу задач Коши

для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью при старшей производной. Была доказана теорема, гарантирующая локальную разрешимость указанных задач в классе аналитических функций. В некоторых частных случаях получены оценки областей существования аналитических решений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 16-01-00608, 16-31-00291).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Vazquez J.L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. Oxford: Clarendon Press, 2007.
2. Сидоров А. Ф. *Избранные труды: Математика. Механика*. М.: Физматлит, 2001.

## ИДЕАЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

О. В. Капцов

*Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
Сибирский федеральный университет, Красноярск*

В докладе рассматривается проблема совместности нелинейных уравнений с частными производными. Вводится алгебра сходящихся степенных рядов, модуль дифференцирований этой алгебры и модуль пфаффовых форм. Системы дифференциальных уравнений задаются степенными рядами на пространстве джетов. Развивается техника исследования совместности дифференциальных систем, похожая на метод Рикье и теорию базисов Гребнера. Доказывается, что совместные системы, при некоторых предположениях, порождают локальные многообразия в пространстве бесконечных джетов. Определяются симметрии систем с частными производными. Приводятся примеры построения точных решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Капцов О. В. *Локальный алгебраический анализ дифференциальных систем*. ТМФ. 2015. Т. 183. № 3. С. 342–358.
2. Капцов О. В. *Методы интегрирования уравнений с частными производными*. М.: Физматлит, 2009.

## ЭВОЛЮЦИЯ КУМУЛЯТИВНОЙ СТРУИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В ЖИДКОСТИ

*Е. А. Карабут, Е. Н. Журавлева*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет*

Известно, что деформация полостей в жидкости часто вызывает образование кумулятивных струй [1]. Осуществлено моделирование этого явления в рамках модели плоских потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости. В начальный момент времени полость имеет поступательную скорость. Ищется аналитическая функция, осуществляющая конформное отображение области течения на внешность единичного круга. Решение ищется либо в виде степенных рядов, либо в виде рядов Лорана, которые суммируются с использованием техники, предложенной в [2]. Используются замены переменных специального вида с последующим Паде-суммированием. Найдена форма свободной границы и другие параметры течения в каждый момент времени, определены скоростные характеристики кумулятивной струи, изучены особые точки решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 14-19-01633).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Петров А. Г. *Аналитическая гидродинамика*. М.: Физматлит, 2009.
2. Karabut E. A., Kuzhuguet A. A. *Conformal mapping, Padé approximants and example of flow with significant deformation of free boundary*. *Europ. J. Appl. Math.* 2014. V. 25. P. 729–741.

## О ВЛИЯНИИ МОДОВОГО СОСТАВА ВОЗМУЩЕНИЙ В ВЫСОКОЭНТАЛЬПИЙНОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЕ НА ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ВЯЗКОМ УДАРНОМ СЛОЕ

*С. В. Кириловский<sup>1,2</sup>, Т. В. Поплавская<sup>1,2</sup>, И. С. Цырюльников<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет*

В задачах, направленных на исследование устойчивости и ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях, необходимо знать структуру и состав возмущений в аэродинамической трубе. Модовый состав возмущений может зависеть не

только от конструкции соплового тракта аэродинамической трубы, но и от параметров течения ( $P_0$ ,  $T_0$ ,  $Re$ ) и свойств рабочего газа (колебательная релаксация, диссоциация, соотношение компонент смесей и др.).

Экспериментальные исследования по определению модового состава возмущений [1] проводились в импульсной аэродинамической трубе ИТ-302М ИТПМ СО РАН при истечении воздуха, углекислого газа и их смесей. С использованием высокоскоростной цифровой камеры (Phantom-310) получена временная последовательность шпирен-снимков потока в рабочей части аэродинамической трубы с визуализацией возмущений. Далее по последовательности кадров проводилось преобразование Фурье сигнала яркости от времени. Для различных частот пульсаций строились зависимости фазы волн от координаты вдоль потока, позволяющие определить продольную фазовую скорость возмущений.

В численном моделировании рассматривалось течение указанных выше газов и их смесей ( $P_0=200$  бар и  $T_0=3000$  К) в форкамере трубы. Расчётная область строилась на основе чертежей соплового тракта трубы. Расчётные исследования показали, что на выходе из соплового тракта, помимо быстрых акустических волн, распространяющихся вдоль оси соплового тракта, присутствуют медленные акустические волны с меньшей амплитудой и ненулевым углом распространения. Полученные расчётные данные согласуются с результатами экспериментальных исследований.

В работе также проведено расчётно-экспериментальное исследование развития возмущений в гиперзвуковом ( $M_\infty=6-14$ ) вязком ударном слое на пластине, обтекаемой потоками воздуха и/или углекислого газа при высоких температурах торможения (2000–3000 К) с использованием данных о модовом составе возмущений в потоке. Данные исследования необходимы для создания методик и устройств модовой декомпозиции возмущений в импульсных аэродинамических трубах.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ (Договор № 14.Z50.31.0019) для поддержки исследований под руководством ведущих ученых.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цырюльников И. С., Маслов А. А., Миронов С. Г., Поплавская Т. В., Кириловский С. В. *Об эффективности метода звукопоглощающих покрытий в колебательно возбужденном гиперзвуковом потоке*. Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. Вып. 4. С. 61–67.

# ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ СЛОЯ СМЕШЕНИЯ В ТЕЧЕНИИ ХЕЛЕ-ШОУ

П. В. Ковтуненко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет

Рассматривается нелинейная гиперболическая система уравнений, описывающая течение неоднородной слабосжимаемой жидкости в ячейке Хеле-Шоу [1]

$$\begin{aligned}(\rho u)_t + (\beta \rho u^2 + p)_x + (\beta \rho uv)_y &= -\mu u, \\(\rho v)_t + (\beta \rho uv)_x + (\beta \rho v^2 + p)_y &= -\mu v, \\ \rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y &= 0, \\(\rho c)_t + (u\rho c)_x + (v\rho c)_y &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $u$ ,  $v$ ,  $p$  и  $\rho$  — компоненты вектора скорости, давление и плотность жидкости. Зависимость  $p = p(\rho)$  считается заданной, коэффициент  $\beta$  равен  $6/5$ . Концентрация  $c$ , принимающая значения от нуля до единицы, характеризует вязкость жидкости  $\mu = \mu(c)$ . Основное внимание уделяется исследованию развития слоя смешения на границе двух слоев жидкостей различных вязкостей  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , движущихся вдоль оси  $Ox$  с различными скоростями. Слоистые течения жидкости в рамках модели (1) рассматривались в [1, 2], но вопрос о моделировании слоя смешения не обсуждался. Для построения одномерной математической модели эволюции слоя смешения использован предложенный в [3] подход, основанный на теории мелкой воды с массообменом. Вывод модели в длинноволновом приближении основан на трехслойной схеме течения, в которой предполагается существование промежуточного слоя смешения, зажато между двумя слоями, в которых компонента скорости  $u$  не зависит от переменной  $y$ . Для осредненного описания течения в этом слое используется дополнительная переменная, характеризующая “сдвиговую” скорость. Построены стационарные решения и исследована их структура, а также изучена начальная асимптотика слоя смешения. Численно получены решения нестационарных уравнений, определяющих толщину зоны интенсивного перемешивания. Верификация одномерной модели проведена на основе прямого численного моделирования с использованием двумерных уравнений (1). Проведенное сравнение показывает, что одномерная модель позволяет достаточно точно определить границы области перемешивания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 15-11-20013).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Chesnokov A. A., Liapidevskii V. Yu. *Viscosity-stratified flow in a Hele–Shaw cell*. Arxiv.org/abs/1501.00366.
2. Chesnokov A. A., Stepanova I. V. *Stability analysis of shear flows in a Hele–Shaw cell*. Appl. Math. Comput. 2015. V. 265. P. 320–328.
3. Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А. *Слой смешения под свободной поверхностью*. ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 127–140.



## ГОРЕНИЕ ИСТЕКАЮЩЕЙ В ВОЗДУХ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ МИКРОСТРУИ ВОДОРОДА

*В. В. Козлов<sup>1</sup>, Г. Р. Грек<sup>1</sup>, О. П. Коробейничев<sup>2</sup>, Ю. А. Литвиненко<sup>1</sup>, А. Г. Шмаков<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Институт химической кинетики и горения им. В. В. Воеводского СО РАН,  
Новосибирск*

В работе представлены результаты экспериментальных исследований режимов горения и структуры диффузионного пламени водорода, образующегося при истечении с высокой скоростью водорода в воздух через круглые и плоские отверстия различных диаметров. Найден диапазон скоростей истечения водородной струи и размер сопловых отверстий, при котором пламя разделяется на две зоны: с ламинарным и турбулентным течениями. Зона с ламинарным течением является стабилизатором горения всего пламени в целом, а в зоне с турбулентным течением происходит интенсивное смешение горючего с окислителем. Горение в этих двух зонах может происходить независимо друг от друга, но наиболее устойчивый режим наблюдается только при существовании пламени в зоне с ламинарным течением. Полученные знания позволяют более глубоко понять особенности режимов микроструйного горения водорода, перспективного для различных горелочных устройств.

## ДВИЖЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ПОД СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

*В. К. Костиков, Н. И. Макаренко*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет*

Рассматривается задача о генерации нелинейных нестационарных волн на поверхности глубокой идеальной жидкости погруженным эллиптическим цилиндром. Предполагается, что цилиндр может совершать как поступательное, так и вращательное движение вокруг своей оси. Используется метод сведения исходной постановки к системе интегро-дифференциальных уравнений для функции, задающей возвышение свободной поверхности, а также нормальной и тангенциальной компонент вектора скорости на свободной поверхности. Ранее этот подход применялся авторами в задаче о поступательном движении погруженного тела [1, 2]. В данной работе построена начальная по времени асимптотика решения для случая поступательно-вращательного движения цилиндра из состояния покоя. С помощью разложения по малому параметру, характеризующему заглубление тела, для главных членов асимптотики получены явные формулы, описывающие различные режимы взаимодействия цилиндра со свободной поверхностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-01-03942).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Макаренко Н. И., Костиков В. К. *Неустановившееся движение эллиптического цилиндра под свободной поверхностью*. ПМТФ. 2013. Т. 54. № 3. С. 30–41.
2. Makarenko N. I., Kostikov V. K. *Non-linear water waves generated by impulsive motion of submerged obstacle*. Natural Hazards and Earth System Sciences. 2014. V. 14. № 4. P. 751–756.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ “ОБЪЕМНЫХ” ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛАХ В УСЛОВИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ ПРЕГРАДЫ ИЗ МОНОКРИСТАЛЛА ЦИНКА

М. Н. Кривошеина<sup>1</sup>, С. В. Кобенко<sup>2</sup>, М. А. Козлова<sup>1</sup>, Е. В. Туч<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

<sup>2</sup>Нижевартовский государственный университет

В анизотропных материалах из-за различных механических свойств скорости распространения продольных, поперечных и “объемных” волн будут зависеть от направления даже для случаев их распространения в направлении осей симметрии материала. В иных направлениях возможны распространения только квазипродольных и квазипоперечных волн. Распространение “объемных” скоростей звука в условиях динамических нагружений материалов определяет скорости распространения возмущений в пластической области деформации материала. Второй важной причиной более точного определения скоростей распространения “объемных” волн является связь анизотропии сжимаемости материала с “анизотропным” гидростатическим напряжением. В случае применения к сферическому телу из ортотропного или транстропного материалов условия равномерного сжатия (статического или импульса сжатия) внутренние напряжения будут ничем иным, как “анизотропным” гидростатическим напряжением. “Анизотропия” гидростатического напряжения определяется различными механическими свойствами материала во взаимноперпендикулярных направлениях. В рамках уравнений механики сплошной среды проведено численное моделирование в трехмерной постановке ударного нагружения пластин из монокристалла цинка с применением математической модели, позволяющей учитывать “анизотропное” гидростатическое напряжение. Это позволило учесть анизотропию сжимаемости и, как следствие, различные скорости распространения “объемных” волн в транстропном материале преграды на примере монокристалла цинка. С помощью численного моделирования были получены результаты, демонстрирующие отличия в скоростях распространения волн в монокристалле цинка для случаев допущения об объемной транстропии цинка и объемной изотропии. Полученные профили скоростей со свободных поверхностей пластин из монокристалла цинка во взаимноперпендикулярных направлениях для случая модели с “анизотропным” гидростатическим напряжением соответствуют значениям скоростей “объемных” волн 2741,7483 м/с и 3382,909 м/с.

Для случая модели с изотропным гидростатическим напряжением скорости “объемных” волн одинаковы во всех направлениях и составляли 3183,57 м/с. Представлены профили скоростей свободных поверхностей преград из монокристаллов цинка по обеим математическим моделям, сравнение с результатами натуральных экспериментов других авторов.

Работа выполнена в рамках фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПРИДОННЫХ ЧАСТЯХ ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ ТИПА ТОРНАДО

*И. Ю. Крутова<sup>1</sup>, А. О. Казачинский<sup>2</sup>, О. В. Опрышко<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета МИФИ, Снежинск*

<sup>2</sup>*Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург*

Математически моделируются трехмерные стационарные и нестационарные течения идеального политропного газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса. Для системы уравнений газовой динамики поставлена начально-краевая задача, решение которой описывает течение, возникающее при плавном стоке газа через поверхность вертикального цилиндра заданного ненулевого радиуса в окрестности непроницаемой плоскости  $z = 0$ . Доказано, что данная задача является характеристической задачей Коши стандартного вида, и поэтому при условии аналитичности входных данных у нее существует единственное аналитическое решение. Анализ первых коэффициентов ряда по степеням  $z$  показал, что при начале радиального стока внутрь цилиндра сразу возникает окружное движение газа, закрученное в Северном полушарии в положительном направлении и в отрицательном направлении для случая Южного полушария. Установленные факты являются математическим обоснованием результатов соответствующих экспериментов в части возникновения закрутки и направления этой закрутки. Начальный отрезок ряда, задающий это аналитическое решение, используется для моделирования трехмерных стационарных и нестационарных придонных течений таких природных вихрей, как торнадо и тропические циклоны. Коэффициенты начальных отрезков рядов в нестационарном случае численно строятся при решении соответствующих систем гиперболического типа. Приведены результаты расчетов газодинамических параметров и их сравнения с данными натуральных наблюдений за торнадо различных классов и среднего по своим характеристикам тропического циклона.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С. П. *Торнадо и сила Кориолиса*. Новосибирск: Наука, 2008.
2. Баутин С. П., Обухов А. Г. *Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей*. Новосибирск: Наука, 2012.

3. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Обухов А. Г. *Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты*. Новосибирск: Наука, 2013.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, ЭВОЛЮЦИИ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАЛАКТИК В КОСМОЛОГИЧЕСКОМ КОНТЕКСТЕ

*И. М. Куликов<sup>1</sup>, И. Г. Черных<sup>1</sup>, В. А. Протасов<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный технический университет*

В докладе будут представлены результаты математического моделирования образования, эволюции и взаимодействия галактик в космологическом контексте в рамках многофазной гидродинамической модели. В докладе будет подробно описана математическая модель задачи космологического моделирования, численные методы решения гиперболических уравнений и краткое описание параллельной реализации в виде программного комплекса CosmoPhi. Будут приведены результаты вычислительных экспериментов по крупномасштабному космологическому моделированию.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 15-31-20150 мол-а-вед, 15-01-00508), гранта Президента РФ МК — 6648.2015.9.

## О ПРИМЕНЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ РАЗВИТИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ НА СТАЦИОНАРНОМ ОДНОМЕРНОМ СЛАБОНЕОДНОРОДНОМ ФОНЕ

*А. Г. Куликовский*

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва*

Рассматривается задача о развитии возмущений, представляемых в виде интегралов Фурье, к которым применяется метод перевала. Показано, что применение к исследованию асимптотики комплексных уравнение Гамильтона дает результаты, согласующиеся с методом перевала.

## ЯВЛЕНИЕ ГИСТЕРЕЗИСА ЗВУКОВОЙ ЛИНИИ

К. К. Курмаева<sup>1</sup>, С. С. Титов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

<sup>2</sup>Уральский государственный архитектурно-художественный университет, Екатеринбург

Одним из актуальных вопросов современной газовой динамики является изучение явления гистерезиса в различных течениях газа. В работе рассмотрена нестационарная трансзвуковая модель Линя — Рейсснера — Цзяня [1, 2] для потенциала  $u(x, y, t)$

$$u_{yy} = u_x u_{xx} + 2u_{xt}. \quad (1)$$

Свойства линии перехода через скорость звука анализируются с точки зрения явления гистерезиса с помощью аналитического решения уравнения (1)

$$u(x, y, t) = a(x, t) + b(x, t)y^2 + c(x, t)y^4 + d(x, t)y^6 + \dots$$

Установлено, что уравнение звуковой линии

$$u_x(x, 0, t) = a_x(x, t) = 0,$$

где

$$a_{xt}(x, t) = v_0 + (1 + t^2)^{-1} + (\arctan t + \pi)e^x,$$

имеет разные решения при противоположных значениях временной переменной  $t$ ,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{x_0(t)} = -\frac{2v_0}{\pi}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{x_0(t)} = -\frac{2v_0}{3\pi}.$$

На основании полученных аналитических расчетов делается вывод о том, что звуковая линия через скорость звука не возвращается в исходное положение при возврате условий в набегающем потоке к первоначальным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00401).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Lin C., Reissner E., Tsein H. *On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid*. J. Mathematics and Physics. 1948. V. XXVII. № 3.
2. Курмаева К. В., Титов С. С. *Аналитическое построение ближнего поля трансзвукового течения около тонкого тела вращения*. Сиб. журн. индустр. матем. 2005. Т. 8. № 3 (23). С. 93–101.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ТГХВ БС

*Г. Г. Лазарева<sup>1,2</sup>, Е. А. Федоров<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет*

В работе представлены математическая модель и результаты моделирования комплексного воздействия с применением технологии термогазохимического воздействия бинарными составами (ТГХВ БС) на скважинах. Суть моделируемой технологии заключается в закачке в скважину по затрубному пространству (без извлечения насосного оборудования) растворов энерговыделяющего состава и инициатора разложения. В результате термохимической реакции в скважине в удаленной от забоя зоне продуктивного пласта при избыточном давлении выделяется большое количество газов (азот, пары воды) и создается высокотемпературная область разложения бинарного состава (до 300–320°C).

Целью работы является разработка быстродействующего пакета программ для оценки результатов натуральных испытаний на основе реальных параметров пласта и закачиваемых реагентов. Для возможности обоснования параметров ведущихся промышленных испытаний разработаны математическая модель и расчетный модуль для выполнения расчетов технологическими службами сервисного предприятия. Алгоритм расчета параметров ведущихся натуральных испытаний состоит из определения координат зоны реакции и расчета распространения температурного поля и поля давления в пласте. Рассматривается радиальное и планарное распространение реагентов в пористой среде. Решаются уравнения теплопроводности и пьезопроводности с учетом переменных коэффициентов.

В настоящее время рассматриваемая модель является рабочим инструментом для моделирования работ по ТГХВ БС. Используя представленную математическую модель, специалисты ООО «ЦНТ» провели предварительные расчеты и провели натурные испытания на Усинском месторождении. В докладе представлены результаты численных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке ООО «Центр нефтяных технологий» (г. Москва) и Программы РАН № 8 «Математическое моделирование многомерных задач сейсмологии и сейсморазведки на многопроцессорных ЭВМ».

## АВТОВОЛНЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ВЫСОКОХРОМИСТОЙ СТАЛИ В ПРИСУТСТВИИ ВОДОРОДОСОДЕРЖАЩЕЙ СРЕДЫ

Ю. В. Ли<sup>1</sup>, С. А. Баранникова<sup>1,2,3</sup>, А. В. Бочкарева<sup>1</sup>, А. Г. Лунёв<sup>1</sup>, Л. Б. Зуев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет

<sup>3</sup>Томский государственный архитектурно-строительный университет

К настоящему времени известно, что пластическая деформация различных металлов и сплавов протекает локализованно от предела текучести и вплоть до разрушения. Число форм локализации не превышает четырех, а реализация каждой из них возможна только на определенных стадиях деформационного упрочнения. Для каждой из картин локализации можно определить длину волны  $\lambda$ , пространственный период  $T$ , а, следовательно, скорость распространения  $V_{aw}$  и частоту  $\omega = 2\pi \cdot V_{aw}/\lambda$  [1]. Природа локализации пластической деформации имеет автоволновой характер и является результатом самоорганизации дефектов в деформирующих средах, что подтверждается анализом дисперсионного соотношения автоволн.

Исследование характера локализации пластической деформации высокохромистой стали 4013 при активном одноосном растяжении плоских образцов со скоростью  $6,67 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  (LFM-125, Швейцария) методом двухэкспозиционной спеклинтерферометрии с использованием автоматизированного комплекса ALMEC (ИФПМ СО РАН, Россия) позволило установить, что на стадии линейного упрочнения, когда коэффициент деформационного упрочнения  $\theta = \text{const}$ , формируется бегущая автоволна с характерной скоростью  $V_{aw} = (4,87 \pm 0,87) \times 10^{-5} \text{ м/с}$  и пространственным периодом  $\lambda = 6,8 \pm 1,5 \text{ мм}$ .

Известно, что высокохромистые нержавеющие стали наряду с высокой коррозионной стойкостью обладают оптимальным соотношением прочности и пластичности, что обуславливает их широко применение в ответственных конструкциях, которые эксплуатируются в присутствии агрессивных сред, в том числе водорода. Насыщение исследуемых образцов водородом осуществлялось электролитическим методом в трехэлектродной электрохимической ячейке при постоянном катодном потенциале  $U = -600 \text{ мВ}$ , задаваемом относительно хлор-серебряного электрода сравнения [2] в 1N растворе серной кислоты с добавлением тиомочевины с концентрацией 20 мг/л при температуре  $T=323 \text{ К}$  в течение 12 часов. Концентрацию водорода в образце определяли использованием анализатора RHEN 602 и она составила 31 ppm.

Исследование автоволновых параметров деформируемых образцов стали после электролитического наводороживания показало, что при незначительном снижении ( $\approx 10\%$ ) значения скорости распространения автоволн на стадии линейного упрочнения, пространственный период  $\lambda$  после электролитического наводороживания уменьшился более, чем на 30% и составил  $4,6 \pm 0,5 \text{ мм}$ . Использование метода двойного  $t$ -критерия в качестве стандартного метода статистической обработки экспериментальных данных подтвердил значимость полученных результатов. Таким образом, водород значительно усиливает неоднородность пластической деформации и изменяет количественные параметры макролокализации пластической деформации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-08-00385).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зуев Л. Б., Данилов В. И., Баранникова С. А. *Физика макролокализации пластического течения*. Новосибирск: Наука, 2008.
2. Barannikova S. A., Lunev A. G., Nadezhkin M. V., Zuev L. B. *Effect of hydrogen on plastic strain localization of construction steels*. Adv. Mater. Res. 2014. V. 880. P. 42–47.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОНУСА

*И. И. Липатов*

*Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского, Москва*

Рассматривается обтекание острого конуса высокоскоростным потоком газа при нулевом угле атаки. Предполагается, что реализуется режим слабого гиперзвукового взаимодействия. Предполагается также, что конус вращается относительно оси симметрии. Система уравнений пограничного слоя содержит дополнительные члены, связанные с центробежными силами и силами Кориолиса. Решение этих уравнений для ламинарного режима получено численно, в результате получены профили компонент вектора скорости и полной энтальпии. Для определения скорости распространения возмущений вверх по потоку в пограничном слое использовано обобщенное представление интеграла Пирсона. Численно получены величины скорости распространения возмущений как функции скорости вращения конуса, температурного фактора и других параметров.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПСЕВДОСКАЧКА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

*И. И. Липатов<sup>1</sup>, В. Ю. Ляпидевский<sup>2,3</sup>, А. А. Чесноков<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup>Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского, Москва

<sup>2</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>3</sup>Новосибирский государственный университет

Сложная газодинамическая структура, называемая псевдоскачком, реализуется в длинных каналах при торможении сверхзвукового потока. В стационарном сверхзвуковом течении газа при взаимодействии с пограничным слоем развиваются нестационарные процессы, влияющие на структуру потока. Обзор теоретических и экспериментальных результатов представлен в [1]. Математические модели псевдоскачка



предполагают, как правило, стационарный или квазистационарный режим течения в зоне перехода от сверхзвукового к дозвуковому течению за счет развития турбулентного пограничного слоя. При этом остается открытым вопрос о том, какие условия вниз по потоку контролируют положение скачка, как реализуется механизм передачи возмущений вверх по потоку в течениях со сверхзвуковым “ядром”. Эксперименты показывают, что введение различных возмущений в поток за псевдоскачком (сужение канала, приток массы или энергии) приводит к перемещению псевдоскачка вверх по потоку. Периодическое воздействие на поток может вызвать вынужденные колебания псевдоскачка вокруг нового квазистационарного положения.

В недавней работе [2] предложена одна из возможных моделей, позволяющая определить качественные и количественные характеристики вынужденных колебаний псевдоскачка при периодическом воздействии на поток в выходной части канала. В рамках двухслойной схемы течения (потенциальное сверхзвуковое ядро и турбулентный пограничный слой) построена математическая модель нестационарного псевдоскачка в плоском канале, описывающая непрерывный переход от сверхзвукового к дозвуковому течению. Уравнения движения представляются в виде системы из пяти законов сохранения с правой частью. Проанализирована структура стационарных решений и найдены течения перед препятствием. На основе численного моделирования представлена эволюция псевдоскачка и выполнено сравнение с известными экспериментальными данными. Дальнейшее развитие модели [2] заключается в учете косых скачков уплотнения, реализуемых в псевдоскачке. Предлагается модификация двухслойной схемы течения, включающей в рассмотрение ударные волны. Проведена верификация новой одномерной модели путем сравнения ее автомодельных решений с результатами численного моделирования на основе двумерных уравнений. Показано, что предложенная модель позволяет правильно определить основные параметры потока и описать структуру косых скачков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00156).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гуськов О. В., Копченков В. И., Липатов И. И., Острась В. Н., Старухин В. П. *Процессы торможения сверхзвуковых течений в каналах*. М.: Физматлит, 2008.
2. Липатов И. И., Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А. *Модель нестационарного псевдоскачка в баротропном течении газа*. ДАН. 2016. Т. 466. № 6.

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ МАСКИРОВКИ ДЛЯ 2D-МОДЕЛИ РАССЕЯНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ РЕМС-СЛОЯ

А. В. Лобанов

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток  
ФГБОУ ВПО “Дальрыбвтуз”, Владивосток*

В настоящее время проблема разработки дизайна устройств, служащих для маскировки материальных тел, является актуальной темой многочисленных исследований. Началу исследований в области маскировки материальных тел послужила публикация статей [1, 2]. Отметим также работы [3, 4, 5], посвященные применению методов оптимизации для решения задач маскировки. Однако полученные решения задач маскировки обладают рядом недостатков, главным из которых является трудность технической реализации. Чтобы упростить проблему технической реализации полученных решений, задачу построения точной маскировочной оболочки часто заменяют приближенной задачей построения слабо рассеивающей оболочки.

В докладе рассматривается задача маскировки, включающая идеальный электромагнитный проводник (РЕМС-материал) для модели акустического рассеяния, описываемой 2D уравнением Гельмгольца. Доказывается ее разрешимость и выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума. На основе ее анализа автором был разработан и реализован в виде программного кода численный алгоритм, основанный на использовании метода сингулярного разложения. Указанный алгоритм применяется для численного моделирования маскировочных свойств оболочки. Одной из основных целей является исследование зависимостей решения от параметра полной проводимости (адмиттанса), размеров оболочки, частоты падающей волны и ряда других параметров, входящих в рассматриваемую задачу, а также минимизация рассеянных полей от цилиндрической маскирующей оболочки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-11-00079).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Долин Л. С. *О возможности сопоставления трехмерных электромагнитных систем с неоднородным анизотропным заполнителем*. Изв. Вуз. Радиофизика. 1961. Т. 4. № 4. С. 964–967.
2. Pendry J. B., Shurig D. R. *Controlling electromagnetic fields*. Science. 2006. V. 312. №. 5781. P. 1780–1782.
3. Алексеев Г. В., Лобанов А. В. *Оценки устойчивости решений обратных экстремальных задач для уравнения Гельмгольца*. Сиб. Журн. Индустр. Матем. 2013. Т. 16. № 2. С. 14–25.
4. Alekseev G. V. *Cloaking via impedance boundary condition for 2-D Helmholtz equation*. Appl. Anal. 2014. V. 93. P. 254–268.
5. Алексеев Г. В., Левин В. А. *Оптимизационный метод отыскания параметров неоднородной жидкой среды в задаче маскировки материальных тел от акустической локации*. ДАН. 2014. Т. 454. № 4. С. 406–410.

## СТРУКТУРА КАТЯЩИХСЯ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОМ ТЕЧЕНИИ ХЕЛЕ-ШОУ

*В. Ю. Ляпидевский<sup>1,2</sup>, И. В. Степанова<sup>2,3</sup>, А. А. Чесноков<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет*

<sup>3</sup>*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

Широкий класс течений неоднородных жидкостей в длинных каналах допускает возникновение нелинейного режима, соответствующего катящимся волнам (квазипериодическое течение, в котором плавные участки разделены обрушивающимися гидравлическими прыжками). Особенностью таких течений является переход от докритического режима к сверхкритическому в системе координат, движущейся вместе с волной. Несмотря на длинную историю исследования катящихся волн, остается множество открытых вопросов, в частности, вопрос о возникновении и развитии катящихся волн из малых возмущений границы раздела двухслойной жидкости в каналах под крышкой. Поскольку катящиеся волны существенно меняют устойчивый стационарный режим течения, то их исследование представляет практический интерес. Различные теоретические и экспериментальные аспекты изучения катящихся волн в жидкостях и газожидкостных средах рассматриваются в монографии [1].

В недавней работе [2] предложена модель, описывающая движение неоднородной несжимаемой вязкой жидкости в ячейке Хеле-Шоу, а также рассмотрены более простые подмодели слоистого течения. В настоящей работе основное внимание уделяется исследованию уравнений двухслойного течения жидкости и моделированию катящихся волн. Выполнен анализ устойчивости двухслойных течений Хеле-Шоу по линейному приближению. Построены решения в виде нормальных мод и исследовано дисперсионное уравнение. Для нелинейной системы найдены характеристики и сформулированы условия Уизема существования катящихся волн. При фиксированном расходе жидкости и заданных отношениях плотностей и вязкостей определены области устойчивости и неустойчивости течения в зависимости от толщины нижнего слоя. Показано соответствие линейного анализа и критерия Уизема. Выполнено численное моделирование процесса развития возмущений на границе раздела двух слоев на основе TVD схемы повышенного порядка аппроксимации. Установлено, что в зависимости от параметров задачи катящиеся волны распространяются вверх или вниз по потоку. При этом длина волн зависит от частоты генерирующих их возмущений на входном сечении канала. Проведено сравнение условий нарушения устойчивости стационарного течения с результатами численного расчета.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 15-11-20013).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
2. Chesnokov A. A., Stepanova I. V. *Stability analysis of shear flows in a Hele-Shaw cell*. Appl. Math. Comput. 2015. V. 265. P. 320–328.

# ЛАГРАНЖЕВ ПОДХОД ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ ПОТОКОВ В СКВАЖИНЕ

В. Ю. Ляпидевский<sup>1</sup>, В. С. Тихонов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Везерфорд, Москва

Одной из наиболее прогрессивных технологий бурения скважин в сложных гидрогеологических условиях является бурение с управлением давлением (Managed Pressure Drilling). Практически управление давлением осуществляется путем приложения противодействия в затрубном пространстве на выходе бурового раствора на поверхность. Проблему представляет внезапный выброс газа из породы в процессе бурения. Эффективным способом оценки эволюции объема газа, попавшего в скважину, по мере его подъема потоком жидкости на поверхность, и оценки мощности выброса является математическое моделирование. Среди моделей газожидкостных потоков наибольшее распространение получила модель приведенной скорости дрейфа (Drift-Flux Model), известная более полувека. Она пригодна для описания различных режимов течения потока (пузырькового, снарядного и т.д.). Однако для расчета подъема потока смеси с большой глубины применение этой модели ограничено необходимостью выбора “достаточно” малого шага интегрирования по времени. Это связано с существенным различием между высокой скоростью распространения возмущений в слабосжимаемой жидкости и низкой характерной скоростью подъема газовой фазы в пузырьковом или снарядном режимах. В работе предлагается лагранжев метод описания эволюции конечного объема газовой фазы, помещенного в вертикальную трубу или кольцевой канал (gas kick), при течении жидкости с заданным расходом. В отличие от [1], переход к лагранжевой координате, связанной с массовой газовой фазой, позволяет учесть зависимость коэффициентов проскальзывания (коэффициентов модели Zuber-Findlay), определяющих относительное движение фаз в модели, от объемной концентрации газовой фазы [2]. Предложен численный метод, позволяющий вычислять внутренние контактные разрывы, связанные с подъемом газовой фазы. Использование уточненной зависимости для коэффициентов проскальзывания, лагранжевых координат и явной схемы интегрирования позволило повысить точность модели и существенно ускорить расчет процесса. Приведены тестовые и верификационные расчеты, демонстрирующие эффективность данного метода в задачах о распаде разрыва и о гидравлическом ударе в газожидкостной смеси. Представлены примеры расчета переходных процессов, характеризующих изменение размера газожидкостной области и скорости ее подъема, а также давления в затрубном пространстве скважины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gavriluk S. L., Fabre J. *Lagrangian coordinates for a drift-flux model of a gas-liquid mixture*. Int. J. Multiphase Flow. 1996. V. 22. №. 3. P. 453–460.
2. Varadarajan P. A., Hammond P. S. *Numerical scheme for accurately capturing gas migration described by 1D multiphase drift flux model*. Int. J. Multiphase Flow. 2015. V. 73. P. 57–70.

## СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ И ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В ЗАПАДНОЙ АТЛАНТИКЕ

Н. И. Макаренко<sup>1,2</sup>, Е. Г. Морозов<sup>3</sup>, Р. Ю. Тараканов<sup>3</sup>, К. С. Григоренко<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>3</sup>Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва

<sup>4</sup>Институт аридных зон ЮНЦ РАН, Ростов-на-Дону

В докладе обсуждаются результаты исследований придонных и приповерхностных течений в западной части Атлантического океана, выполненных в ходе недавних экспедиций научно-исследовательского судна “Академик Сергей Вавилов”. Часть из этих результатов связана с натурными измерениями и моделированием структуры глубоководных течений в разломах Северо-Атлантического хребта [1, 2]. Другая часть работы касается изучения кинематических характеристик внутренних волн, рассматриваемых в контексте временной и пространственной изменчивости термохалинной стратификации на исследуемых полигонах. Кроме того, анализируются результаты гидроакустического зондирования приповерхностных стратифицированных течений в этих районах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 14-08-00107, 15-01-03942, 15-08-10144, 15-31-51269).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов Е. Г., Тараканов Р. Ю., Макаренко Н. И. *Потоки Антарктической донной воды через разломы южной части Северо-Атлантического хребта*. Океанология. 2015. Т. 55, № 6. С. 883–887.
2. Ляпидевский В. Ю., Макаренко Н. И., Морозов Е. Г., Тараканов Р. Ю. *Гидродинамика течений в глубоководных каньонах*. Уч. Зап. Казанского ун-та. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 157, кн. 3. С. 64–71.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕДЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ — АВТОВОЛН НЕУПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ

П. В. Макаров<sup>1</sup>, А. Ю. Перышкин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет

<sup>2</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН

Термин “медленные движения” пришел из геодинамики и отражает деформационные процессы в геосредах, параметры которых можно связать с понятием “волна”. Скорости распространения подобных медленных деформационных волн на 4–7 порядков ниже скоростей продольных и поперечных волн в среде и на 7–8 порядков выше скоростей тектонических течений в геосредах, которые определяются как по

геологическим данным, так и регистрируются данными GPS измерений и составляют от нескольких миллиметров в год до нескольких сантиметров в год. В геосредах наблюдаются и более быстрые процессы, трактуемые как волновые, скорости которых варьируются от нескольких километров в сутки до нескольких километров в час ([1]–[2]). Генерация этих медленных деформационных волн связывается с интенсивными локальными движениями в зонах разломов разных масштабов, которые имеют пульсационный короткопериодический характер [3]. Сгенерированные такими суперинтенсивными локальными деформациями деформационные возмущения тракуются как автоволны [3]. В работе представлена феноменологическая математическая модель формирования и распространения таких медленных деформационных волн. Модель основана на комбинировании подходов механики сплошных сред (численное решение уравнений МДТТ) и дискретного метода клеточных автоматов. Каждая расчётная ячейка (частица) сплошной среды рассматривается как бистабильный клеточный автомат, состояние которого (упругое или пластичное) зависит не только от пороговых значений напряжений в данной частице, но и от состояний в соседних частицах. Этот подход позволил описать процессы формирования и распространения деформационных фронтов как процессов самоорганизации. Выполнены расчёты по формированию и распространению фронтов пластической деформации Людерса в металлах и фронтов неупругой деформации в образцах горных пород и в геосредах. Как и в соответствующих экспериментах, скорости распространения деформационных фронтов оказались пропорциональны скорости нагружения.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственной академии наук на 2013–2020 годы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Быков В. Г. *Деформационные волны Земли: концепция, наблюдения и модели*. Геология и геофизика. 2005. Т. 46. № 11. С. 1176–1190.
2. Гольдин С. В., Юшин В. И., Ружич В. В., Смекалкин О. П. *Медленные движения миф или реальность?* Физические основы прогнозирования разрушения горных пород: Материалы IX Межд. школы-семинара, Красноярск, 2002. Новосибирск: Акад. изд-во “Гео”. 2002. С. 213–220.
3. Кузьмин Ю. О. *Деформационные автоволны в разломных зонах*. Физика Земли. 2012. № 1. С. 3–19.

## СИНХРОНИЗАЦИЯ БЕГУЩИХ ВОЛН В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К РАСПАВШИМСЯ

*Э. В. Макридин, Н. И. Макаренко*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет*

Рассматривается задача о бифуркациях решений типа бегущих волн при малых возмущениях нелинейных систем с дисперсией. Данная задача по своей постановке родственна задаче о возмущениях периодических решений гамильтоновых систем теории нелинейных колебаний [1, 2]. В работе [3] при помощи метода Ляпунова — Шмидта изучалось ветвление решений типа уединенных волн для системы слабо связанных уравнений Кортевега — де Фриза. Бифуркационным параметром в этой системе служит фазовый сдвиг волны, а достаточным условием ветвления решений является наличие простых корней некоторого функционала типа функции Понтрягина [1]. Устойчивость подобных решений, описывающих перескакивание (“leapfrogging”) уединенных волн в двухмодовой системе, изучалась в работе [4].

В докладе рассматривается задача о бифуркациях бегущих кноидальных волн. Основное внимание уделяется анализу механизма редукции системы уравнений разветвления Ляпунова — Шмидта, который является ключевым моментом при построении ответвляющихся решений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С. *О динамических системах, близких к гамильтоновым*. ЖЭТФ. 1934. Т. 4. № 9. С. 883–885.
2. Малкин И. Г. *Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний*. М.: Едиториал УРСС, 2004.
3. Макаренко Н. И. *О ветвлении решений инвариантных вариационных уравнений*. ДАН. 1996. Т. 348. № 3. С. 302–304.
4. Wright J. D., Scheel A. *Solitary waves and their linear stability in weakly coupled KdV*. IMA Preprint, 2006.

## СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ НАД СЛОЖНЫМ РЕЛЬЕФОМ

*Ж. Л. Мальцева, Н. И. Макаренко, А. А. Черевко*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет*

Рассматривается задача о стационарных волновых структурах в течениях неоднородной жидкости над неровным дном. Предметом изучения является свойство фрагментации волновых полей, возникающей в результате волновой анизотропии неоднородной среды и интерференции внутренних волн [1, 2]. Образование локальных зон концентрации волновой энергии способствует более интенсивному перемешиванию расслоенной среды в этих областях в результате обрушения волн. Математическая формулировка данной задачи предполагает построение и анализ асимптотических решений нелинейных уравнений Эйлера, описывающих течения в слое конечной толщины с криволинейной границей и соответствующими условиями излучения вверх и вниз по потоку. Проведенные расчеты показывают, что рассматриваемая полуаналитическая модель адекватно описывает фрагментированную структуру потока над сложным рельефом дна. В частности, она хорошо воспроизводит доминирование гидростатической моды в придонном слое и предсказывает формирование затопленных струй, локализованных над наиболее высокими порогами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-01-03942).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Makarenko N. I., Maltseva J. L. *Interference of lee waves over mountain ranges*. Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2011. V. 11. P. 27–32.
2. Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л. *Стационарные волны в стратифицированном течении над комбинированным препятствием*. ПМТФ. 2014. Т. 55. № 2. С. 141–147.

## МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

*Д. В. Машков*

*Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный  
университет, Владивосток*

В последнее время возрос интерес к исследованию новых классов задач для моделей тепло-массопереноса. Среди теоретических исследований указанных задач для линейных и нелинейных моделей тепло-массопереноса отметим, в частности, работы [1, 2, 3].



В данной работе мы рассмотрим задачу идентификации для линейной стационарной модели конвекции–диффузии, которая описывается следующими соотношениями:

$$-\operatorname{div}(\lambda \nabla T) + u \cdot \nabla T = f \text{ в } \Omega, \quad T|_{\Gamma} = 0, \quad (1)$$

Здесь  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\lambda = \lambda(x) > 0$  — температурный коэффициент проводимости,  $u = u(x)$  — скорость,  $f(x)$  — плотность объемных источников,  $\Gamma$  — граница области  $\Omega$ .

Хорошо известно, что на практике часто возникают такие ситуации, когда один или несколько параметров неизвестны. Эти задачи принадлежат классу обратных задач идентификации неизвестных плотностей источников и коэффициентов, которые входят в используемые модели массопереноса.

Используя метод оптимизации, поставленную задачу можно свести к соответствующей задаче управления. Это позволяет использовать для теоретического исследования обратных экстремальных задач известные методы условной оптимизации (см. [3]). Именно этот метод применяется в данной работе при решении рассматриваемых обратных задач для модели (1). На основе математического аппарата, разработанного в [2, 3], доказываемость разрешимости соответствующих экстремальных задач, выводятся системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума, исследуется единственность и устойчивость оптимальных решений. Развиваются численные алгоритмы решения задач идентификации, обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00365-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. *Экстремальные методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1988.
2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Численные методы решения обратных задач математической физики*. Москва: Эдиториал УРСС, 2004.
3. Алексеев Г. В., Терешко Д. А. *Анализ и оптимизация в задачах гидродинамики вязкой жидкости*. Владивосток: Дальнаука, 2008.

## ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

С. В. Мелешко<sup>1</sup>, Н. П. Мошкин<sup>2,3</sup>, В. В. Пухначев<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Технический университет Суранари, Након-Рагчасима, Тайланд

<sup>2</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>3</sup>Новосибирский государственный университет, Новосибирск

В докладе рассматривается плоское движение несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла в полуплоскости  $y > 0$ , ограниченной твердой непроницаемой стенкой; на ней ставятся условия прилипания. Среда характеризуется постоянным временем

релаксации  $\tau > 0$ , плотностью и вязкостью. В качестве объективной производной в реологическом соотношении выбирается верхняя конвективная производная [1]. Система уравнений движения состоит из шести квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка, имеющих как вещественные, так и комплексные характеристики [2]. Неизвестными функциями являются горизонтальная  $u$  и вертикальная  $v$  компоненты скорости, давление  $p$  и элементы тензора вязкоупругих напряжений

$$S_{xx} = A, S_{xy} = S_{yx} = B, S_{yy} = C.$$

Указанная система допускает двухпараметрическую группу операторов переноса и галилеева переноса по оси  $x$ . Ей соответствует частично инвариантное решение ранга 2 с полем скоростей  $u = xf_y(y, t)$ ,  $v = -f(y, t)$ . Дефект инвариантности этого решения равен пяти.

Полностью описан подкласс решений данного вида, описывающий стационарные движения. Основным здесь является случай, когда функция  $A$  не зависит от  $x$ , функция  $B$  линейна, а функции  $p$  и  $C$  квадратичны по  $x$ . Соответствующее решение описывает течение среды Максвелла вблизи критической точки  $x = y = 0$ . При  $y \rightarrow \infty$  течение сопрягается с потенциальным потоком  $u = kx$ ,  $v = -ky$  ( $k = \text{const} > 0$ ). При  $\tau \rightarrow 0$  решение переходит в классическое решение Хименца [3], описывающее течение вязкой жидкости. Выполнены расчеты полей скорости и напряжений в широком диапазоне значений параметра  $\lambda = k\tau$ . Значение  $\lambda = 1/2$  является особым:  $A \rightarrow \infty$  при  $y \rightarrow \infty$ .

В нестационарной задаче найдены частные решения переопределенной системы уравнений. Наиболее важен случай с указанной выше зависимостью искомых функций от  $x$ . Система определяющих уравнений после перехода к лагранжевым координатам сводится к слабо нелинейной гиперболической системе и квадратуре. Данная система имеет две “звуковые” характеристики, которым соответствуют волны сдвига, и трехкратную траекторную характеристику. Изучены слабые разрывы ее решений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Астарита Дж., Маруччи Дж. *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей*. М.: Мир, 1978.
2. Пухначев В. В. *Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла*. ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 116–126.
3. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. М.: Наука, 1974.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГОВЯЗКОЙ СРЕДЕ МАКСВЕЛЛА

*Л. А. Мержиевский*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

Модель упруговязкой среды Максвелла является одной из наиболее распространенных моделей в динамике реологических сред. Математическое обобщение модели

упруговязкой среды Максвелла на пространственный случай было сделано С.К. Годуновым [1]. Преимуществом данного подхода является то, что он позволяет математически единообразно описывать все состояния среды от упругого до гидродинамического. На основе данного обобщения в работах автора разработана методика построения моделей максвелловского типа для конкретных сред, в рамках которых оказывается возможным сочетать макроскопический подход в формулировке основных уравнений модели с учетом микроструктурных механизмов необратимого деформирования. Уравнения моделей включают законы сохранения массы, импульса и энергии и уравнения эволюции компонент тензора деформаций в дифференциальной форме. Система замыкается уравнением состояния при нешаровом тензоре деформаций и зависимостями для времен релаксации характерных параметров (касательных напряжений, удельного объема, теплового потока и т.д.). Зависимости для времен релаксации строятся на основе физических представлений об эволюции ансамблей дефектов структуры различных масштабных уровней, отвечающих за соответствующий релаксационный процесс.

Для решения конкретных задач ударно-волнового деформирования разработаны варианты методов распада разрывов и расщепления по физическим процессам [2, 3]. С их использованием решен ряд физических задач, моделирующих реальные ударно-волновые процессы в поликристаллических и полимерных средах. Практически во всех случаях полученные решения сравниваются с соответствующими экспериментальными данными. Наблюдается хорошее соответствие расчетных и экспериментальных результатов.

Часть исследований выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12-01-00726, 16-01-00468).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. *Элементы механики сплошной среды*. М.: Наука, 1978.
2. Мержиевский Л. А. *Метод расчета течений вязкоупругой среды*. ДСС. 1980. № 45. С. 141–151.
3. Мержиевский Л. А., Тягельский А. В. *Метод расщепления для решения задач динамического деформирования вязкоупругой среды*. ДСС. 1986. № 75. С. 90–101.

## ЗАДАЧА О ФОРМЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ НАД СИНГУЛЯРНЫМ СТОКОМ

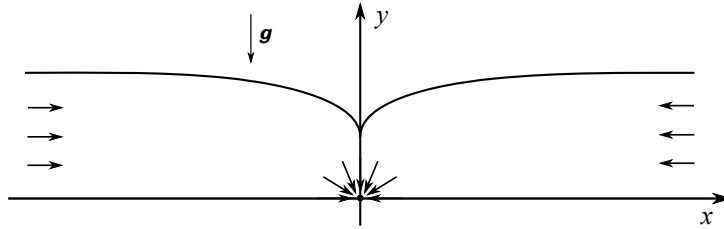
А. А. Местникова<sup>1,2</sup>, В. Н. Старовойтов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет

Рассматривается двумерная задача о потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью сверху и прямолинейным

горизонтальным дном снизу. Нижняя граница предполагается непроницаемой всюду, кроме одной точки, в которой расположен сингулярный точечный сток заданной интенсивности. Верхняя граница является неизвестной и должна быть определена в процессе решения задачи. Эта граница свободна от напряжений (динамическое условие) и вектор поля скорости жидкости направлен по касательной к ней (кинематическое условие). Поле скорости внутри области течения находится из условия, что его потенциал и функция тока являются сопряжёнными гармоническими функциями.



С помощью конформных отображений и обобщенного метода Леви — Чивита выведено уравнение типа Некрасова на единичной окружности. Это уравнение точно описывает форму свободной поверхности. Показано, что для чисел Фруда, превышающих некоторое критическое значение, существует единственное решение задачи. В этом решении поле скорости стремится на бесконечности к скорости равномерного потока. Свободная поверхность монотонно снижается при движении от бесконечных удаленных точек и в точке над стоком образует касп, то есть касательная к ней становится вертикальной.

## ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИЯХ ВОЛН НА ВОДЕ

*В. И. Налимов*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

В задачах о волнах на воде важную роль играет оператор Дирихле — Неймана. Пусть в момент времени  $t$  свободная граница  $\Gamma(t)$  задается уравнением  $y_{n+1} = h(t, y)$  ( $y \in \mathbb{R}^n$ ) и  $J^2 = 1 + |\nabla h|^2$ . Оператор Дирихле — Неймана  $h \mapsto G(h)$  определяется равенством

$$G(h)\varphi = J \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\nu}} \Big|_{\Gamma},$$

где  $\vec{\nu}$  — вектор единичной внешней нормали к  $\Gamma$ ,  $\Phi$  — гармоническая в области течения функция, принимающая значения  $\varphi$  на  $\Gamma$ . Пусть  $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto y_i = \xi_i(t, x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — произвольная параметризация свободной поверхности  $\Gamma$  в момент времени  $t$ . Тогда равенством  $G(\xi)(\varphi \circ \xi) = (G(h)\varphi) \circ \xi$  определен оператор  $\xi \mapsto G(\xi)$ . Пусть, далее,

$$J^2 = \det(\xi'^* \xi'); \quad a = J^2(\xi'^* \xi')^{-1}, \quad \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \vec{e}_{n+1} = J\vec{\nu},$$

и  $\varphi$  — значение потенциала скорости на свободной поверхности после параметризации  $\Gamma$ . Уравнения динамики волн можно записать в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = q + \frac{1}{J} \vec{\nabla} \varphi \cdot \left( \vec{w} - \frac{1}{J} a \vec{\nabla} \varphi \right), \quad \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^n w_i \vec{e}_i + \frac{1}{J^2} G \varphi.$$

Здесь

$$q = \frac{1}{2J^2} ((G\varphi)^2 + a \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \varphi) - g \xi_{n+1},$$

а  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$  — произвольная вектор-функция. Если ввести нормальную  $v = J^{-1} G\varphi$  и касательную  $\vec{u} = J^{-1} \vec{\nabla} \varphi$  компоненты скорости и положить  $q = \frac{1}{2} (v^2 + a \vec{u} \cdot \vec{u}) - g \xi_{n+1}$ , эти уравнения можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (J \vec{u}) = \vec{\nabla} (q + (w - a \vec{u}) \cdot \vec{u}), \quad \frac{\partial}{\partial t} (J v) = -Gq + \operatorname{div}(v(\vec{w} - a \vec{u})),$$

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^n w_i \vec{e}_i + \frac{v}{J} \vec{e}_{n+1}.$$

Вопрос о «наилучшем» выборе векторной функции  $\vec{w}$  открыт. Реальными кажутся две возможности — положить либо  $\vec{w} = \vec{0}$ , либо  $\vec{w} = a \vec{u}$ . В первом случае точки границы  $\Gamma$  движутся по нормали к ней, второй случай соответствует переходу к переменным Лагранжа. Для плоскопараллельных течений уравнения волн на воде в форме Лагранжа выглядят следующим образом:

$$(J \vec{u} \cdot \vec{\tau})_t = q_x, \quad (J \vec{u} \cdot \vec{\nu})_t = -Gq, \quad \vec{\xi}_t = \vec{u}.$$

Здесь  $\vec{u}$  — вектор скорости на  $\Gamma$ ,  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\nu}$  — единичные касательный и нормальный векторы к  $\Gamma$ , а  $q = \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 - g \xi_2$ .

## ТЕЧЕНИЕ МИКРОПОЛЯРНЫХ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ

*В. В. Неверов*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

Современные технологии гидроразрыва пласта требуют изучения переноса вязкопластической жидкостью проппанта в трещине ГРП. В работе исследуется математическая модель [1], которая учитывает не только взаимодействие проппанта с жидкостью, но и взаимодействие частиц проппанта между собой. Модель основана на понятии континуума Коссера, в котором каждая материальная частица трактуется как твердое тело. Наличие спина частиц приводит к тому, что необходимо учитывать еще один тензор скоростей деформаций — градиент спина. Аналитическими методами построены решения для течений между двумя плоскостями, показывающие, что

могут возникать зоны твердотельного течения двух типов: в зоне первого типа обращаются в ноль оба тензора скоростей деформаций, а в зона второго типа обращается в ноль только градиент спина.

Асимптотическими методами исследовано течение под действием градиента давления в ячейке Хеле-Шоу. Получено обобщение закона Дарси, который связывает среднюю по толщине скорость и градиент давления. В этом случае имеет место эффект предельного градиента давления. Учет микровращений приводит к увеличению кажущейся вязкости и величины предельного градиента давления. Результат распространен на случай дилатантных и псевдопластических жидкостей Хершель — Балкли.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. V.V.Shelukhin, M.Ruzicka *On Cosserat — Bingham fluids* Z. Angew. Math. Mech. 2013. V. 93. №. 1. P. 57–72.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОГНЕННЫХ ВИХРЕЙ

А. Г. Обухов<sup>1</sup>, Д. Д. Баранникова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Тюменский государственный нефтегазовый университет

<sup>2</sup>Тюменский государственный университет

В экспериментальной работе [1] была продемонстрирована принципиальная возможность физического моделирования свободных концентрированных огненных вихрей в лабораторных условиях без использования закручивающих устройств.

В работе [2] по численному моделированию тепловых восходящих закрученных потоков была обнаружена особенность поведения движущегося потока газа в начальные моменты формирования восходящего закрученного потока при локальном нагреве нижней плоскости расчетной области. На границе области нагрева возникают встречные потоки, имеющие противоположное направление закрутки.

Данный факт, а также наблюдающиеся в природе огненные вихри послужили толчком для формулировки и решения конкретной начально-краевой задачи. В работе [3] строго математически описано решение системы уравнений газовой динамики, передающее возникновение закрутки газа отрицательного направления в Северном полушарии вблизи плавно нагреваемой поверхности вертикального цилиндра ненулевого радиуса.

В настоящей работе численно моделируется закрученное течение воздуха вокруг плавно нагреваемого цилиндра в условиях действия сил тяжести и Кориолиса. Расчеты проводились в прямоугольном параллелепипеде с квадратным основанием. В качестве начальных условий выбран набор пяти функций [2], являющихся точным решением полной системы уравнений Навье — Стокса при постоянных коэффициентах вязкости и теплопроводности.

На нижней и верхней грани расчетной области были взяты “условия непротекания” (вертикальная составляющая скорости равна нулю), а для всех остальных газодинамических параметров на всех гранях — “условия непрерывности”.

Результаты выполненных расчетов свидетельствуют о сложной структуре возникающего течения, его ярко выраженной нестационарности. Установлено отрицательное направление закрутки течения воздуха, возникшего при нагревании вертикальной цилиндрической области, что соответствует выводам указанных выше работ.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (проект № 3023).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вараксин А. Ю., Ромаш М. Э., Копейцев В. Н. *О возможности генерации концентрированных огненных вихрей без использования принудительной закрутки*. ДАН. 2014. Т. 456. № 2. С. 159–161.
2. Обухов А. Г., Баранникова Д. Д. *Особенности течения газа в начальной стадии формирования теплового восходящего закрученного потока*. Известия вузов. Нефть и газ. 2014. № 6. С. 65–70.
3. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Обухов А. Г. *Закрутка огненного вихря при учете сил тяжести и Кориолиса*. Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53, № 6. С. 961–964.

## О МОНОТОННЫХ МОДИФИКАЦИЯХ СХЕМЫ КАБАРЕ

В. В. Остапенко<sup>1,2</sup>, О. А. Ковыркина<sup>1</sup>, Н. А. Зюзина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет

Для численного решения гиперболических уравнений была предложена трёхслойная по времени и двухточечная по пространству схема Upwind Leapfrog [1], которая имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях, является явной и условно устойчивой при числах Куранта  $r \in (0, 1]$ . Детальный анализ этой схемы был проведен в работе [2], в которой с учётом кососимметричности своего пространственного шаблона она была названа схемой КАБАРЕ. Основные достоинства этой схемы связаны с тем, что она задана на компактном пространственном шаблоне, является обратимой по времени и точной при двух различных числах Куранта  $r = 0.5$  и  $r = 1$ , что наделяет её уникальными диссипативными и дисперсионными свойствами. Для численного решения уравнений одномерной газовой динамики был разработан балансно-характеристический вариант схемы КАБАРЕ [3], который с учётом коррекции потоковых переменных (необходимой для монотонизации разностного решения на ударных волнах) показал высокую точность при расчёте классического теста Blast Wave.

В настоящей работе проведён анализ монотонности двухслойной по времени схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей гиперболические дифференциальные уравнения со знакопеременными характеристическими полями. Получены условия монотонности этой схемы в областях, в которых скорость распространения характеристик имеет постоянный знак. Получены также условия, обеспечивающие монотонность и повышенную точность схемы КАБАРЕ в областях, содержащих звуковые линии, на которых скорость распространения характеристик аппроксимируемого уравнения меняет

знак. Приведены тестовые расчёты, иллюстрирующие данные свойства схемы КА-БАРЕ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00333).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Iserles A. *Generalized leapfrog methods*. IMA Journal of Numerical Analysis. 1986. V.6. №.3. P.381–392.
2. Головизнин В. М., Самарский А. А. *Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной* Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 86–100.
3. Головизнин В. М. *Балансно-характеристический метод численного решения уравнений газовой динамики* Докл. РАН. 2005. Т. 403. № 4. С. 1–6.

## ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СВЕДЕНИЕМ К ОДНОМЕРНОМУ УРАВНЕНИЮ ХОПФА

*М. В. Павлов*

*Новосибирский государственный университет*

В докладе будет показано, как для многомерных уравнений типа Хохлова — Заболотской можно строить решения, зависящие от одной произвольной функции одного аргумента.

## ОБ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

*А. А. Папин, А. Н. Сибин*

*Алтайский государственный университет, Барнаул*

Рассматривается изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в деформируемой пористой среде. Уравнения сохранения массы для каждой из жидкостей и пористой среды, законы Дарси и Лапласа для жидкостей, а также реологическое соотношение для пористости в переменных Лагранжа имеют вид [1, 2]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi}{1-\phi} s_i \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi s_i (u_i - u_3) \right) = 0, \quad s_i \phi (u_i - u_3) = -K_0 \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} \left( (1-\phi) \frac{\partial p_i}{\partial x} - \rho_i^0 g \right), \quad i = 1, 2,$$



$$s_1 + s_2 = 1, \quad p_2 - p_1 = p_c(x, s), \quad \frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} + (1 - \phi)^2 \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0,$$

$$(1 - \phi) \frac{\partial u_3}{\partial x} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi) \frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (1 - \phi) \frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot}g, \quad p_e = p_{tot} - p_f,$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi)p_s, \quad \rho_{tot} = \phi \rho_f + (1 - \phi)\rho_3^0, \quad \rho_f = \phi(s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0), \quad p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2.$$

Здесь  $\phi$  — пористость,  $\vec{u}_i$  — скорость  $i$ -й фазы ( $i = 1, 2, 3$ ),  $s_i$  и  $p_i$  — насыщенность и давление жидкой фазы ( $i = 1, 2$ ),  $p_s$  — давление твердой фазы,  $p_e$  — эффективное давление. Заданные функции:  $\rho_i^0 = const$  — истинные плотности ( $i = 1, 2, 3$ ),  $p_c(x, s_1)$  — капиллярный скачок давлений,  $\xi(\phi)$  и  $\beta_t(\phi)$  — коэффициенты объемной вязкости и объемной сжимаемости горной породы,  $\vec{g}$  — ускорение силы тяжести.

В докладе рассматриваются точные автомодельные решения задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде [3, 4].

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 2014/2, Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-08-00291).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Connolly J. A. D., Podladchikov Yu. Yu. *Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock*. *Geodinamica Acta*, 1998. V. 11. № 2–3. P. 55–84.
2. Папин А. А., Подладчиков Ю. Ю. *Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде*. *Известия АлтГУ*. 2015. Вып. 1/2. С. 131–135.
3. Веригин Н. Н. *О фильтрации растворов и эмульсий в пористой среде*. 2-й Всесоюзный съезд по теор. и прикл. мех.: Аннот. докл. М.: Наука, 1964. С. 50.
4. Папин А. А., Сибин А. Н. *Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде*. *Известия АлтГУ*. 2016. Вып. 1/1.

## О ПЕРСПЕКТИВНОЙ ДИАГНОСТИКЕ АРТЕРИАЛЬНЫХ АНЕВРИЗМ СОСУДОВ ГОЛОВНОГО МОЗГА

Д. В. Паршин<sup>1</sup>, А. А. Черевко<sup>1,2</sup>, И. В. Уфимцева<sup>2</sup>, К. Ю. Орлов<sup>3</sup>,  
А. Л. Кривошапкин<sup>3</sup>, А. П. Чупахин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет

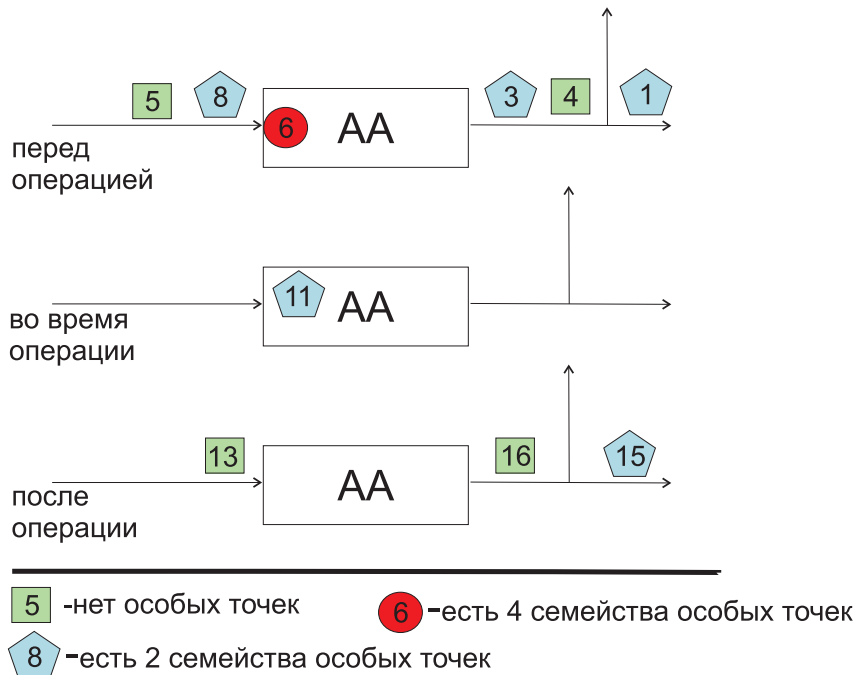
<sup>3</sup>ННИИ патологии кровообращения им. ак. Е. Н. Мешалкина, Новосибирск

Актуальной проблемой современной медицины является выявление сосудистых патологий головного мозга. Более половины таких пациентов выявляются случайно в

ходе проведения специальной диагностики (МРТ, КТ, ангиографии сосудов головного мозга). Оставшаяся половина диагностируется зачастую по внешним проявлениям патологии (выпучивание глаза, асимметрия черепа и другие) либо вследствие неврологического дефицита различного характера (судороги, головные боли и прочие). Целью работы является разработка методов диагностики патологий сосудистого русла типа аневризмы на основе математического моделирования кровотока без использования средств визуализации. В основе работы лежит модель гемодинамики, описываемая нелинейным уравнением Ван дер Поля – Дуффинга

$$\varepsilon q'' + (a_1 + a_2 q + a_3 q^2)q' + (b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3) = ku, u = u(t), q = q(t), \quad (1)$$

где  $k, a_i$  — константы,  $u = u(t), q = q(t)$  — обезразмеренные скорость и давление в сосуде соответственно. Обработка клинических расчетов показывает, что это уравнение хорошо описывает течение крови в сосудах головного мозга [1]. При математическом моделировании исследуется поведение системы в зависимости от внешнего воздействия и полагается  $u(t) = k \sin 2\pi\omega t$ .



Характерное количество особых точек в местах проведенных измерений для пациента К1.

Уравнение (1) описывает нелинейные релаксационные колебания кровеносной системы головного мозга. Исследованию подобных решений посвящено довольно много работ, например [2, 3, 4]. Их использование при моделировании живых систем [5] обусловлено спецификой “быстро-медленных” решений, когда с течением времени система переходит от одного режима к другому (например, от здорового к больному). Построена классификация особых точек медленной системы данного уравнения в зависимости от констант системы и частоты внешнего воздействия. Полученные результаты о количестве особых точек на интервале  $\{q \in [-1, 1] \times \omega \in (0, 1]\}$  определяют экспериментальный критерий наличия аневризмы в сосуде в терминах дифференциального уравнения (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00036).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлова А. В., Черевко А. А., Чупахин А. П., Кривошапкин А. Л., Орлов К. Ю., Панарин В. А. *Моделирование гемодинамики головного мозга на основе экспериментальных клинических данных*. Тезисы международной конференции по математической теории управления и механике, г. Суздаль, Россия, 2013 г. С. 242–243.
2. Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. *Динамические системы*. Т. 5. Динамические системы – 5. М.: ВИНТИ. 1986.
3. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*. М.: Наука, 1975.
4. Guckenheimer J., Pyashenko Yu. S. *The Duck and the Devil: Canards on the Staircase*. Moscow Math. J. 2001. V. 1. № 1. P. 27–47.
5. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. “Катастрофа голубого неба” в приложении к моделированию кардиоритмов. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2015. Т. 55. № 7. С. 1136–1155.

## ПАРАМЕТРЫ СТРАТИФИКАЦИИ И ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

*Е. Г. Перевалова*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН*

Рассматривается математическая модель волновых движений слабостратифицированной жидкости в поле силы тяжести. Предполагается, что фоновый профиль плотности жидкости зависит экспоненциально от глубины. В такой ситуации параметры волнового движения (скорость нелинейной волны, ее амплитуда и т.п.) определяются коэффициентом, задающим тонкую структуру стратификации [1]. В данной работе исследуется обратная задача восстановления коэффициента плотности по кривой амплитудной дисперсии для уединенных волн. Указанная задача сводится [2] к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. В докладе анализируется свойство единственности его решений в классе аналитических функций, описывающих возмущения стратификации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-01-03942).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Makarenko N. I., Maltseva J. L., Kazakov A. Yu. *Conjugates flows and amplitude bounds for internal solitary waves*. Nonlin. Processes Geophys. 2009. V. 16. P. 169–178.
2. Макаренко Н. И., Перевалова Е. Г. *Плотностная стратификация и амплитудная дисперсия внутренних волн*. *Фунд. и Прикл. Гидрофизика*. 2013. Т. 6. № 2. С. 71–77.

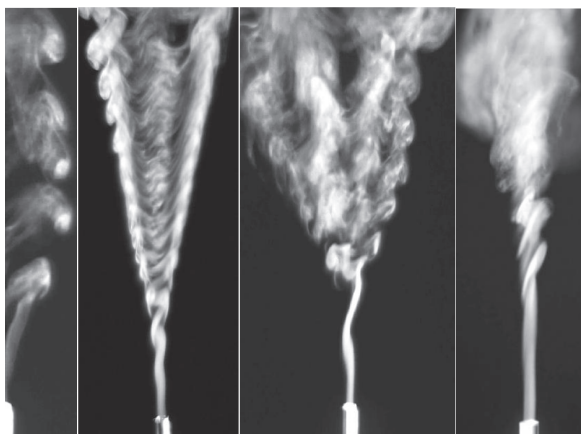
## СТРУКТУРА ЛАМИНАРНОЙ КРУГЛОЙ МИНИСТРУИ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Б. В. Перепелица

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Одной из первых работ, посвященных экспериментальному изучению устойчивости микроструи при малых числах Рейнольдса и влиянию акустики, является [1]. В последнее время интерес к изучению микротечений значительно возрос, что связано с развитием принципиально новых технологических устройств миниатюрных размеров. Появилась возможность использования микроструй в таких процессах, как микроохлаждение электронных устройств, микрообработка, производство нанопорошков, перемешивание микрообъемов растворов в химической и биологической промышленности и т.д. Акустическое воздействие на ламинарную струю приводит к образованию в сдвиговых слоях струи многочисленных турбулентных вихрей различного вида и масштаба. Цель акустического воздействия на струю — дать основу для решения различных задач, включающих взаимодействие между различными вихревыми структурами для того, чтобы специфические механизмы такого взаимодействия могли быть исследованы в деталях.

По данным фото- и видеорегистрации картины течения были выявлены характерные особенности режимов течения струи в акустическом поле. В качестве примера на рисунке приведены характерные виды структуры струи при различных числах Рейнольдса ( $Re = 111 \div 275$ ), подверженных воздействию акустического поля частотой  $50 \div 340$  Гц.



### ЛИТЕРАТУРА

1. Becker H. A., Massaro T. A. *Vortex evolution in a round jet*. J. Fluid Mech. 1968. V. 31. № 3. P. 435–448.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭМБОЛИЗАЦИИ АРТЕРИОВЕНОЗНОЙ МАЛЬФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

И. А. Петренко<sup>1</sup>, А. А. Черевко<sup>2,3</sup>, Т. С. Гологуш<sup>3</sup>, А. П. Чупахин<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Владимирский государственный университет

<sup>2</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>3</sup>Новосибирский государственный университет

Артериовенозная мальформация может адекватно моделироваться пористой средой в силу хаотического неупорядоченного расположения вырожденных сосудов различных малых диаметров (от 0.01 до 1 см), осуществляющих шунтирование крови из артерии в вену. Процесс эмболизации описывается в этой модели внедрением в пористую среду, заполненную жидкостью (кровью), другой жидкости (эмболизата), несмешивающейся с первой.

Предложенная модель имеет две новые принципиальные особенности.

1. На процесс эмболизации накладывается требование об ограничении удельной нагрузки на узел АВМ при эмболизации. Это требование следует из нейрохирургической практики и обосновано на гидравлической модели эмболизации АВМ [1]. Оно формулируется в виде ограничения

$$\Delta E/V \leq W_{max}, \quad (1)$$

где  $\Delta E$  — энергия, рассеиваемая в АВМ за единицу времени. Она равна разности потоков энергии на входе в АВМ и выходе из неё,  $V$  — объём АВМ,  $W_{max}$  — предельное допустимое значение удельной нагрузки.

2. Процесс эмболизации описывается как процесс оптимального управления, в котором, управляя концентрацией эмболизата на входе в АВМ, нужно добиться максимально возможной её эмболизации за конечное время при выполнении условия (1).

Показано, что оптимальное управление состоит из интервалов, на которых либо (а) насыщенность крови на входе в АВМ достигает минимального допустимого значения, что означает максимальную подачу эмболизата, либо (б) в процессе эмболизации постоянно поддерживается предельно допустимая нагрузка  $W_{max}$ . Конструктивное построение такого управления осуществляется в виде численного решения исходной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00036).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кривошапкин А. Л., Чупахин А. П. и др. Алгоритм предупреждения гемодинамических кровоизлияний при эмболизации церебральных артериовенозных мальформаций. Бюллетень СО РАМН. 2013. Т. 33. № 6. С. 65–73.

# УСИЛЕНИЕ ВОЛН СТОКСА В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

*Е. Ю. Просвиряков*

*Институт машиноведения УрО РАН,  
Казанский национальный исследовательский технический университет  
им. А. Н. Туполева — КАИ*

Колебания вязкой несжимаемой жидкости систематически начали изучаться Стоксом [1]. В работе [1] приведено точное решение, описывающее чрезвычайно быстрое затухание волновых движений, которые вызываются гармоническими возмущениями границы полупространства. Данное решение справедливо для жидкостей, при описании которых можно пренебречь инерционными слагаемыми в полной производной скорости. Следовательно, применение решение второй задачи Стокса имеет свои ограничения. Известны экспериментальные работы [2], где очерчена область применимости классической формулы. В этой же работе [2] наблюдается усиление колебаний жидкости при некоторых значениях амплитуды и частоты гармонических колебаний границы.

Первым шагом на пути уточнения классического волнового решения Стокса должен стать учет конвективной производной в уравнении Навье — Стокса. Для этого предлагается использовать следующее представление скоростей:

$$V_x = U(z, t) + u(z, t)y, \quad V_y = V(z, t).$$

Представленное решение является точным, поскольку для определения неизвестных функций необходимо решить связанную систему уравнений типа теплопроводности. Данное решение описывает усиление колебаний жидкости по сравнению с заданным краевым режимом. Усиление волн обусловлено наличием вертикальной компоненты завихренности, которая в данном случае совпадает с градиентом  $u(z, t)$  скорости  $V_x$ . Построены соответствующие оценки для безразмерного числа  $kh$ , где  $k$  — волновое число, а  $h$  — толщина слоя жидкости. Кроме того, установлено, что в поле сил Кориолиса усиление волн Стокса невозможно. Примечательно, что переход к неинерциальной (вращающейся) системе координат возможен в рамках класса точных решений, в котором скорости линейно зависят от части координат,

$$V_x = U(z, t) + \Omega y, \quad V_y = V(z, t) - \Omega x.$$

Здесь  $\Omega$  — угловая скорость вращающейся жидкости. Таким образом, можно сделать вывод об усилении волн в вязкой несжимаемой жидкости только за счет сил инерции, которые не являются консервативными и могут вызывать вертикальную завихренность жидкости.

Работа выполнена по теме государственного задания, ГР No 01201354600.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Stokes G. G. *On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums.* Camb. Philo. Trans. 1851. V.9. P.8–106.

2. Bukreev V.I. *Experimental investigation of the range of applicability of the solution of Stokes's second problem*. Fluid Dynamics . 1988. V. 23. № 4. P. 504–509.

## ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ: ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ И ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Е. И. Роменский<sup>1,2</sup>, М. Думбсер<sup>3</sup>, И. М. Пешков<sup>1,4</sup>, О. Занотти<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>3</sup>Университет Тренто, Италия

<sup>4</sup>Университет По, Франция

Классическое описание течений вязкой жидкости основывается на модели Навье — Стокса, в которой тензор вязких напряжений является функцией тензора скоростей деформаций, что приводит к появлению параболических членов уравнений, содержащих вторые пространственные производные скоростей. Альтернативный подход к моделированию вязких жидкостей восходит к идее Я. И. Френкеля [1] о том, что жидкость можно рассматривать как твердое тело с малым временем релаксации касательных напряжений. Указанный подход можно реализовать с использованием термодинамически согласованной релаксационной модели максвелловской упруго-пластической среды [2]. В данной модели состояние среды определяется полем скоростей и полем упругой дисторсии, связанной с тензором напряжений. Сопротивление сдвигу в такой среде контролируется релаксацией касательных напряжений, причем скорость релаксации определяется характерным временем релаксации — нелинейной функцией, зависящей от напряжений и температуры. Определяющие уравнения модели состоят из законов сохранения массы, энергии, импульса и уравнений эволюции дисторсии и образуют гиперболическую систему [3]. Оказывается, что при определенном выборе функциональной зависимости времени релаксации касательных напряжений от параметров среды сформулированная гиперболическая модель дает решения, близкие к решениям уравнений Навье — Стокса. Это демонстрируется рядом решений тестовых задач, полученных с применением высокоточных численных методов. В качестве примеров рассмотрены такие задачи, как первая задача Стокса, течение Пуазейля, задача Блазиуса о пограничном слое, задача о сдвиговых течениях и т.д.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. *Кинетическая теория жидкостей*. Л.: Наука, 1975.
2. Godunov S.K., Romenskii E.I. *Elements of continuum mechanics and conservation laws*. Kluwer Academic/Plenum Publishers. NY, 2003.
3. Peshkov I., Romenski E. *A hyperbolic model for viscous Newtonian flows*. Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2016. V. 28, № 1, P. 85–104.

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ТЕЛА С ОТСЛОИВШИМСЯ ТОНКИМ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Е. М. Рудой

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет*

В настоящее время в машиностроении, аэрокосмической технике, гражданском строительстве и других отраслях промышленности широко используются композиционные материалы, так как такие материалы увеличивают прочностные свойства и несущие способности элементов конструкций. Под композиционным материалом понимается неоднородная сплошная среда, состоящая из нескольких материалов и тел, свойства и поведение которых могут существенно отличаться друг от друга. В частности, композиционные материалы могут состоять из упругой среды, которая содержит тонкие жесткие включения (называемые также антитрещинами). В силу плохой адгезионной способности тонких включений может происходить отслоение их от упругой матрицы. В результате этого в композитном теле появляются трещины отслоения. При этом наличие трещин снижает жесткость и прочность композитов.

Мы рассматриваем плоскую задачу теории упругости для тела, имеющего тонкое жесткое включение, которое отслаивается с одной стороны от упругой матрицы. Основная цель работы — построить эффективный алгоритм численного решения задачи, основанный на двух подходах: методе декомпозиции области [1], который широко используется для численного решения задач математической физики (см., например, [2, 3, 4, 5]), и алгоритме Удзавы решения вариационных неравенств. Для этого исходная область разбивается на две подобласти. На каждом итерационном шаге решаются две линейные задачи, одна из которых описывает равновесие упругого тела с тонким жестким включением, лежащим на границе. Несмотря на то, что эта задача является линейной, она содержит ограничение на решение. Строится алгоритм, позволяющий решение такой задачи свести к решению нескольких задач Дирихле. Приводятся численные примеры с использованием метода конечных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 15-11-10000).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Quarteroni A., Valli A. *Domain decomposition methods for partial differential equations*. Clarendon Press, 1999.
2. Лаевский Ю. М., Мацокин А. М. *Методы декомпозиции решения эллиптических и параболических краевых задач*. Сиб. журн. вычисл. матем. 1999. Т. 2. № 4. С. 361–372.
3. Астрхацев Г. П. *Метод декомпозиции области для задачи об изгибе неоднородной пластины*. ЖВМиМФ. 1998. Т. 38. № 10. С. 1758–1766.
4. Рукавишников А. В. *Метод декомпозиции области и численный анализ для одной задачи гидродинамики*. ЖВМиМФ. 2014. Т. 54. № 9. С. 1515–1536.



5. Rudoy E. *Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition*. ESAIM: M2AN. DOI: 10.1051/m2an/2015064

## О ТЕРМОДИФФУЗИИ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА

*И. И. Рыжков, И. В. Степанова*

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

В работе рассматривается процесс стационарного и нестационарного тепло-массообмена бинарной смеси в плоском слое, горизонтальные границы которого поддерживаются при различных постоянных температурах. Градиент температуры вызывает разделение смеси под действием эффекта термодиффузии. Такая конфигурация используется для измерения коэффициентов диффузии и термодиффузии в смесях [1]. Распределения температуры и концентрации в смеси описываются одномерными уравнениями переноса тепла и массы. На границах слоя задаются значения температуры, а также ставится условие отсутствия диффузионного потока массы. Для стационарной задачи задается дополнительное интегральное условие на среднюю концентрацию смеси, в нестационарных расчетах в качестве начального условия задаются известные средние значения температуры и концентрации смеси. Важной особенностью поставленной задачи является учет зависимости коэффициентов теплопроводности, диффузии и термодиффузии от температуры. Это приводит к нелинейности исходных уравнений и привлечению нетривиальных методов исследования [2].

Для стационарной задачи предложена общая схема интегрирования исходных уравнений, доказана единственность решения. Построен ряд новых точных решений, рассмотрены примеры термодиффузионного разделения в различных бинарных смесях с переменными коэффициентами переноса.

В качестве рабочей смеси для численного расчета тепло-массообмена в нестационарном случае рассматривается водный раствор хлорида натрия при средней концентрации  $C_0 = 0.0285$  и температуре  $T_0 = 12^\circ\text{C}$ . Коэффициенты теплопроводности и диффузии зависят от температуры линейно, коэффициент термодиффузии — квадратично. Профиль концентрации является нелинейным в силу температурной зависимости коэффициентов. Максимум концентрации соответствует точке, где отношение коэффициента термодиффузии к коэффициенту диффузии обращается в ноль. Слева и справа от нее концентрация соли падает с увеличением и уменьшением температуры соответственно. С ростом времени нестационарный профиль концентрации приближается к профилю, который соответствует решению стационарной задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Mialdun A., Shevtsova V. *Measurement of the Soret and diffusion coefficients for benchmark binary mixtures by means of digital interferometry*. J. Chem. Phys. 2011. V. 134. 044524.

2. Pya I., Ryzhkov, Irina V., Stepanova *On thermal diffusion separation in binary mixtures with variable transport coefficients*. Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V.86. P. 268–276.

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАКАТА ВОЛН ЦУНАМИ НА БЕРЕГ

А. Д. Рычков<sup>1</sup>, Г. С. Хакимзянов<sup>1,2</sup>, Л. Б. Чубаров<sup>1,2</sup>, Ю. И. Шокин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет

В докладе представлены результаты сравнительного анализа некоторых алгоритмов для моделирования процессов наката длинных поверхностных волн на берег в рамках теории мелкой воды. Авторы рассматривают задачи о накате волн на линейный склон с учетом и без учета донного трения. Особое внимание уделено верификации вычислительных схем и валидации используемой модели с помощью известных аналитических решений, результатов численного моделирования, полученных другими специалистами [1], а также данных лабораторных экспериментов.

В совокупность исследуемых методов авторы доклада включили метод крупных частиц, метод “годуновского” типа, метод сглаженных частиц (SPH), комбинированный метод, объединяющий подходы упомянутого SPH метода с конечно-разностной схемой, обладающей TVD свойствами, а также метод подвижных сеток, использующий приближенное аналитическое решение для определения параметров течения вблизи линии уреза.

Показаны определенные преимущества метода TVD+SPH для решения задач наката волн на берег по сравнению с другими методами. Продемонстрированы возможности успешного применения этого метода для моделирования как слабо нелинейных (необрушающихся), так и существенно нелинейных (обрушающихся) волн. В последнем случае для согласования с результатами экспериментов необходим подбор параметров, определяющих величину донного трения.

В докладе представлены результаты моделирования наката на склоны различной крутизны волн различных амплитуд и различных конфигураций. В частности, рассмотрены процессы наката так называемых  $N$ -волн, формы которых непосредственно связаны с волнами цунами, порожденными близкими к берегу цунамигенными землетрясениями. Полученные результаты качественно согласуются с выводами работы [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-17-00219).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Rodin A., Didenkulova I., Pelinovsky E. *Numerical study for run-up of breaking waves of different polarities on a sloping beach*. *Extreme Ocean Waves* / Eds E. Pelinovsky, C. Kharif. Switzerland: Springer International Publishing, 2016. P. 155–172. DOI: 10.1007/978-3-319-21575-4.

2. Tadepalli S., Synolakis C. E. *The Run-up of N-waves on sloping beaches* / Proceedings of Royal Society of London. A. 1994. V. 445. Issue 1923. P. 99–112.

## “ЖЕСТКИЕ” МОДЕЛИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ДУФФИНГА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В РАДИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

*Л. В. Савкин*

*ПАО “Радиофизика”, Москва*

Исследование нелинейных осцилляторов в рамках различных типов радиофизических систем представляет собой практический интерес, связанный, прежде всего, с возможностью физической реализации хаотических сигналов (процессов). Последние, в свою очередь, играют существенную роль в разработке способов формирования сверхширокополосных сигналов, строящихся на базе электронно-вакуумных приборов и элементов твердотельной электроники. Данные исследования представляют собой активно развиваемое на протяжении нескольких последних десятилетий самостоятельное научно-техническое направление, находящее ряд важных приложений в области нелинейной радиолокации, квантовой радиофизики, хаотических телекоммуникационных систем и многих других [1].

Осцилляторы Дуффинга представляют собой простейшие одномерные осцилляторы с кубической нелинейностью, которые в общем случае описываются уравнением вида

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0 \quad (1)$$

с потенциальной функцией  $U(x)$ , имеющей симметричную форму

$$U(x) = ax^2/2 + bx^4/4, \quad (2)$$

для которой в случаях  $b = 0$  система автоматически будет сводиться к линейному осциллятору. Знак “+” у третьего слагаемого в выражении (1) говорит о так называемой “жесткой” модели осциллятора Дуффинга, вытекающей из механической интерпретации рассматриваемой колебательной системы [2, 3].

В работе проводится аналитический обзор нескольких “жестких” моделей осцилляторов Дуффинга, которые на практике могут быть использованы для описания и идентификации хаотических процессов, реализуемых в радиофизических системах радио- и миллиметрового диапазонов длин волн. Особое внимание уделено вопросу регистрации регулярных циклов, возникающих в хаотических режимах радиофизических систем и позволяющих однозначно соотнести наблюдаемую (с кубической нелинейностью) модель осциллятора с одной из двух (“жесткой” или “мягкой”) моделью осциллятора Дуффинга.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев А. С., Ефремова Е. В., Максимов Н. А., Панас А. И. *Генерация хаоса*. М.: Техносфера, 2012.

2. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. *Нелинейные колебания*. М.: Физматлит, 2005.
3. Kovacic I., Brennan M. J. *The Duffing Equation. Nonlinear Oscillators and their Behaviour*. John Wiley and Sons, 2011.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЕКРЕМЕНТА НЕУСТОЙЧИВОСТИ КЕЛЬВИНА — ГЕЛЬМГОЛЬЦА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ОТ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА

Е. В. Сарычева<sup>1</sup>, В. Д. Сарычев<sup>2</sup>, С. А. Невский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup>Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк

На основе представлений о формировании наноструктур в процессе длительной эксплуатации в поверхностных слоях материала за счет развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца получена зависимость декремента неустойчивости от характеристик материала. Деформируемый материал рассматривался как двухслойная среда: нижний слой заполняет вязкая несжимаемая жидкость бесконечной глубины, имеющая плотность  $\rho_1$  и кинематическую вязкость  $\nu$ ; верхний слой толщины  $h$  занимает идеальная жидкость с плотностью  $\rho_2$ , движущаяся относительно нижней со скоростью  $u_0$ . Выбирается система координат  $(x, y)$ : ось  $y = 0$  соответствует границе раздела, а область  $y < 0$  занимает вязкая жидкость. Из уравнений движения, условий несжимаемости для двух сред, а также граничных условий: кинематических и динамических условий на границе раздела, равенства нулю нормальной компоненты скорости при  $y = h$ , равенство нулю вектора скорости на минус бесконечности, для возмущений, пропорциональных  $\exp(\omega t - ikx)$ , получаем дисперсионное уравнение

$$(2\nu k^2 + \omega)^2 + \mu(\omega + iku_0)^2 + \omega_0^2 = 4\sqrt{\nu^3 k^6(\nu k^2 + \omega)}, \quad (1)$$

где

$$\mu = \frac{\rho_2}{\rho_1} \operatorname{cth}(kh), \quad \omega_0^2 = \frac{\sigma}{\rho_1} k^3, \quad \operatorname{Re}(\omega + \nu k^2) > 0.$$

В приближении коротких волн ( $\nu k^2 \gg \omega$ ) уравнение (1) с использованием выражения  $\omega = \alpha + i\Omega$  приводится к виду

$$\alpha = \sqrt{\frac{ab}{2}(C + \sqrt{C^2 + 4})} - a, \quad (2)$$

где

$$C = \frac{a^2 - b^2 - c}{ab}, \quad a = \nu k^2/1 + \mu, \quad b = \mu k u_0/1 + \mu, \quad c = (\omega_0^2 - \mu(ku_0)^2)/1 + \mu.$$

Таким образом, получена явная зависимость декремента от волнового числа и найдены области параметров, в которых  $\alpha(k)$  имеет качественно идентичный вид.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (код проекта 15-12-00010).

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ ТВЕРДЫХ СТЕНОК

*В. Л. Сенницкий*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет*

Выявление закономерностей силового взаимодействия и совместного движения вязкой жидкости и “свободных” твердых тел в различных гидромеханических условиях является актуальной проблемой механики жидкости [1]–[3].

В данной работе поставлена и решена задача о затухающем движении вязкой жидкости, заполняющей промежуток между двумя параллельными твердыми стенками. Одна из стенок является “свободной” (ее движение неизвестно и подлежит определению); другая стенка находится в состоянии покоя. Постановка задачи включает в себя уравнение Навье — Стокса, уравнение движения “свободной” стенки и условия, которые должны выполняться на границах стенок и в начальный момент времени. Найдено точное решение задачи. Получена формула для характерного времени торможения жидкости и “свободной” стенки. Определено условие резкого торможения гидромеханической системы.

Результаты данной работы могут быть использованы, в частности, в теоретических и экспериментальных исследованиях эволюции диссипативных гидромеханических систем, в математическом моделировании технологических процессов и природных явлений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л. *Пример движения цилиндрического твердого тела в вязкой жидкости*. ПМТФ. 2013. Т. 54. № 2. С. 81–87.
2. Сенницкий В. Л. *О затухающем движении гидромеханической системы*. СЖИМ. 2014. Т. 17. № 2. С. 119–124.
3. Сенницкий В. Л. *О заданной ориентации твердого включения в вязкой жидкости*. СЖИМ. 2015. Т. 18. № 1. С. 123–128.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ И ТРАНСПОРТА ВЕЩЕСТВ В КРОВЕНОСНОЙ СИСТЕМЕ ЧЕЛОВЕКА

*С. С. Симаков<sup>1,2,3</sup>, Т. М. Гамилов<sup>1,2,3</sup>, Ян Хаинг Со<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт

<sup>2</sup>Институт вычислительной математики РАН, Москва

<sup>3</sup>Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

В докладе рассматривается одномерная динамическая замкнутая модель сердечно-сосудистой системы. Модель основана на объединении задач о движении несжимаемой вязкой жидкости в эластичной трубке. Рассматривается возможность замыкания сетевой модели с помощью осредненной по объему четырехкамерной модели сердца, используемой как с учетом, так и без учета динамики закрытия и открытия клапанов. Физиологическая адекватность модели повышается за счет введения в нее ауторегуляторных механизмов, состоящих в адаптации параметра эластичности стенки артерий к локальному среднему давлению в сосуде. В качестве примеров практического использования модели рассматривается анализ гемодинамики при хирургическом ремоделировании сосудистого русла, обусловленного его многосудистым стенозическим поражением на примере коронарного и церебрального отдела; особенности гемодинамики при эмболизации церебральных артериовенозных мальформаций; глазной кровотока в норме, при атеросклерозе и гипертонии; транспорт и потребление медикаментов в организме после инъекции.

Работа поддержана грантами РНФ 14-31-00024, 14-11-00877 и РФФИ 14-01-00779, 14-01-00036.

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБРАТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА

*О. В. Соболева*

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток*

Целью настоящей работы является разработка численного алгоритма решения обратных экстремальных задач, а также анализ результатов численного решения указанных задач для модели переноса вещества, описываемой нестационарным уравнением диффузии–реакции.

Рассмотрим в ограниченной области  $\Omega \in \mathbb{R}^d, d = 2, 3$  с липшицевой границей  $\Gamma$  задачу нахождения функции  $\varphi$  из соотношений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla \varphi) - k\varphi + f, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \chi(t) \quad \text{на } \Gamma. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda > 0$  — коэффициент диффузии,  $k$  — величина, характеризующая распад вещества за счет химических реакций,  $f$  — плотность объемных источников,  $\varphi_0$  и  $\chi$  — заданные в  $\Omega$  и на  $\Gamma$  функции.

Исследуемая в работе обратная задача заключается в нахождении неизвестной функции  $\lambda$ , которую требуется определить вместе с решением  $\varphi$  по дополнительной информации о состоянии среды в некоторой подобласти  $\Omega_0 \subset \Omega$ . Указанная задача с помощью оптимизационного метода [1] формулируется как задача минимизации функционала

$$J(\varphi, k, f) \equiv \frac{\mu_0}{2} \int_0^T \int_{\Omega_0} |\varphi - \varphi_d|^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\mu_2}{2} \int_{\Omega} |\lambda|^2 d\mathbf{x} \rightarrow \inf \quad (2)$$

на решениях исходной краевой задачи (1). Здесь  $\varphi_d \in L^2(\Omega_0 \times (0, T))$  — заданная функция.

В работе предложен алгоритм численного решения сформулированной коэффициентной обратной экстремальной задачи (2) и разработан программный комплекс для ее численного решения. Проведен ряд вычислительных экспериментов по решению указанной обратной задачи. Анализ результатов вычислительных экспериментов показал эффективность алгоритма и программного комплекса для численного решения коэффициентной обратной задачи для модели переноса вещества.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00365-а) и Министерства образования и науки РФ (контракт 14.Y26.31.0003).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Численные методы решения обратных задач математической физики*. М.: Едиториал УРСС, 2004.

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МАСКИРОВКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТИЗАЦИИ МАСКИРОВОЧНОЙ ОБОЛОЧКИ

Ю. Э. Спивак

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

В течение последних нескольких лет развитие эффективных методов и стратегий для достижения невидимости объектов к электромагнитным волнам привлекло значительное внимание [1]–[3]. Однако техническая реализация решений, полученных в указанных работах, весьма затруднительна из-за отсутствия в природе соответствующих маскировочных материалов, отвечающих найденным решениям. Существует несколько способов преодоления трудностей с технической реализацией решений.

Один из таких способов состоит в замене точных решений задачи маскировки, описывающих сингулярные анизотропные параметры маскировочной оболочки, некоторыми приближенными (несингулярными) параметрами. Степень приближения характеризуется малым параметром  $\delta \geq 0$ , причем случай  $\delta = 0$  отвечает задаче точной маскировки, решение которой описывает технически нереализуемую оболочку. При каждом значении параметра  $\delta > 0$  появляется некоторое рассеяние, уменьшить которое можно путем дискретизации маскировочной оболочки на множество однородных анизотропных слоев  $M$ , каждый из которых, в свою очередь, может быть заменен парой эквивалентных однородных изотропных подслоев  $A$  и  $B$ . Причем с увеличением числа  $M$  и уменьшением  $\delta$  рассеяние уменьшается.

В настоящей работе рассматривается задача приближенной 2D-маскировки цилиндрического тела, покрытого цилиндрической маскировочной оболочкой, и с использованием комбинации приближенной маскировки и дискретизации маскирующего вещества исследуются ее рассеивающие свойства [3]. С помощью метода Фурье находится решение прямой задачи рассеяния плоской волны на оболочке в виде рядов Фурье по цилиндрическим функциям порядка  $n$ . Для более детального анализа рассматриваемой задачи был разработан и реализован эффективный численный алгоритм, опубликованный в [4]. Использование этого алгоритма позволяет провести сравнительный анализ полученных решений при разных параметрах  $\delta, n$  и  $M$  и выбрать оптимальный набор указанных параметров, обеспечивающий минимальное рассеяние от маскировочной оболочки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00365-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дубинов А. Е., Мытарева Л. А. *Маскировка материальных тел методом волнового обтекания*. Успехи физ. наук. 2010. Т. 180. С. 475–501.
2. Alekseev G. V. *Cloaking via impedance boundary condition for 2D Helmholtz equation*. Appl. Anal. 2014. V. 93. P. 254–268.
3. Zamel H. M., El-Diwanly E., El-Hennawy H. *Approximate electromagnetic cloaking of a conducting cylinder using homogeneous isotropic multi-layered materials*. J. Electrical Systems and Information Technology. 2014. V. 1. P. 82–93.
4. Alekseev G. V., Spivak J. E. *Numerical analysis of 2D cloaking problem using multi-layered materials*. РОМА. 2015. V. 24. P. 070009.



# КРИТЕРИИ ОБРАЗОВАНИЯ СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ ДЛЯ ДЛИННЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ КАНАЛАХ СУПРУГИМИ СТЕНКАМИ. ПРИМЕРЫ РЕАЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЙ

*С. В. Сухинин*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

В рамках теории длинных волн в каналах с упругими стенками определены критерии образования сильных разрывов (аналогов ударных волн) в однородных, сужающихся и расширяющихся каналах. Приведены примеры расчетов и известных опытных данных образования сильных разрывов для каналов гидроразрыва и газовой полости РДТТ в момент запуска.

Первые и основополагающие исследования распространения гидроупругих волн в трубопроводных системах были проведены Н.Е. Жуковским в конце 19 века, изложение результатов этих работ содержится в [1]. Количество публикаций по этой тематике постоянно увеличивается. Теория распространения волн в трубопроводных системах содержится в [2]. Изложение использования гидроупругих трубных волн в геофизических исследованиях скважин содержится в [3]. Целью настоящей работы является качественное исследование нелинейных явлений возникающих при распространении гидроупругих волн в неоднородных каналах. Нелинейные явления связаны, как правило, с укрупнением волн и образованием сильных разрывов, начало которых можно описать при помощи градиентных катастроф. В настоящей работе проводится исследование влияния нелинейности и возникновения градиентных катастроф в каналах с упругими стенками при помощи методов теории распространения слабых разрывов [4].

Пусть канал заполнен сплошной средой. Давление и скорость сплошной среды в канале обозначены  $p = p(x, t)$  и  $u = u(x, t)$  соответственно. Плотность  $\rho = \rho(p)$  и площадь поперечного сечения канала  $A(p, x)$  считаются известными (заданными) функциями. Распространение возмущений в каналах с упругими стенками описывается при помощи системы уравнений, которая получена прямым вычислением из законов сохранения массы и импульса. Прямым вычислением можно показать, что местная скорость распространения гидроупругих волн  $c_{channel}$  имеет вид  $c_{channel} = \sqrt{A/(A\rho)_p}$ .

*Физические предпосылки образования сильных разрывов.* Прямой проверкой можно установить, что  $c_{channel}$  всегда меньше скорости звука сплошной среды, заполняющей канал. Малость скорости  $c_{channel}$  является важной особенностью распространения волн в каналах с упругими стенками, которая обуславливает появление сильных разрывов даже в каналах с водой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. *О гидравлическом ударе в водопроводных трубах*. М.— Л.: Гостехиздат, 1949.
2. Лайтхилл Д. *Волны в жидкостях*. М.: Мир, 1981.
3. White J. E. *Undeground sound*. Elsvier, 1983.
4. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике*. М.: Наука, 1978.

# ВЛИЯНИЕ ДИСПЕРСИИ ВОЛН НА МЕХАНИЗМ СОЗДАНИЯ ТЯГИ ПРОТИВ ВОЛН У ПЛАВУЧЕЙ НАКЛОННОЙ ПЛАСТИНЫ

*А. К. Такмазьян*

*НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва.*

С помощью вычислительного пакета XFlow проведено численное моделирование процесса образования двумерных гравитационных волн в канале с помощью клиновидного волнопродуктора. Изучен механизм воздействия прогрессивных гравитационных волн на погруженную вблизи поверхности жидкости плавучую наклонную пластину. Плавучесть пластины обеспечивалась линейным законом возвращающей вертикальной силы относительно точки равновесия, что соответствует судну с постоянной площадью ватерлинии. Сравнение рассчитанных параметров волн и параметров движения катамарана с измеренными ранее экспериментальными данными показывает хорошее согласование. При тех же параметрах, что и в эксперименте, наблюдается обнаруженный ранее экспериментально эффект “гистерезиса” — зависимость направления движения катамарана от начальной скорости. С помощью численных расчетов удалось выделить механизм движения пластины против волн. Оказалось, что движение в основном вызвано разницей в гидростатической составляющей гидродинамических сил и в конечном счете определяется средней по пластине высотой уровня находящейся над ней волны. Наиболее интенсивное движение против волны имеет место в фазе впадины над передней стороной пластины. При опрокидывании волны вблизи верхней кромки пластины (пластина находится под волной и в это время на пластину действует сила в сторону движения волны) теряется потенциальная энергия (высота) волны. Дефицит среднего по периоду уровня жидкости над пластиной за счет нелинейной перестройки профиля и частичного обрушения волны по сравнению с уровнем жидкости за задней кромкой пластины является причиной перемещения пластины против волн. Для проверки гипотезы о гидростатическом характере наблюдаемых эффектов были построены решения теории мелкой воды первого приближения над наклонным дном [1]. Амплитуда набегающих волн задавалась аналогично экспериментальной, но с некоторым постоянным для всех волн коэффициентом, обеспечивающим “затянутое” обрушение волн вблизи верхней кромки пластины. Результаты проведенных вычислений средней скорости движения пластины в зависимости от частоты волн качественно повторяют экспериментальные данные. Для коротких относительно длины волны пластин получено количественное соответствие. Для длинных пластин необходим учет влияния дисперсии на эволюцию профиля. Использовано приближение Буссинеска в виде модели О. Нвогу [2], в которой минимизирована невязка в дисперсионных членах между линеаризованной приближенной моделью и точными линейными уравнениями Эри для волн над дном переменной глубины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-08-00413).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Carrier G. F., Greenspan H. P. *Water waves of finite amplitude on a sloping beach*. J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 97–109.
2. Nwogu O. *Alternative Form of Boussinesq Equations for Nearshore Wave Propagation*. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE. 1993. V. 119(6). P. 618–638.

## ВИХРЬ ОВСЯННИКОВА И АВТОМОРФНЫЕ СИСТЕМЫ

А. А. Талышев

Новосибирский государственный университет

В работе [1] описаны неособые частично-инвариантные решения ранга два и дефекта один уравнений газовой динамики относительно группы вращений  $O(3)$ .

Размерность  $d_k$  орбиты любого решения уравнений газовой динамики относительно группы  $O(3)$  в  $k$ -м продолженном пространстве, очевидно, удовлетворяет неравенствам  $4 \leq d_k \leq 7$ . Также для всех  $k \geq 0$  справедливы неравенства  $d_k \leq d_{k+1}$ . Откуда следует, что, начиная с некоторого значения  $k_3$ , размерность орбиты выходит на стационарное значение. Орбита является многообразием в продолженном пространстве и может трактоваться, как система дифференциальных уравнений. При  $k \geq k_3$  орбита будет вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений и потому будет автоморфной системой [2].

Система дифференциальных уравнений называется автоморфной относительно группы  $G$ , если любое решение этой системы получается из одного фиксированного решения посредством действия преобразований группы  $G$  [3, §25].

Алгоритм построения частично-инвариантных решений, описанный в [3, §22], из всей информации о группе использует только инварианты нулевого порядка и накладывает ограничения только на размерность орбиты нулевого порядка. Для частично-инвариантных решений, описанных в [1], имеем  $d_0 = 5$ . Размерности  $d_1, d_2$  здесь могут принимать следующие четыре варианта значений:  $(5, 5)$ ,  $(6, 6)$ ,  $(6, 7)$ ,  $(7, 7)$ . В настоящей работе показано, что первый вариант невозможен, а остальные три дают три класса автоморфных систем. Для интегрирования полученных автоморфных систем можно использовать результаты работы [4].

Различные группы могут иметь один и тот же набор инвариантов нулевого порядка. Таким образом, различные группы могут иметь одно и то же множество частично-инвариантных решений данного ранга. Базис дифференциальных инвариантов группы Ли однозначно определяет эту группу [3, с. 321], поэтому и набор автоморфных систем данной группы однозначно определяется группой. Таким образом, наличие нескольких подгрупп с одинаковым набором инвариантов нулевого порядка позволяет построить несколько наборов соответствующих автоморфных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2133.2014.1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Особый вихрь*. ПМТФ. 1995. Т. 36. № 3. С. 45–52.
2. Талышев А. А. *Об автоморфных системах конечномерных групп Ли*. Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 4. С. 130–138.
3. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978.
4. Талышев А. А. *Об интегрировании автоморфных систем конечномерных групп Ли*. Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6. № 1. С. 108–114.

АНАЛИЗ ВЕЕРНОГО МЕХАНИЗМА ОБРАЗОВАНИЯ  
ГЛУБИННЫХ ТЕКТОНИЧЕСКИХ РАЗЛОМОВ

Б. Г. Тарасов<sup>1</sup>, В. М. Садовский<sup>2</sup>, О. В. Садовская<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Университет Западной Австралии, Перт, Австралия

<sup>2</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Согласно общепринятым представлениям, при сжатии горных пород под высоким боковым давлением макроскопические трещины сдвига продвигаются за счет формирования системы наклонных микротрещин отрыва, образуя фундаментальную структуру, включающую эшелон тонких пластин [1], так называемую “домино–структуру”. Экспериментально установлено, что домино–пластины при вращении разрушаются, создавая трение в голове трещины. Считается, что данный механизм реализуется также в прочных горных породах, запредельные свойства которых до сих пор не исследованы из-за высокой динамики разрушения. Недавние исследования [2] выявили принципиально иной механизм, в котором домино–пластины сохраняют целостность при вращении и образуют веер, движущийся с высокой скоростью как волна благодаря кардинальному снижению трения в голове бегущей трещины.

В докладе анализируется веерный механизм передачи вращательного движения в системе упруго связанных пластин, имитирующий распространение сдвиговых трещин в земной коре на глубинах сейсмической активности. Создана лабораторная физическая модель, в которой наглядно демонстрируется процесс распространения веерных волн. Получены уравнения динамики веерной системы как механической системы с конечным числом степеней свободы. Разработан вычислительный алгоритм, учитывающий контактное взаимодействие пластин. В рамках упрощенной непрерывной модели получены приближенные оценки длины веера в зависимости от скорости его движения. С помощью дискретной и непрерывной моделей исследованы качественные закономерности поведения движущегося веера при наличии трения.

В приближении плоской деформации построена математическая модель равновесного веера в прослойке между двумя упругими полуплоскостями, имитирующей глубинный тектонический разлом. Напряженно-деформированное состояние вдали от веера анализируется с помощью решения задачи о краевой дислокации. В полной постановке задача решается с помощью оригинального метода суперпозиции дислокаций, приводящего к двум нелинейным интегральным уравнениям в зоне веера,

для решения которых применяется метод последовательных приближений. Численно получено распределение вектора Бюргерса в равновесном веере и распределение давлений со стороны пластин веера на полуплоскости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Centre for Offshore Foundation Systems (The University of Western Australia) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00130).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Reches Z., Lockner D. A. *Nucleation and growth of faults in brittle rocks*. J. Geophys. Res.: Solid Earth. 1994. V. 99. Iss. B9. P. 18159–18173.
2. Tarasov V. G. *Hitherto unknown shear rupture mechanism as a source of instability in intact hard rocks at highly confined compression*. Tectonophysics. 2014. V. 621. P. 69–84.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЛАБОНЕЛИНЕЙНОЙ ОБЛАСТИ РАЗВИТИЯ ДЛЯ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Н. М. Терехова

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск*

Начало естественного перехода в пограничных слоях связывается с селективным усилением квазигармонического возмущения, динамику которого требуется описать. Наряду с прямыми методами интегрирования уравнений Навье — Стокса развиваются методы теории возмущений, эффективные при исследовании различных стадий эволюции флуктуаций малой интенсивности. С их помощью удается построить модель начального этапа развития неустойчивости течения (приближение слабой нелинейности), упрощающую анализ и позволяющую дифференцировать управляющие процессом механизмы.

При малых уровнях возмущений после линейного усиления наступает область нелинейного взаимодействия, одной из наиболее типичных стадий которой является субгармонический трехволновый резонанс. Во втором порядке по амплитудам находятся возмущения более высокого порядка малости, способные повлиять на амплитуду исходных волн. В сверхзвуковом пограничном слое при невысоком уровне возмущений в спектре возмущений преобладают трехмерные моды, а заполнение его представляет собой каскадный процесс выделения трехмерных субгармоник в параметрической области.

В данной работе моделируется область нелинейной эволюции возмущений в сверхзвуковом пограничном слое при числе Маха  $M = 2$ . Рассмотрены как искусственные (контролируемые), так и естественные возмущения, состав и амплитудно-частотные характеристики которых различны. В спектре контролируемых возмущений выделяются две несущие частоты, а сами они представляют собой так называемые “волновые поезда” достаточно широкого спектра азимутальных волновых чисел.

Для естественных возмущений передача энергии от наиболее энергонесущих компонент может происходить не только в субгармоническую, но и в область высоких частот (обертонов). Тогда более реален каскадный процесс, в котором задействовано максимальное число частот. При этом возникает проблема синхронизации не только частот, но и азимутальных волновых чисел.

Когда эффективность резонансных взаимодействий с ростом амплитуд ослабевает, важная роль отводится “нерезонансному” механизму взаимодействия, описываемому кубическими по амплитуде членами модельных уравнений. Если выделенные флуктуации не удовлетворяют условиям фазового синхронизма, такой механизм становится доминирующим.

Хотя данные модели значительно упрощают реальные нелинейные процессы, они отражают ряд важных особенностей эволюции волн в слабонелинейных областях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 15-01-00866а).

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

*Д. А. Терешко*

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток*

Одна из важных задач прикладной гидродинамики связана с проблемой создания течений с заданными свойствами. Специфические особенности задач управления и нелинейность используемых математических моделей приводят к значительным трудностям при численном решении рассматриваемых задач и требуют разработки специальных алгоритмов [1].

В области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  рассматривается начально-краевая задача

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = -\beta T\mathbf{G} \text{ в } Q, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } Q,$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Sigma,$$

$$T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \lambda\Delta T = f \text{ в } Q, \quad T|_{t=0} = T_0 \text{ в } \Omega,$$

$$T = \psi \text{ на } \Sigma_D, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{ на } \Sigma_N,$$

описывающая процесс распространения тепла в вязкой жидкости. Здесь  $\mathbf{u}$ ,  $p$  и  $T$  — вектор скорости, давление и температура жидкости,  $\nu = \text{const} > 0$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\beta$  — объемный коэффициент теплового расширения,  $\mathbf{G}$  — вектор ускорения свободного падения,  $\lambda = \text{const} > 0$  — коэффициент температуропроводности,  $f$  — объемная плотность источников тепла,  $\mathbf{g}$ ,  $\psi$  и  $\chi$  — некоторые функции,  $\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ,  $Q = \Omega \times (0, t_{max})$ ,  $\Sigma = \Gamma \times (0, t_{max})$ ,  $\Sigma_D = \Gamma_D \times (0, t_{max})$ ,  $\Sigma_N = \Gamma_N \times (0, t_{max})$ .

Для данной модели сформулированы задачи условной минимизации функционалов качества, зависящих как от слабых решений исходной начально-краевой задачи, так и от функций  $f$  и  $\chi$ , играющих роль управлений.

Разработан численный алгоритм решения экстремальной задачи. В основу алгоритма была положена идея работы [2], обобщенная на случай нестационарных уравнений тепловой конвекции. При проведении вычислительных экспериментов исследуется влияние безразмерных параметров подобия, параметра регуляризации и других величин на точность решения задачи управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-11-00079).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Г. В., Терешко Д. А. *Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости*. Владивосток: Дальнаука, 2008.
2. Alekseev G. V., Malikin V. V. *Numerical analysis of optimal boundary control problems for Navier-Stokes equations*. Comp. Fluid Dynamics J. 1994. V. 3. P. 1–26.

## О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ал. С. Терсенов<sup>1</sup>, Ар. С. Терсенов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>University of Crete, Department of Mathematics, Heraklion, Greece

<sup>2</sup>Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения:

$$u_t = \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})_{x_i} + f(x, u, \nabla u) \quad \text{в } \Omega_T, \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \partial\Omega, \quad (2)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{в } \Omega, \quad u_0(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (3)$$

Здесь  $p_i > 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Полагаем, что  $\Omega$  является ограниченной областью в  $\mathbf{R}^n$ , удовлетворяющей условию внешней сферы, а  $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$  с произвольным конечным  $T \in (0, \infty)$ .

Уравнения указанного вида интенсивно исследуются последние два десятилетия. Одним из открытых вопросов в теории анизотропных параболических уравнений является вопрос гладкости слабых решений задачи (1)–(3).

Мы будем рассматривать случай, когда  $f \equiv 0$ . Нам удалось показать, что при условии на гладкость начальных данных

$$C_0 = \sum_{i=1}^n \max_{\Omega} |(|u_{0x_i}|^{p_i} u_{0x_i})_{x_i}| < +\infty$$

производная решения задачи (1)–(3) (и соответствующей задачи Коши) по времени принадлежит  $L_\infty$ . Стоит отметить, что в сингулярном случае производные  $u_{x_i x_j}$  решения соответствующей задачи Коши принадлежат  $L_2$ . В одномерном случае удалось

показать, что в сингулярном случае производная  $u_{x_1x_1}$  решения как задачи Коши, так и задачи (1)–(3) принадлежит  $L_\infty$ . Как известно, в анизотропном случае геометрия области играет существенную роль как в существовании решения, так и в его гладкости. Нами показано, что при дополнительном предположении о выпуклости области  $\Omega$  как производная по времени  $u_t$  решения  $u$ , так и производные по пространственным переменным  $u_{x_i}$  принадлежат  $L_\infty$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-01-08275).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Antontsev S.N., Chipot M. *Anisotropic equations: uniqueness and existence results*. *Dif. and Int. Eq.* 2008. V. 21. № 5–6. P. 401–419.
2. Antontsev S.N., Shmarev S.I. *Localization of solutions of anisotropic parabolic equations*. *Nonlinear Anal.* 2009. V. 71. № 12. P. 725–737.
3. Bogelein V., Duzaar F., Marcellini P. *Parabolic equations with  $p, q$ -growth*. *J. Math. Pures Appl.* 2013. V. 100. № 4. P. 535–563.
4. Starovoitov V. N., Tersenov Al. *Singular and degenerate anisotropic parabolic equations with a nonlinear source*. *Nonlinear Anal.* 2010. V. 72. № 6. P. 3009–3027.

## НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ НАД ПОДВИЖНЫМ ДНОМ

С. Д. Ткаченко

Новосибирский государственный университет

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В рамках второго приближения теории мелкой воды рассматривается нестационарная задача о генерации поверхностных волн в результате быстрой деформации дна. Используемые для этого нелинейные дисперсионные уравнения Грина — Нагди впервые были выведены в работе [1]. Одна из наиболее интересных и важных постановок задачи о волнах на воде связана с моделированием волн типа цунами. В поршневой модели генерации волн цунами [2] рассматривается механизм образования нестационарных волн, происходящего в результате мгновенного поднятия или опускания локального участка дна.

В настоящей работе рассматриваются гладкие по времени и по пространственной переменной симметричные законы деформации дна. Построена начальная по времени асимптотика решения уравнений Грина — Нагди, описывающего раннюю стадию процесса генерации поверхностных волн. Показано, что качественные режимы волнообразования существенно зависят от геометрических свойств рельефа дна.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Green, A. E., Naghdi, P. M. *A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth*. *J. Fluid Mech.* 1976. V. 78. P. 237–246.



2. Пелиновский, Е. Н. *Гидродинамика волн цунами*. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996.

## КОРРЕКТНОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

М. А. Токарева

Алтайский государственный университет, Барнаул

Рассматривается математическая модель изотермического движения жидкости в деформируемой пористой среде. Для описания модели используются уравнения сохранения масс для каждой из фаз, закон Дарси для жидкости, реологическое соотношение для пористости, а также уравнение баланса импульса для системы в целом [1, 2]

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \operatorname{div}((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s) = 0, \quad \frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f\phi\vec{v}_f) = 0,$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -K_0(\phi)\frac{k_0}{\mu}(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}),$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla p_e\right),$$

$$\rho_{tot}\vec{g} + \operatorname{div}\left((1-\phi)\eta\left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}}\right)^*\right)\right) - \nabla p_{tot} = 0,$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, \quad p_e = (1-\phi)(p_s - p_f), \quad \rho_{tot} = \rho_f\phi + (1-\phi)\rho_s.$$

Здесь  $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_f, \vec{v}_s$  — истинные плотности и скорости жидкой и твердой фаз соответственно;  $\phi$  — пористость;  $\vec{g}$  — плотность массовых сил;  $K_0$  — коэффициент фильтрации,  $k_0$  — проницаемость,  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости;  $a_1(\phi), a_2(\phi)$  — параметры пороупругой среды;  $p_f, p_s$  — давления жидкой и твердой фаз соответственно,  $p_{tot}$  — общее давление,  $p_e$  — эффективное давление;  $\eta$  — коэффициент вязкости твердой среды,  $\rho_{tot}$  — средняя плотность среды. Задача записана в эйлеровых координатах  $(x_1, x_2, x_3), t$ .

В докладе представлены результаты о разрешимости начально-краевых задач для приведенной системы уравнений [3, 4].

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 2014/2, Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-08-00291).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Connolly J. A. D., Podladchikov Yu. Yu. *Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock*. *Geodinamica Acta*. 1998. V. 11. № 2–3. P. 55–84.

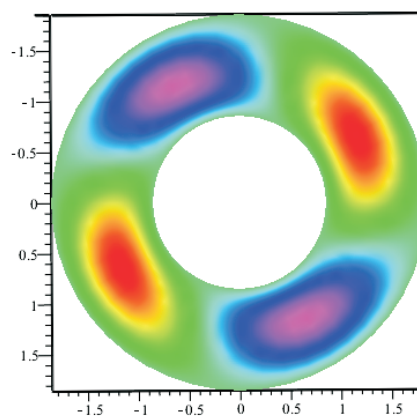
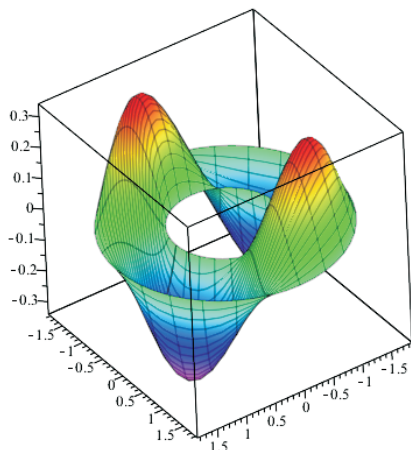
2. Audet D. M., Fowler A. C. *A mathematical model for compaction in sedimentary basins*. Geophys. J. Int., 1992.
3. Tokareva M. A. *Localization of Solutions of the Equations of Filtration in Poroelastic Medium*. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2015. V.8(4). P. 467–477.
4. Папин А. А., Токарева М. А., Шишмарев К. А. *Математические вопросы динамики ледового покрова*. Вестник алтайской науки. 2015. Вып. 1 (23). С. 161–171.

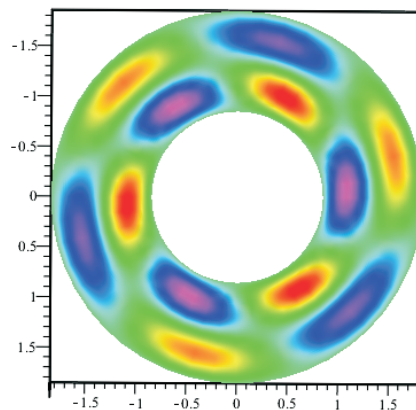
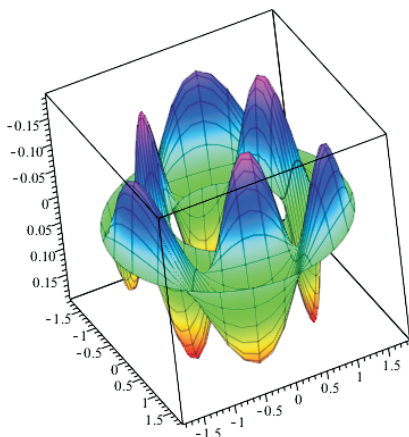
## БЕГУЩАЯ ОКРУЖНАЯ ВОЛНА НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ФРОНТА ГОРЕНИЯ

А. В. Трилис, А. А. Васильев, С. В. Сухинин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В рамках феноменологической модели горения смесей и акустического приближения проведены исследования устойчивости цилиндрического пламени при малых числах Маха основного потока для акустических возмущений. Показано, что фронт пламени всегда устойчив, если массовый расход подачи горючей смеси строго постоянен и не зависит от акустических возмущений. Обнаружено, что если давление в системе подачи горючей смеси возмущения давления или скорости подачи пренебрежимо малы, то существует дискретное множество частот и мод соответствующих колебаний, для которых фронт горения является неустойчивым. Проведены численно-аналитические исследования пространственной формы (вида) этих волн. Показано, что существуют радиальные и окружные волны, растущие по времени. Обнаружены вращающиеся волны с конечным количеством локальных пучностей и определены скорости вращения этих волн. Ниже приведены графики зависимости давления от координат (слева) и поля давления (справа) для бегущих окружных волн неустойчивости.





## АНАЛИЗ ГЕМОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КРОВОТОКА ПРИ НАЛИЧИИ ЦЕРЕБРАЛЬНЫХ АНЕВРИЗМ

*И. В. Уфимцева<sup>1</sup>, А. А. Черевко<sup>1,2</sup>, А. К. Хе<sup>1,2</sup>, А. П. Чухачин<sup>1,2</sup>,  
А. Л. Кривошапкин<sup>3</sup>, К. Ю. Орлов<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>3</sup>ННИИ патологии кровообращения им. ак. Е. Н. Мешалкина, Новосибирск

В работе дается анализ изменения различных гемодинамических параметров кровотока — скорости, давления, сопротивления — во время эндоваскулярных нейрохирургических операций по излечению церебральных аневризм в ННИИПК им. ак. Е. Н. Мешалкина. Мониторинг кровотока воспроизводится с использованием внутрисосудистого датчика Volcano Combo Wire в комплексе с прибором Volcano Combo Map. Клинические данные обрабатываются, очищаются от шумов, представляются в виде компьютеризированной “карты операций”.

Обработаны данные семи операций, во время которых церебральные аневризмы исключались из кровотока как с помощью установки стентов, так и с помощью микроспиралей (койлинг). Выполнен анализ изменения гидродинамических параметров на различных этапах проведения операции вблизи аневризмы и в целом по системе близлежащих к ней сосудов. Для вычисления сопротивления  $R$  системы использовалась линейная модель движения крови в сосудах  $R = P/V$ , где  $P$  и  $V$  — осредненные значения давления и скорости в сосуде. Выявлены места максимальных и минимальных значений давления и скорости в сосудах в операционном поле.

Обнаружены важные и интересные тенденции изменения кровотока после успешного излечения церебральных аневризм, в частности, выравнивание сопротивления в различных участках кровеносной сети. Это является позитивным фактором, поскольку уменьшает градиенты параметров кровотока, большие величины которых увеличивают риск разрыва сосудов. Так, во время операции пациента П. большой

разброс значений сопротивления в сети до операции значительно уменьшился (приблизительно в 30 раз).

Анализ клинических данных показывает, что установка спиралей и стентов возмущает поток в сосудах, изменяя параметры кровотока, особенно в местах бифуркации сосудов. Вероятно, стабилизация гемодинамики, сопровождающая выход параметров кровотока на стабильное состояние, происходит после окончания операции и занимает до нескольких дней. Для моделирования данного процесса необходимо длительное наблюдение гемодинамики пациента в послеоперационный период и всестороннее физиологическое обследование.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00036).

## РЕШЕНИЕ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ И ЕГО ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ С ДВУМЯ ДАВЛЕНИЯМИ

*А. В. Федоров, И. А. Бедарев*

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск*

Проблема физико-математического описания волновых процессов в гетерогенных смесях является актуальной [1]. Действительно, во многих технологических процессах и технических устройствах рабочими средами являются смеси газов и мелких частиц/капель. Например, при пропускании реагентов через сыпучий катализатор или при реакциях в псевдооживленном слое вещества, поддерживаемого восходящим потоком газа, для определения типов течения необходимо принимать во внимание взаимопроникающее движение фаз и компонентов. При изучении условий, опасных для воспламенения частиц, интерес представляет и проблема о поднятии ударной волной слоя частиц насыпной плотности.

В работе рамках модели механики гетерогенных сред исследовано движение ударных волн по смеси газа и мелких твердых частиц с учетом различия скоростей фаз, наличия межгранулярного давления частиц и их конечной объемной концентрации. Аналитически и численно изучен вопрос о том, какие виды сильных разрывов существуют и устойчивы в рассматриваемой дисперсной среде, и при каких условиях они реализуются. Для численного решения возникающих начально-краевых задач с использованием данной модели разработаны схемы третьего порядка точности типа TVD для аппроксимации по пространству, а для аппроксимаций по времени использованы схемы типа Рунге — Кутты пятого порядка точности. Детали численного метода можно найти в [2]. На основе данного алгоритма рассчитаны соответствующие решения в классе бегущих волн. Построена карта режимов течений в виде ударных волн, позволяющая определить значения конечной скорости смеси за ударной волной в зависимости от ее начальной скорости и относительной массовой концентрации газовой фазы. Численно найдены упомянутые стационарные решения для

различных типов ударных волн. Исследована их устойчивость путем решения задачи Коши для нестационарных одномерных уравнений механики гетерогенной среды. Показано, что в случае использования “мягких” граничных условий, когда градиенты всех параметров на границе нулевые, что соответствует условию типа “поршня”, волновые конфигурации для скоростей обеих фаз сохраняют стационарность при своем движении. В случае условий “стенки” на левой границе в этой области образуется зона пониженного давления, и слева направо распространяется волна разрежения. То есть снятие условия типа “поршня” приводит к ослаблению и постепенному затуханию ударной волны под воздействием волны разрежения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 16-19-00010).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров А. В., Фомин В. М., Гостеев Ю. А. *Динамика и воспламенение газозвесей*. Новосибирск: НГТУ, 2006.
2. Бедарев И. А., Федоров А. В. *Структура и устойчивость ударной волны в газозвеси с двумя давлениями*. Вычислительные технологии. 2015. Т. 20. № 2. С. 3–19.

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫМИ РЯДАМИ С РЕКУРРЕНТНО ВЫЧИСЛЯЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

*М. Ю. Филимонов<sup>1,2</sup>, А. Масих<sup>2</sup>, М. И. Емельянов<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург*

<sup>2</sup>*Уральский федеральный университет*

Одним из аналитических методов представления решений нелинейных уравнений в частных производных является метод специальных рядов по степеням специально выбираемых функций, Коэффициенты таких рядов находятся последовательно как решения линейных дифференциальных уравнений. При этом рекуррентность нахождения коэффициентов достигается за счет выбора базисных функций [1] (см. также раздел II в монографии [2]). Такой выбор, в отличие от методов типа Галеркина, позволяет находить решение с контролируемой точностью, поскольку используемые подходы приводят к цепочке конечномерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые оказываются линейными даже для нелинейных исходных уравнений, что позволяет исследовать сходимость специальных рядов [1, 3, 4]. В работе рассмотрен класс нелинейных уравнений в частных производных, для которых удалось построить новые классы решений в виде сходящихся специальных рядов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00401) и госбюджетного проекта 12-П-1-1009.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Filimonov M. Yu., Korzunin L. G., Sidorov A. F. *Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series*. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1993. V. 8. № 2. P. 101–125.
2. Сидоров А. Ф. *Избранные труды: Математика. Механика*. М.: Физматлит, 2001.
3. Filimonov M. Yu. *Application of method of special series for solution of nonlinear partial differential equations*. AIP Conf. Proc. 2014. V. 1631. P. 218–224.
4. Filimonov M. Yu. *Representation of solutions of nonlinear evolution equations in the form of special series with recurrent calculating coefficients*. AIP Conf. Proc. 2015. V. 1690. № 040012.

ИНВАРИАНТНЫЕ ПЛОСКИЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ  
ИЗЭНТРОПИЧЕСКИЕ ВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

С. В. Хабиров

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Для модели идеального газа хорошо известна [1,2] инвариантная подмодель двумерных установившихся течений. Для этой подмодели найдено много точных решений и проведены расчеты краевых задач для безвихревых изэнтропических течений. Безвихревые течения с переменной энтропией возможны только по концентрическим окружностям [1]. Потенциальные изэнтропические течения за ударной волной становятся вихревыми и с переменной энтропией. Для вихревых течений найдены отдельные точные решения [3]. Богатство аналитических и численных результатов обусловлено наличием у подмодели интегралов энтропии, Бернулли, третьей координаты скорости и завихренности. Групповой анализ позволяет систематизировать известные результаты, наметить пути конструктивного поиска новых аналитических решений и методов расчета. С этой целью для изэнтропических вихревых движений решена задача групповой классификации по произвольным элементам: скорости истечения в вакуум, завихренности и по уравнению состояния. Для полученных двух четырехмерных алгебр Ли найдены оптимальные системы неподобных подалгебр. Для некоторых случаев групповой классификации рассмотрены инвариантные подмодели для всех одномерных подалгебр. Проведена физическая интерпретация некоторых инвариантных решений.

Получено движение завихренной жидкости в полосе, на границах которой имеются источники и стоки,двигающиеся в разных направлениях. В полосе может быть прямая контактного разрыва с особенностью завихренности, но также есть другое решение без особенностей.

Получено выпрямление вихревого потока, растекание завихренного газа с окружности (не точечный источник), движение завихренного газа по окружностям, движение по спиральям между двух окружностей и т.п.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-97027-р-поволжье-а), а также Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-8146.2016.1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М.: Наука, 1981.
2. Черный Г. Г. *Газовая динамика*. М.: Наука, 1988.
3. Фридман А. А. *Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости*. Л. — М.: ОНТИ ГТТИ, 1934.

## О ПРОБЛЕМЕ КОШИ — ГЕЛЬФАНДА

Г. М. Хенкин<sup>1</sup>, А. А. Шананин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universite Pierre et Marie Curie, Paris, France

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

В работе рассматривается задача Коши для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \varphi(f) \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad f(x, 0) = f^0(x), \quad (1)$$

где  $f^0(x)$  — непрерывная функция ограниченной вариации на  $\mathbb{R}$  такая, что  $f^0(x) = \alpha^\pm$  при  $\pm x \geq \pm x^\pm$ . Будем для определённости считать, что  $\alpha^- < \alpha^+$  и  $f^0(x)$  принимает значения из отрезка  $[\alpha^-, \alpha^+]$ . Под решением задачи Коши будем понимать обобщенное решение в смысле С. Н. Кружкова. Предположим, что  $\varphi(f)$  — положительная непрерывно дифференцируемая функция, производная которой имеет только изолированные нули. Положим

$$\Phi(u) = \int_{\alpha^-}^u \varphi(y) dy, \quad u \in [\alpha^-, \alpha^+].$$

Пусть  $\Phi^{**}(u)$  — результат двукратного применения преобразования Лежандра — Юнга — Фенхеля к функции  $\Phi(u)$ . Обозначим  $S = \{u \in [\alpha^-, \alpha^+] \mid \Phi^{**}(u) > \Phi(u)\}$ . Предположим, что  $S = (\alpha_0^-, \alpha_0^+) \cup (\alpha_1^-, \alpha_1^+) \cup \dots \cup (\alpha_L^-, \alpha_L^+)$ ;  $\alpha^- = \alpha_0^- < \alpha_0^+ < \alpha_1^- < \dots < \alpha_L^- < \alpha_L^+ = \alpha^+$ ;  $\varphi(\alpha_0^-) \neq c_0$ ;  $\varphi(\alpha_L^+) \neq c_L$ ;  $\varphi(\alpha_l^-) \neq 0$ ,  $l = (1, \dots, L)$ ;  $\varphi(\alpha_l^+) \neq 0$ ,  $l = (0, \dots, L-1)$ . Обозначим  $f(y_l^\pm(t), t) = \alpha_l^\pm$ ,  $y_l^\pm(t) = \mathbf{arg} \max_y \int_y^{+\infty} (f(x, t) - \alpha_l^\pm) dx$ ,

$$c_l = \frac{1}{(\alpha^+ - \alpha^-)} \int_{\alpha_l^-}^{\alpha_l^+} \varphi(y) dy, \quad l = 0, \dots, L. \quad (2)$$

Определим параметры  $d_l(t)$ ,  $l = (0, \dots, L)$  по следующим формулам максвелловского типа:

$$\int_{y_l^-(t)}^{c_l t + d_l(t)} (f(x, t) - \alpha_l^-) dx + \int_{c_l t + d_l(t)}^{y_l^+(t)} (f(x, t) - \alpha_l^+) dx = 0.$$

**Теорема.** *Функции  $d_l(t) = d_l$ ,  $l = (0, \dots, L)$  не зависят от времени. Решение задачи Коши (1) имеет следующую асимптотическую структуру:*

$$\|f(\cdot, t) - \tilde{f}(\cdot, t)\|_{L_1(R)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

$$\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} \alpha^-, & \text{если } x < c_0 t + d_0, \\ \varphi^{-1}(x/t) & \text{если } c_l t + d_l \leq x < c_{l+1} t + d_{l+1}, \quad l = (0, 1, \dots, L), \\ \alpha^+, & \text{если } x > c_L t + d_L, \end{cases}$$

где функция  $\varphi(f)$  определена на дополнении к множеству  $S$ , а  $c_l$  соответственно по формулам (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-07-00075).

## ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

А. М. Хлуднев

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет*

Рассматриваются задачи равновесия упругих тел, содержащих тонкие включения различной природы при наличии отслоений. Именно, рассматриваются упругие, жесткие и полужесткие включения. Для описания упругих включений используются модели упругих балок Бернулли — Эйлера и Тимошенко. Обсуждаются предельные переходы по параметрам жесткости тонких включений и предельные задачи. Исследуются задачи сопряжения вида упругое включение–жесткое включение, упругое включение–упругое включение и находятся условия сопряжения как при наличии излома тонкого включения, так в случае без изломов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 15-11-10000).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Khludnev A. M., Negri M. *Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body*. Z. Angew. Math. Mech. 2012. V. 92. № 5. P. 341–354.
2. Khludnev A. M., Leugering G.R. *Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies*. Math. Mech. Complex Systems. 2014. V. 2. № 1. P. 1–21.



3. Итоу Х., Лойгеринг Г., Хлуднев А. М. *Тонкие включения Тимошенко в упругом теле с возможным отслоением*. ДАН. 2014. Т. 458. № 1. С. 32–35.
4. Khludnev A. M. *Thin inclusions in elastic bodies crossing an external boundary*. Z. Angew. Math. Mech. 2015. V. 95. № 11. P. 1256–1267.
5. Khludnev A. M., Leugering G. R. *On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies*. Math. Mech. Solids. 2015. V. 20. № 5. P. 495–511.
6. Itou H., Khludnev A. M. *On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies*. Math. Meth. Appl. Sciences. doi 10.1002/mma.3279.

## УДАРНО-ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ГАЗОВЗВЕСЯХ

Т. А. Хмель, А. В. Федоров

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск*

Для описания ударно-волновой динамики плотных газовзвесей применяется развитая нами ранее модель двухфазной среды [1], построенная с привлечением молекулярно-кинетических подходов теории гранулированных материалов. В этой модели в рамках уравнений Эйлера интегрально учитывается динамика хаотического движения частиц и вероятность их столкновений, что выражается в уравнении состояния для столкновительного давления частиц. Наличие давления в фазе частиц и соответствующей скорости звука обуславливает возможность существования ударных волн в дискретной фазе, условия на скачке для которых также определены в [1]. В [2] подтверждена возможность стационарного распространения двух различных типов волн с одним скачком и примыкающей зоной релаксации, определено влияние характеристических параметров столкновений частиц на ударно-волновые структуры.

В настоящей работе на основе численного моделирования нестационарных течений показана возможность существования режимов с двумя скачками (двухфронтных) и установлены условия их реализации. Рассмотрены также некоторые задачи ударно-волновой динамики газовзвесей с применением столкновительной модели [1]. Определен вклад столкновительной динамики частиц в процессы диспергирования газовзвесей и картины дифракции ударных волн на прямоугольном уступе. В частности, установлено, что столкновительное давление играет значительную роль в распылении слоя частиц на начальной стадии взаимодействия расходящейся ударной волны со слоем (задача о разлете газовзвеси при центральном взрыве) и при развитии неустойчивости шероховатой поверхности слоя. В задачах дифракции наличие хаотического давления слабо сказывается на формировании слоевых структур за уступом при малых объемных концентрациях частиц. В газовзвесах высокой загрузки (значимых объемных концентраций) распространение ударных волн как в каналах, так и за уступом, характеризуется существенным влиянием столкновительной динамики частиц на структуру течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 16-19-00010).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хмель Т. А. Федоров А. В. *Описание динамических процессов в газовзвешах с привлечением молекулярно-кинетических подходов для учета межчастичных столкновений*. ФГВ. 2014. Т. 50. № 2. С. 81–93.
2. Хмель Т. А. Федоров А. В. *Моделирование распространения ударных и детонационных волн в запыленных средах при учете межчастичных столкновений*. ФГВ. 2014. Т. 50. № 5. С. 53–62.

## ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ И СХЕМА ЧИСЛЕННОГО СЧЕТА

*А. И. Чанышев, О. Е. Белоусова*

*Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН, Новосибирск*

На примере одномерного волнового уравнения для полубесконечного стержня демонстрируется постановка задачи Коши, когда на одной и той же границе тела задаются одновременно и сама функция, подлежащая определению, и ее производная по нормали. Приводится ее решение с использованием формулы Даламбера. Показывается, что в этой постановке не требуются начальные условия — задание на границе стержня перемещения и производной от перемещения по координате (задание деформации) гарантирует существование и единственность решения поставленной задачи [1, 2, 3]. Дается обобщение этой динамической задачи на случай двух и трех переменных. Построенная численная схема позволяет вводить в рассмотрение неоднородность среды, физическую нелинейность, решать динамические задачи теории упругости и пластичности для полуплоскости и полупространства.

Ниже изображена одномерная модель Земли в виде заглубленного полубесконечного стержня, на конце которого при  $x = 0$  задаются изменяющееся во времени перемещение  $u(t) = \alpha(t)$  и производная от перемещения  $u_x(t) = \beta(t)$ . Задача ставится следующим образом: по заданным на границе тела условиям Коши определить то, что находится в области  $x < 0$ , включая источники возмущения.

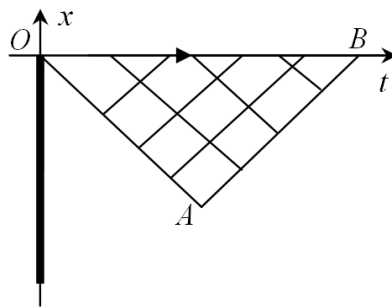


Иллюстрация решаемой задачи.

Для построения численной схемы граничные условия и уравнение равновесия выстраиваются в следующем порядке:

$$u \Big|_{x=0} = \alpha(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \beta(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Первое уравнение определяет смещение  $u$  на границе стержня, второе — смещение на шаге  $x = -h$ , третье уравнение — на шагах  $x = -2h, -3h, \dots$  и так далее.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1979.
2. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Т. *Некорректные задачи математической физики и анализа*. М.: Наука, 1980.
3. Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи*. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

## ЗАДАЧА О РАЗРУШЕНИИ ГОРНЫХ ПОРОД ВОКРУГ ВЫРАБОТКИ

*А. И. Чанышев, И. М. Абдулин*

*Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН, Новосибирск*

Рассматривается запредельное деформирование горных пород, когда эффективное напряжение, характеризующее разрушение элемента среды, падает, а сама деформация растет. Этот факт означает, что нарушается постулат Друкера, гарантирующий единственность решения первой, второй и третьей краевых задач Дирихле, Неймана и Робена.

Показывается, что для случая плоской деформации в области запредельных деформаций система дифференциальных уравнений задачи становится гиперболической с четырьмя в общем случае попарно неортогональными характеристиками, связывающими четыре параметра — среднее напряжение; значение максимального касательного напряжения; угол, определяющий главные оси тензора напряжений; угол поворота. В предельном случае полного разрушения среды характеристики становятся, как и в начале разрушения, совпадающими, с одним отличием — изначально они составляли угол  $45^\circ$  со свободной поверхностью, теперь одни из них повторяют контур границы, другие ей ортогональны. Для определения граничных значений искомых четырех функций необходимо на одной и той же границе, на которой начинается разрушение, задать одновременно и вектор напряжений Коши и вектор перемещений. Если говорить о соотношениях на характеристиках, то они представляют собой дифференциальные формы, в общем случае не являющиеся полными дифференциалами. Для их интегрирования необходимо задавать путь интегрирования. В качестве такого пути предлагается следующий: вдоль каждой характеристики

путь нагружения или интегрирования раскладывается на два участка — на первом участке фиксируются значения углов при изменяющихся значениях среднего напряжения и максимального касательного напряжения, на втором участке изменяются указанные углы при фиксированных значениях напряжений. Путь интегрирования обусловлен механизмом деформирования материалов — вначале в теле выстраивается структура, в которой далее происходит деформация среды. После деформации выстраивается новая структура. В точках пересечений характеристик получаем четыре линейных алгебраических уравнения для определения искомых функций.

В результате получено распределение напряжений и смещений в области запредельных деформаций вокруг выработки кругового сечения для конкретных значений входных параметров. Определена граница, за которой последует область упругопластических и чисто упругих деформаций. Показано, как по переопределенным данным на границе этих областей возможно построение решений в этих областях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шваб А. А. *Существенно переопределенная задача теории упругости*. Сиб. журн. индустр. матем. 2001. Т. 4. № 1. С. 204–207.
2. Чанышев А. И., Абдулин И. М. *Упругопластические задачи в постановке Коши*. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов, Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. С. 4035–4036.

## ОБОБЩЕННЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ВАН ДЕР ПОЛЯ — ДУФФИНГА КАК УРАВНЕНИЕ РЕОЛОГИИ МОЗГА

А. А. Черевко<sup>1,2</sup>, И. В. Уфимцева<sup>2</sup>, А. К. Хе<sup>1,2</sup>, А. П. Чупахин<sup>1,2</sup>, А. А. Тулупов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>3</sup>Институт “Международный томографический центр” СО РАН, Новосибирск

Моделирование столь сложной системы, как гемодинамика мозга, может осуществляться моделями разных уровней и на разных принципах. Одним из подходов, реализованных авторами работы, является метод построения дифференциального уравнения нелинейного осциллятора, описывающего релаксационные колебания в сложной многофазной системе “поток крови–упругая стенка сосуда–окружающая среда мозга” на основе теории обратных задач для дифференциальных уравнений (А. В. Михайлова, А. А. Черевко, А. П. Чупахин, 2014, 2015). Этот алгоритм показал свою эффективность при описании течения крови в церебральных артериях. Уравнение обобщенного нелинейного осциллятора Ван дер Поля — Дуффинга

$$\varepsilon y'' + P_2(y)y' + Q_3(y) = kz(t) \quad (1)$$

является своеобразным уравнением состояния, описывающим реологию этой среды. В уравнении (1) функции  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  — параметры кровотока,  $\varepsilon$  — малый

релаксационный параметр. Функции  $P_2(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2$ ,  $Q_3(y) = b_1y + d_2y^2 + b_3y^3$  характеризуют вязкие и упругие свойства системы. Коэффициенты  $(a_i, b_i)$ , входящие в (1), индивидуальны для каждого пациента и определяются по данным мониторинга кровотока (А. Л. Кривошапкин, А. П. Чупахин, А. А. Черевко, А. К. Хе, К. Ю. Орлов, 2012, 2013). В работе обоснована применимость уравнения (1) для сосудов другого типа: церебральных вен и синусов, а также для силиконовой модели бифуркации сетей артерии. Модель опробована на массивах 137 измерений в артериях, 6 — в синусах, 17 — в венах головного мозга. Модель (1) описывает релаксационные колебания в упругой модели тройника при различных нестационарных режимах течения в сосуде (40 измерений). По итогам обработки измерений можно сделать следующий вывод.

Уравнение (1) очень точно описывает релаксационные колебания в артериях, хорошо — в венах и упругой модели бифуркации, менее точно — в синусах головного мозга.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-0036). Исследование на упругой модели бифуркации сонной артерии поддержано грантом Российского научного фонда (код проекта 14-35-00020).

## ПОДМОДЕЛИ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

*Ю. А. Чиркунов*

*Новосибирский государственный технический университет*

Для пятипараметрической модели нелинейной диффузии в неоднородной среде при наличии поглощения найдены все коэффициенты диффузии и коэффициенты поглощения, при которых эта модель допускает непрерывную группу Ли преобразований, действующую на множестве решений. Для каждой такой модели все существенно различные (не связанные точечными преобразованиями) инвариантные решения либо найдены в явном виде, либо их отыскание сведено к решению нелинейных интегральных уравнений. Наличие произвольных постоянных в этих интегральных уравнениях и формулы производства решений позволяют исследовать различные краевые задачи для рассматриваемой модели. Для полученных инвариантных подмоделей исследованы: 1) диффузионный процесс, для которого в начальный момент времени в фиксированной точке заданы концентрация и ее градиент; 2) диффузионный процесс, для которого в начальный момент времени в фиксированной точке заданы концентрация и ее скорость. При некоторых дополнительных условиях установлены существование и единственность решений краевых задач, описывающих данные процессы. Решение этих задач сведено к решению нелинейных интегральных уравнений. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании диффузии вещества, диффузии электронов проводимости и других частиц, диффузии поля, распространения тепла в неоднородной среде.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Chirkunov Yu. A. *Submodels of the generalization of the Leith's model of the phenomenological theory of turbulence and of the model of nonlinear diffusion in the inhomogeneous media without absorption*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2015. 395501. Vol. 48, No. 39. 22 pp. DOI 10.1088/1751-8113/48/39/395501.
2. Chirkunov Yu. A. *Submodels of model of nonlinear diffusion in the inhomogeneous medium involving absorption*. Journal of Mathematical Physics. 2015. 101502. V. 56. № 10. 19 pp. DOI 10.1063/1.4931911.

## ЕДИНСТВЕННОСТЬ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА УРАВНЕНИЯ ХОПФА СО СЛОЖНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

*А. П. Чугайнова*

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва*

Изучаются решения задачи о распаде произвольного разрыва обобщенного уравнения Хопфа. Решения строятся из последовательности неопрокидывающихся волн Римана и ударных волн, имеющих устойчивую стационарную или нестационарную структуру. Показано, что решение задачи о распаде произвольного разрыва в указанной постановке всегда существует и единственно.

## ЖИДКОСТЬ КОССЕРА — БИНГАМА: КОРРЕКТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ

*В. В. Шелухин*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет*

Для уравнений микрополярной вязкопластической жидкости Бингама исследован вопрос о глобальной разрешимости по времени в случае одномерных течений с периодическими краевыми условиями [1]. В отличие от классической жидкости Бингама, в микрополярной жидкости Бингама имеют место микровращение и микроинерция; кроме того, имеют место два типа твердотельных зон. Предлагаемый метод анализа уравнений отличен от подхода Дюво — Лионса: вместо вариационного неравенства применяется аппроксимация с гладким определяющим уравнением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-01-01091).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Shelukhin V. V., Chemetov N. V. *Global solvability of the one-dimensional Cosserat-Bingham fluid equations*. Journal of Mathematical Fluid Mechanics. 2015. V. 17.3 .3. P. 495–511.

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДЛЯ  
УПРУГИХ ТЕЛ С ТОНКИМИ УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

*В. В. Щербаков*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет*

Конструирование композиционных материалов, обладающих высокой удельной прочностью, жесткостью и вязкостью разрушения обычно достигается путем армирования матрицы высокопрочным и жестким составляющим. Хорошо известно, что уже на стадии изготовления композиционных материалов или на ранней стадии эксплуатации в них появляются трещины. Один из возможных подходов к построению теории разрушения таких конструкций может быть основан на энергетическом критерии типа Гриффитса, который формулируется в терминах первой производной функционала энергии по длине трещины (скорости высвобождения энергии в вершине трещины).

В докладе обсуждаются результаты исследования линейной задачи равновесия для двумерного упругого тела, содержащего тонкое упругое включение с возможным отслоением. В качестве основы при формулировке математической модели взяты идеи, изложенные в [1]. Для описания напряженно-деформированного состояния включения используются уравнения теории упругих балок Бернулли — Эйлера. Наличие отслоения означает существование трещины между включением и упругой матрицей. Исследована регулярность слабого (вариационного) решения задачи. Доказана дифференцируемость функционала энергии по параметру, характеризующему возмущение трещины, получена явная формула для производной. В частности, установлена формула для производной функционала энергии по длине трещины (формула типа Гриффитса). Показано, что при различном выборе векторных полей, описывающих возмущение трещины, можно получить представления для производной функционала энергии в виде инвариантных интегралов, не зависящих от гладких замкнутых кривых, окружающих одну или обе вершины трещины. В частных случаях возмущений, соответствующих локальному сдвигу и растяжению трещины, получены аналоги классических инвариантных интегралов линейной механики разрушения:  $J$ -интеграла Эшелби — Черепанова — Райса и  $M$ -интеграла, см. [2]. Важно отметить, что полученные формулы отличаются от классических наличием новых сингулярных слагаемых, зависящих от поля перемещений тонкого упругого включения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 15-11-10000).

## ЛИТЕРАТУРА

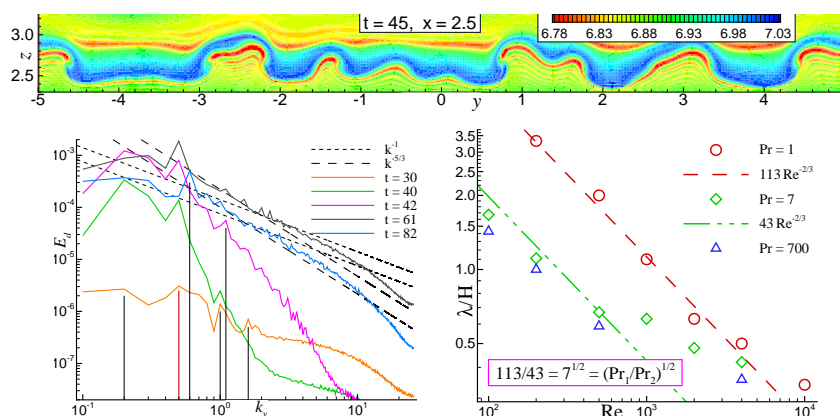
1. Khludnev A. M., Leugering G. R. *Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies*. Math. Mech. Compl. Sys. 2014. V. 2. P. 1–21.
2. Budiansky B., Rice J. *Conservation laws and energy-release rates*. J. Appl. Mech. 1973. V. 40. P. 201–203.

## РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ОПРОКИДЫВАНИИ ПОДВЕТРЕННЫХ ВОЛН

С. Н. Яковенко

Институт теоретической и прикладной механики им С. А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск

Изучены сценарии развития неустойчивости и турбулентности при обрушении подветренных волн, генерируемых двумерным препятствием высоты  $H$  в устойчиво стратифицированном потоке с постоянной входной скоростью  $U$ . Проведен анализ полей скорости, скаляра и спектров, полученных при  $10^2 \leq \text{Re} \leq 10^4$ ,  $1 \leq \text{Pr} \leq 700$ . Случай  $\text{Re} = 4000$  и  $\text{Pr} = 1$  исследован в [1], где разрешение DNS было достаточным для выявления деталей перехода. В частности, результаты DNS при  $\text{Pr} = 1$  и различных числах Рейнольдса показывают, что на трансверсальных спектрах при  $\text{Re} > 200$  наблюдается набор пиков разных мод ( $0.3H \leq \lambda_y \leq 3.3H$ ) во время роста неустойчивости Рэлея — Тейлора (НРТ) и крупномасштабных мод — на стадии турбулентности. Возмущения НРТ малой амплитуды при  $\text{Re} = 200$  и  $\text{Pr} \sim 1$  не приводят к развитию турбулентности в отличие от случая  $\text{Pr} \gg 1$  (см. рисунок), когда спектры на этапе развитой турбулентности иллюстрируют инерционный интервал ( $k_y^{-5/3}$ ).



Изолинии плотности в поперечном сечении, DNS,  $\text{Re} = 200$ ,  $\text{Pr} = 700$  (сверху);  
трансверсальный спектр дисперсии пульсаций скаляра,  $\text{Re} = 200$ ,  $\text{Pr} = 700$  (слева); длина  
волны максимально нарастающего возмущения как функция  $\text{Re}$  и  $\text{Pr}$  (справа)

## ЛИТЕРАТУРА

1. Yakovenko S. N., Thomas T. G., Castro I. P. *Transition through Rayleigh — Taylor instabilities in a breaking internal lee wave*. J. Fluid Mech. 2014. V. 760. P. 466–493.



# ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ РЕШЕНИЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННОЙ СИСТЕМЫ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А. А. Янченко<sup>1,2</sup>, А. П. Чупахин<sup>1,2</sup>, Е. И. Роменский<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>3</sup>Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Одним из способов получения уравнений движения сжимаемой жидкости сквозь упругую пористую среду является метод термодинамически согласованных систем законов сохранения. Данный подход успешно применялся для построения моделей течения двухфазных жидкостей. В общем виде такая система записывается в терминах порождающего термодинамического потенциала и порождающих переменных. При использовании этого подхода все уравнения системы имеют дивергентный вид, она может быть приведена к симметричной форме и является гиперболической при условии выпуклости порождающего потенциала. Важной особенностью термодинамически согласованной системы является то, что на ее решениях выполнен дополнительный закон — закон сохранения энергии [1].

Система уравнений, удовлетворяющая указанным свойствам и описывающая течение сжимаемой жидкости сквозь упругую пористую среду записывается в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha_1 u_k}{\partial x_k} = \lambda(p_1 - p_2), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \rho_1 \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 \alpha_1 u_k^1}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{\partial (u_k^1 - u_k^2)}{\partial t} + \frac{\partial (u_i^1 u_i^1 / 2 - u_i^2 u_i^2 + e^1 + p_1 / \rho_1 - e^2 - p_2 / \rho_2)}{\partial x_k} = -e_{klj} u_l \omega_j - \chi E_{w_k}, \\ \frac{\partial (\alpha_1 \rho_1 u_i^1 + \alpha_2 \rho_2 u_i^2)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_1 \rho_1 u_i^1 u_k^1 + \alpha_2 \rho_2 u_i^2 u_k^2 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 - \alpha_1 \tilde{\sigma}_{ik})}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{\partial \rho F_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho F_{ij} u_k - \rho F_{kj} u_i)}{\partial x_k} = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

В системе (1)  $\alpha_1$  — объемная концентрация упругой среды,  $\rho$  — массовая плотность смеси,  $\rho_1$  — массовая плотность упругой среды,  $u_i$  — скорость смеси,  $u_i^1$  — скорость упругой среды,  $u_i^2$  — скорость жидкости,  $w_i$  — скорость движения упругой среды относительно жидкой,  $F_{ij}$  — тензор градиента упругой деформации элемента среды в целом,  $e^1$  — внутренняя энергия упругой среды,  $e^2$  — внутренняя энергия жидкости,  $E$  — обобщенная энергия,  $e_{klj}$  — полностью антисимметричный единичный тензор,  $\omega_j$  — вспомогательная переменная, введенная для того, чтобы уравнение для разности скоростей записать в дивергентном виде;  $\lambda > 0$  и  $\chi > 0$ .

Упругая и жидкая фаза характеризуются своими индивидуальными уравнениями состояния. Так, внутренняя энергия жидкой фазы имеет следующий вид:

$$e_2 = \frac{c_2^2}{\gamma_2(\gamma_2 - 1)} \left( \frac{\rho_2}{\rho_{20}} \right)^{\gamma_2 - 1} + \frac{c_2^2 \rho_{20} - \gamma_2 p_{20}}{\gamma_2 \rho_2},$$

где  $c_2, \gamma_2, \rho_{20}, p_{20}$  — константы, задающие свойства жидкости. Внутренняя энергия упругой среды ( $e^1$ ) состоит из суммы энергий однородной деформации  $e^l$  и сдвиговой деформации  $e^s$

$$e^1 = e^l + e^s.$$

Более подробно с выбором  $e^s$  можно ознакомиться в [2].

Для системы (1) построена численная схема, основанная на методе конечных объемов. Важной задачей является описание качественных свойств и исследование частных решений системы (1). Такие решения нужны для верификации численного метода. В работе исследуются одномерные стационарные решения системы (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-31-00223).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Роменский Е. И. *Термодинамически согласованная система законов сохранения течения сжимаемой жидкости в пористой упругой среде* Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14. № 4. С. 86–97.
2. Gavrilyuk S., Ndanou S., Hank S. *One-Parameter family of equations state for isotropic compressible solids*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01162870>

## ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ 3D-СЕТИ СОСУДОВ ГОЛОВНОГО МОЗГА ПО ДАННЫМ МРТ МЕТОДОМ ВАРЬИРОВАНИЯ СКАНИРУЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

Г. С. Янькова<sup>3</sup>, С. В. Мальцева<sup>2,3,4</sup>, А. А. Черевко<sup>3,4</sup>, Д. В. Паршин<sup>4</sup>, А. К. Хе<sup>3,4</sup>,  
А. Е. Акулов<sup>1</sup>, М. П. Мошкин<sup>1,3</sup>, А. П. Чупахин<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр Институт цитологии и генетики  
СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

<sup>3</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>4</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Кровеносная система головного мозга является важной и интенсивно работающей системой, снабжающей все участки мозга необходимым количеством кислорода, глюкозы и других веществ. От ее эффективности во многом зависит функционирование организма. Живым системам присуща вариабельность, при сохранении основных параметров отдельные особи или даже линии особей имеют отличия в геометрии сети, значениях ее параметров. Важной задачей является исследование вариабельности строения кровеносной системы мозга, гемодинамических параметров для оценки эффективности гемодинамики мозга.

Для изучения гемодинамики необходимо иметь реальную конфигурацию сосудистой системы головного мозга. Для построения таких конфигураций успешно применяется магнитно-резонансная томография (МРТ). Однако при наличии сильных

извитостей и сужений сосудов в восстановленных трехмерных конфигурациях наблюдаются прерывания сосудов в тех местах, где поток в сосуде параллелен плоскости сканирования.

Для преодоления описанной проблемы прерывания сосудов был предложен метод варьирования наклона сканирующей плоскости [S.V. Maltseva, A.A. Cherevko *et al.*, 2016]. Его суть состоит в сканировании объекта не одним набором параллельных плоскостей (случай стандартного сканирования), а несколькими наборами, задаваемыми нормальными, отклоняющимися от стандартного положения, и последующему усреднению полученных данных. Таким образом, если сосуд был параллелен стандартной сканирующей плоскости, то он уже не будет параллельным к остальным наборам сканирующих плоскостей, что устранит его прерывание на МРТ-изображении.

Метод вариации сканирующей плоскости был применен к 12 мышам двух различных генетических линий: контрольной и с нокаутом по ФНО (TNFKO) на основе генома линии C57Bl/6(WT). Он показал свою эффективность и позволил восстановить артериальную часть сосудистого русла без разрывов.

На основе построенных конфигураций можно сделать достоверный вывод, что у животных с нокаутом по ФНО объем мозгового кровеносного русла меньше, чем у животных контрольной группы.

Для построенных конфигураций проведены гемодинамические расчеты с помощью пакета ANSYS/CFX на базе компьютерного центра НГУ, показавшие различия в гемодинамике мозгового кровотока при различном строении сосудистой системы.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-35-00020, в части проведения экспериментов на томографе Bruker BioSpec 117/16 USR - ИЦиГ СО РАН) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00036, в части построения математической модели). Томографические исследования проводились на базе Центра генетических ресурсов лабораторных животных (RFMEFI61914X0005 и RFMEFI62114X0010).

## TOWARD A UNIVERSAL MODEL OF BREAKING WAVES ON SHALLOW WATER

*S. Gavrilyuk<sup>1,2</sup>, V. Yu. Liapidevskii<sup>2,3</sup>, A. A. Chesnokov<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup>*Aix-Marseille Université, Marseille, France*

<sup>2</sup>*Novosibirsk State University, Russia*

<sup>3</sup>*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of SB RAS, Novosibirsk, Russia*

If a wave approaching the coast is long and the variation of the coastal slope is gradual, spilling breakers usually appear. They are characterized by the appearance of a finite turbulent fluid zone riding down the forward slope of the wave (Longuet — Higgins & Turner, 1974, Duncan, 2001). At the toe of this turbulent zone the wave slope changes sharply, resulting to the flow separation and the vorticity creation. The breaking waves entrain the air into the water by forming ‘whitecaps’ where an intensive dissipation occurs. Such a turbulent zone has a strong influence on the wave evolution.

As it was mentioned in Duncan (2011), theoretical models of spilling breakers are rare. Indeed, beyond the multiphase aspects, the modelling depends crucially on a precise

description of the flow structure. In the case where the flow potentiality is supposed, one actually uses an interesting approach based on a coupling between the dispersive Green — Naghdi equations describing waves far from the coast, and the hyperbolic Saint — Venant equations near the coast (cf. Tissier *et al.* (2012)). The difficulty is to understand when we replace one model by another one. A search of such a “switching criteria” is not a well defined problem even if several empirical criteria were proposed in the literature (wave phase velocity becomes larger than the flow velocity, or the wave slope attains a critical value, for example).

The main issue of our work is a two-layer modelling, where the upper turbulent layer is considered within the framework of shear shallow water flows (cf. Teshukov, 2007, Richard & Gavriluyuk, 2012, 2013, Castro & Lannes, 2014), while the lower layer is potential and can be described by a Green — Naghdi type model. The interaction between layers is taken into account through a natural mixing process, where the mixing velocity is proportional to the intensity of large eddies of the upper layer. Experimental data on the structure of the turbulent flow field under breaking waves show that the frontiers between the turbulent region caused by the wave breaking and the potential region are clearly visible (Nadaoka *et al.* 1989, Lin & Rockwell, 1994). This justifies a two-layer scheme for the modelling of the breaking waves. The model generalizes that derived in Liapidevskii & Chesnokov (2014) where the hydrostatic approximation in both layers was used, and that in Richard & Gavriluyuk (2015) where such a two-layer approach was used in the limit where the thickness of the upper shear layer was vanishing.

In particular, we show that our model is able to describe the transition from undular to breaking bores when the Froude number varies between 1.3 and 1.4. The shoaling and the breaking of solitary waves on mild slopes is also well predicted by the model.

## A THREE-EQUATIONS MODEL FOR THIN FILMS DOWN AN INCLINED PLANE

*G. L. Richard, J. P. Vila*

*Institut de Mathematiques de Toulouse, Universite de Toulouse, France*

Teshukov’s approach to shallow water flows (Teshukov 2007) is based on the hypothesis of weakly sheared flows. This allows to close the problem and to derive a model with equations for mass, momentum and energy balances. Supplemented by dissipation terms, this model is able to capture physical phenomena that previous classical models were not able to handle. In particular, some rapidly varied flows can be correctly described such as breaking wave profiles. The oscillations of the classical hydraulic jump can also be predicted by this model.

This approach can be generalized even if the flow is not weakly sheared as long as a reference flow is known. This is the case for viscous laminar flows of thin liquid films down an inclined plane. The reference flow is the uniform flow with a self-similar parabolic velocity profile called the Nusselt flow. The importance of this approach is to derive a model with the same mathematical structure as the Euler equations of compressible fluids. This structure allows to solve the equations with classical numerical schemes which are reliable and robust.

Starting from an asymptotic expansion around the Nusselt flow, the Navier-Stokes equations and the kinetic energy theorem are averaged over the fluid depth in the 1D case. The hyperbolic structure of the Euler equations of compressible fluids can be derived by writing consistently all additional terms as relaxation source terms in the right-hand part of the equations, apart from capillary dispersive terms and viscous diffusive terms which take a classical form. We get a three-equations model for mass, momentum and energy balances equations for the three variables depth, average velocity and enstrophy.

The model is validated by the calculation of the neutral stability curves and by the numerical simulation of the experiments of Liu & Gollub (1994). The enstrophy variations agree qualitatively with measurements of velocity profiles by Nakoryakov *et al.* (1977) and Alekseenko *et al.* (1985). The velocity of a solitary wave at the limit of high Reynolds numbers can be predicted by a roll wave analysis which generalizes the method of Richard & Gavriluk (2012). This velocity is used to test the nonlinear properties of the model.

## Авторский указатель

- Абдулин И. М., 115  
Абенев М. М., 15  
Аксенов А. В., 10  
Акулов А. Г., 44  
Акулов А. Е., 122  
Алексеев Г. В., 11  
Алексеев С. В., 12  
Аллилуева А. И., 13  
Андреев В. К., 14
- Байкин А. Н., 15  
Банщикова И. А., 17  
Баранникова Д. Д., 78  
Баранникова С. А., 63  
Басманова Е. С., 18  
Батищев В. А., 19  
Баутин С. П., 20  
Бедарев И. А., 108  
Бейзель С. А., 21  
Бекежанова В. Б., 22  
Белоусова О. Е., 114  
Белых В. Н., 23  
Бердников В. С., 24–27  
Бобкова М. С., 28  
Боган Ю. А., 29  
Богданов А. Н., 30  
Бойко А. В., 44  
Борд Е. Е., 30  
Борисов С. П., 31  
Боронина М. А., 32  
Бочкарева А. В., 63  
Бризицкий Р. В., 34  
Бурмистрова О. А., 35
- Валов А. В., 36  
Васильев А. А., 106  
Винокуров В. А., 24  
Винокуров В. В., 24  
Вихтенко Э. М., 37  
Власова С. С., 38  
Вшивков В. А., 32, 47
- Гайламазян А. А., 19  
Гамилов Т. М., 94  
Гетман В. А., 19
- Головин С. В., 15, 36  
Головнев И. Ф., 39  
Головнева Е. И., 39  
Гологуш Т. С., 85  
Голубятников А. Н., 40  
Голых Р. Н., 41  
Гончарова О. Н., 22  
Гребенёв В. Н., 42  
Грек Г. Р., 57  
Григоренко К. С., 69  
Григорьев Ю. Н., 43  
Гришков В. А., 24
- Денисенко Н. С., 44  
Доброхотов С. Ю., 45, 46  
Дружков К. П., 10  
Дудникова Г. И., 47  
Думбсер М., 87
- Емельянов М. И., 109  
Ершов И. В., 43  
Ефимова А. А., 47
- Жибер А. В., 47  
Журавлева Е. Н., 54
- Замураев В. П., 48, 50  
Замыслов В. Е., 20  
Занин Б. Ю., 51  
Занотти М., 87  
Зуев Л. Б., 63  
Зюзина Н. А., 79
- Казаков А. Л., 52  
Казачинский А. О., 59  
Калинина А. П., 48, 50  
Камаева С. Н., 47  
Капцов О. В., 53  
Карабут Е. А., 54  
Кириловский С. В., 54  
Кислицин С. А., 26  
Кобенко С. В., 58  
Ковалевская С. Д., 40  
Ковтуненко П. В., 56  
Ковыркина О. А., 79  
Козлов В. В., 57

- Козлова М. А., 58  
Коробейничев О. П., 57  
Костиков В. К., 57  
Кривошапкин А. Л., 28, 44, 81, 107  
Кривошеина М. Н., 58  
Крутова И. Ю., 59  
Кудрявцев А. Н., 31  
Куйбин П. А., 12  
Куликов И. М., 60  
Куликовский А. Г., 60  
Курмаева К. В., 61
- Лазарева Г. Г., 62  
Лемперт А. А., 52  
Ли Ю. В., 63  
Липатов И. И., 64  
Литвиненко Ю. А., 57  
Лобанов А. В., 66  
Лунев А. Г., 63  
Ляпидевский В. Ю., 64, 67, 68
- Макаренко Н. И., 57, 69, 71, 72  
Макаров П. В., 69  
Макридин Э. В., 71  
Мальцева Ж. Л., 72  
Мальцева С. В., 122  
Масих А., 109  
Машков Д. В., 72  
Медведев С. Б., 42  
Мелешко С. В., 73  
Мержиевский Л. А., 39, 74  
Местникова А. А., 75  
Миненков Д. С., 45, 46  
Митин К. А., 25–27  
Морозов Е. Г., 69  
Мошкин М. П., 44, 122  
Мошкин Н. П., 73
- Назайкинский В. Е., 46  
Назаренко С. В., 42  
Налимов В. И., 76  
Намм Р. В., 37  
Неверов В. В., 77  
Невский С. А., 92
- Обухов А. Г., 78  
Опрышко О. В., 59  
Орлов К. Ю., 28, 44, 81, 107
- Орлов Св. С., 52  
Остапенко В. В., 18, 79
- Павленко А. М., 51  
Павлов М. В., 80  
Папин А. А., 80  
Паршин Д. В., 81, 122  
Перевалова Е. Г., 83  
Перепелица Б. В., 84  
Перышкин А. Ю., 69  
Петренко И. А., 85  
Петров А. Г., 54  
Петров Д. М., 17  
Пешков И. М., 87  
Поплавская Т. В., 54  
Просвиряков Е. Ю., 38, 86  
Протасов В. А., 60  
Пухначев В. В., 73
- Роменский Е. И., 87, 121  
Рудой Е. М., 88  
Рыжков И. И., 89  
Рычков А. Д., 90
- Савелов А. А., 44  
Савкин Л. В., 91  
Садовская О. В., 100  
Садовский В. М., 100  
Сарицкая Ж. Ю., 34  
Сарычев В. Д., 92  
Сарычева Е. В., 92  
Сенницкий В. Л., 93  
Сибин А. Н., 80  
Симаков С. С., 94  
Скачков П. П., 20  
Скрипкин С. Г., 12  
Со Я. Н., 94  
Соболева О. В., 94  
Спивак Ю. Э., 95  
Старовойтов В. Н., 75  
Степанова И. В., 67, 89  
Сухинин С. В., 97, 106
- Такмазьян А. К., 98  
Тальшев А. А., 99  
Тараканов Р. Ю., 69  
Тарасов Б. Г., 100  
Терехова Н. М., 101

- Терешко Д. А., 102  
Терсенов Ал. С., 103  
Терсенов Ар. С., 103  
Тироцци Б., 46  
Титов С. С., 61  
Тихонов В. С., 68  
Ткаченко С. Д., 104  
Токарева М. А., 105  
Толченников А. А., 21  
Трилис А. В., 106  
Тулупов А. А., 44, 116  
Туч Е. В., 58
- Уфимцева И. В., 81, 107, 116
- Федоров А. В., 108, 113  
Федоров Е. А., 62  
Филимонов М. Ю., 109
- Хабиров С. В., 110  
Хакимзянов Г. С., 90  
Хе А. К., 28, 44, 107, 116, 122  
Хенкин Г. М., 111  
Хлуднев А. М., 112  
Хмель Т. А., 113
- Цвелодуб И. Ю., 17  
Цой М. А., 12  
Цырюльников И. С., 54
- Чанышев А. И., 114, 115  
Чепуров А. И., 27  
Червякова М. В., 37  
Черевко А. А., 30, 44, 72, 81, 85, 107, 116,  
122  
Черных И. Г., 60  
Чесноков А. А., 64, 67  
Чиркунов Ю. А., 117  
Чубаров Л. Б., 90  
Чугайнова А. П., 118  
Чупахин А. П., 28, 30, 44, 81, 85, 107, 116,  
121, 122
- Шананин А. А., 111  
Шафаревич А. И., 13  
Шелухин В. В., 118  
Шефер И. А., 22  
Шмаков А. Г., 57  
Шокин Ю. И., 90
- Шторк С. И., 12
- Щербаков В. В., 119
- Яковенко С. Н., 120  
Янченко А. А., 121  
Янченко Н. С., 44  
Янькова Г. С., 122
- Chesnokov A. A., 123
- Gavrilyuk S., 123
- Liapidevskii V. Yu., 123
- Richard G. L., 124
- Vila J. P., 124



---

Подписано в печать 15.02.2016.                      Формат 60×84 1/8.                      Офсетная печать.  
Усл. печ. л. 14.9                      Уч.-изд. л. 11.0                      Тираж 175 экз.                      Заказ № 190.

---

Лицензия ПД N 12-0143 от 22.10.2001  
Отпечатано на полиграфическом участке  
Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
630090, Новосибирск, проспект акад. Лаврентьева, 15.