Методы решения задачи идентификации источников в модели сложного теплообмена

Глеб Гренкин
(Владивостокский государственный университет)

Конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач»
(Новосибирск, 2023)

Модель сложного теплообмена

Сложный теплообмен – это процесс передачи тепла за счет излучения

Рассматривается установившийся процесс, описываемый физическими полями:

$T(x)$ – температура, $I(x, \omega)$ – энергия излучения в направлении ω

$\theta(x)$ – нормированная температура, $\varphi(x)$ — нормированная и усредненная интенсивность излучения

В уравнении теплопроводности возникает член, отвечающий за поглощение и испускание излучения средой

В области:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^4 - \varphi) = f$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^4) = 0$$

На границе:

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0$$

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0$$

Обратная задача

В области Ω действует несколько источников, мощности которых q_i мы не знаем, но знаем пространственную плотность f_i

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^4 - \varphi) = \sum_{i=1}^{m} q_i f_i$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^4) = 0$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов q_i задается интегральное переопределение:

$$\int_\Omega f_j(x)\theta(x)\,dx = r_j, \quad j = 1..m$$

Похожая обратная задача сформулирована для модели переноса кислорода в тканях мозга, когда требуется восстановить источник кислорода по информации о средней концентрации кислорода в крови (Kovtanyuk A.E. et al., 2021)

Теоретические вопросы

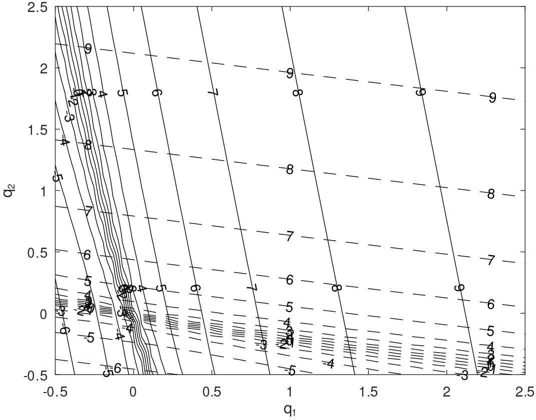
- Существует ли решение обратной задачи? — Да. (Chebotarev A.Yu. et al., 2018)
- Единственно ли решение обратной задачи? — Условно да (доказано при большой температуропроводности).
- Как вычислить решение? — Нелинейная алгебраическая система, но будет ли найденное решение единственно возможным?
- Есть ли у обратной задачи интересные свойства, которые могут облегчить её решение?
- При $f_j(x) \geq 0$ обратная задача сводится к покоординатно монотонной системе нелинейных алгебраических уравнений — какие методы глобального поиска подойдут?

Численный пример

Одномерная задача – теплообмен в плоском слое

Обозначим $F_j(\mathrm{q}) = \int_\Omega f_j(x)\theta[\mathrm{q}](x)\,dx$

На рисунке изолинии $F_1(q_1, q_2)$ (сплошная линия) и $F_2(q_1, q_2)$ (пунктир)



Изолинии прямолинейные, но не равноотстоящие

Идея алгоритма

- Будем решать на каждом шаге вспомогательную обратную задачу, которая определенным образом связана с исходной обратной задачей
- Определим оператор S, который по полю температуры θ дает поле температуры $S\theta$, вычисленное без учета радиационных эффектов, а именно $S\theta = \eta$, где

$$-a\Delta\eta = \sum_{i=1}^{m} q_i f_i$$

$$a\frac{\partial\eta}{\partial n} + \beta(\eta - \theta_b) = 0$$

- Поставим обратную задачу для этой системы с переопределением

$$\int_\Omega f_j(x)\eta(x)\,dx = s_j, \quad j = 1..m$$

Числа s_j нам неизвестны, но они могут быть выражены через связь между η и θ

Идея алгоритма

1. Примем начальные значения s_j равными r_j
2. На каждом шаге решим вспомогательную (линейную) обратную задачу, находим коэффициенты q_i
3. Решаем (нелинейную) прямую задачу с найденными коэффициентами, находим поле температуры $\theta(x)$
4. Корректируем s_j на величину $r_j - \int_\Omega f_j(x)\,\theta(x)\,dx$
5. Переходим к шагу 2

На рассмотренном численном примере алгоритм сошелся, но в 10 раз медленнее, чем метод Ньютона для нелинейной алгебраической системы (реализация в среде Octave методом конечных разностей)

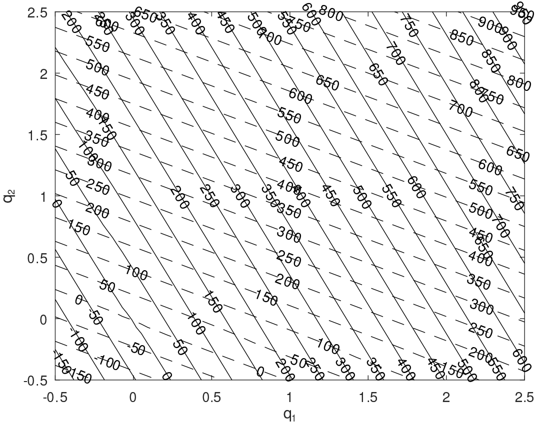
Связь вспомогательной задачи и исходной

η складывается из θ (температуры), ψ (теплового эквивалента лучистой энергии, который зависит от поля θ^4) и константы, которая определяется излучением от границы

Поэтому $\int_\Omega f_j(x)\eta(x)\,dx = \int_\Omega f_j(x)\theta(x)\,dx + \int_\Omega f_j(x)\psi(x)\,dx + C_j$

Поскольку вспомогательная обратная задача имеет единственное решение, то, зная величину второго слагаемого, мы однозначно восстановим мощности источников q_i

График второго слагаемого



Второе слагаемое изменяется значительно быстрее первого

Поскольку сумма первого (предыдущий график) и второго слагаемого линейно зависит от q, то второе слагаемое почти линейно

Условия сходимости алгоритма

1. Угол, образованный изолиниями $\int_\Omega f_j(x)\theta(x)\,dx$, должен содержаться в угле, образованном изолиниями $\int_\Omega f_j(x)\eta(x)\,dx$, чтобы при увеличении $\int_\Omega f_j(x)\theta(x)\,dx$ увеличивались $\int_\Omega f_j(x)\eta(x)\,dx$
2. Расстояние между изолиниями $\int_\Omega f_j(x)\eta(x)\,dx$ не должно превосходить расстояние между изолиниями $\int_\Omega f_j(x)\theta(x)\,dx$

Идея доказательства однозначной разрешимости

1. Пусть $f \geq 0$ п.в. в Ω. Тогда решение u, z краевой задачи
$$-\alpha\Delta z + \kappa_a z = f, \quad \alpha\frac{\partial z}{\partial n} + \gamma z = 0, \quad -a\Delta u = f - \kappa_a z, \quad a\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0$$
неотрицательно (по крайней мере, при условии $\beta/a \leq \gamma/\alpha$).
2. Из 1 вытекает, что $\dfrac{\partial^2 F_j(\mathrm{q})}{\partial q_i \partial q_k} \leq 0$, откуда следует монотонность и ограниченность итерационной последовательности, поскольку значение теплового эквивалента лучистой энергии, предсказываемое алгоритмом на каждом шаге, не превзойдет реального.
3. Доказывается по индукции, что величина теплового эквивалента лучистой энергии в j-м источнике на каждой итерации не превосходит такой же величины на любом решении обратной задачи.
   Отсюда следует, что эти величины (при всех j) на предельном решении не превосходят таких же величин на любом другом решении. Это означает, что суммарная энергия в каждом источнике увеличилась, но тогда температура каждого источника не может быть такой же — она тоже должна где-то увеличиться, значит, предельное решение обратной задачи равно любому другому решению.

Физические допущения

- Предполагается, что уменьшение тепловой энергии во всех источниках приводит к уменьшению их суммарной энергии — в этом случае алгоритм сходится
- Может ли это нарушиться при высоком отражении излучения от стенок и высокой теплоотдаче?
- Возможно введение параметра $\lambda > 0$ (релаксации или ускорения):

$$s_j := s_j + \lambda \left(r_j - \int_\Omega f_j(x)\,\theta(x)\,dx \right)$$

- Из допущения вытекает, что если алгоритм обеспечивает условие $\int_\Omega f_j(x)\,\theta(x)\,dx \le r_j$, то алгоритм не выйдет за пределы области, в которой суммарная энергия не превосходит суммарной энергии на любом решении
- Значит, алгоритм сойдется к решению обратной задачи, которое будет либо единственным, либо имеющим минимальную суммарную энергию среди всех решений

Выводы

- На рассмотренных численных примерах наблюдается закономерность: линии уровня наблюдений практически прямолинейны, что само по себе (будучи теоретически обоснованным) гарантирует единственность решения обратной задачи
- Предложенный алгоритм сходится, если выполняются определенные условия, гарантирующие монотонность и ограниченность приближений
- В дальнейшем анализ данного алгоритма может помочь теоретически обосновать однозначную разрешимость обратной задачи