Численное исследование обратной задачи для интегральной модели с разрывными ядрами.

А. Н. Тында[1], Д. Н. Сидоров[2,3]

[1] *Пензенский государственный университет, кафедра высшей и прикладной математики, 440026 Пенза, Россия*
e-mail: tyndaan@mail.ru

[2] *Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 664033 Иркутск, Россия*
e-mail: dsidorov@isem.irk.ru

[3] *Иркутский национальный исследовательский университет, 664074 Иркутск, Россия*

Работа посвящена численному исследованию интегральных динамических моделей, в основе которых лежат интегральные уравнения Вольтерра I рода с ядрами, терпящими разрывы на множестве гладких кривых. Речь идет об уравнениях вида

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = g(t),\ \ 0 \leq s \leq t \leq T,\ g(0) = 0, \tag{1}$$

где ядро $K(t,s)$ представимо в форме

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s),\ t,s \in m_1, \\ \ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ K_n(t,s),\ t,s \in m_n, \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $m_i = \{t,s \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}$, $\alpha_0(t) = 0,\ \alpha_n(t) = t,\ i = \overline{1,n},\ \alpha_i(t),\ g(t) \in \mathcal{C}^1_{[0,T]}$, функции $K_i(t,s)$ имеют непрерывные производные по переменной t при $(t,s) \in cl(m_i)$, $K_n(t,t) \neq 0$, $\alpha_i(0) = 0$, $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \ldots < \alpha_{n-1}(t) < t$, функции $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t)$ монотонно возрастают и $0 < \alpha_1'(0) \leq \ldots \leq \alpha_{n-1}'(0) < 1$, а $cl(m_i)$ — замыкание множества m_i.

Такие слабо регулярные уравнения Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами были впервые классифицированы Д.Н. Сидоровым [1] и А. Лоренци [2] и активно изучались многими авторами в течение последнего десятилетия. Здесь читатели могут обратиться к [3] и источникам в этой монографии. Операторным уравнениям Вольтерра первого рода с разрывнами ядрами посвящены работы Н.А. Сидорова и Д.Н. Сидорова [4]. Такие модели Вольтерра находят применение при моделировании различных динамических процессов, включая системы накопителей энергии [5, 6], такие модели, а также вопросы численного решения таких интегральных уравнений и их систем подробно рассмотрены в диссертации И.Р. Муфтахова [7].

Обратная задача.

Классическая постановка задачи для модели (1)-(2) заключается в определении $x(t)$ при известных остальных компонентах. Однако ряд естественных приложений модели (1)-(2) на практике приводит обратной задаче, заключающейся в определении линий разрыва $\alpha_i(t)$. При такой постановке уравнение (1) трактуется уже как нелинейное интегральное уравнение с неизвестными пределами интегрирования, численное исследование которого представляет математически более сложную задачу. Сложность дискретизации в первую очередь связана с аппроксимацией интегралов при неизвестных длинах отрезков интегрирования.

Модели, описываемые интегральными уравнениями с неизвестными пределами интегрирования, берут свое начало в работах В.М. Глушкова [8], их экономические приложения исследуются в работах N. Hritonenko и Yu. Yatsenko (см, напр., [9]), ряд прямых и итерационных численных методов А.Н. Тындой предложен в [10, 11].

В настоящей работе для обратной задачи (1)-(2) при различных значениях n предлагаются прямые численные методы дискретизации первого порядка точности с апостериорной верификацией вычислений.

[1] Sidorov D.N. On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel. Diff. Equat. 2013. 49, 210–216. DOI: 10.1134/S0012266113020079

[2] Lorenzi A. Operator equations of the first kind and integro-differential equations of degenerate type in Banach spaces and applications of integro-differential PDE's. Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2013. Volume 1, Issue 2, 50–75.

[3] Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals And Control, In:L. O. Chua, ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87, Singapore: World Scientific Press, 2015 .

[4] Sidorov N.A., Sidorov D.N. On the solvability of a class of Volterra operator equations of the first kind with piecewise continuous kernels. Math. Notes. 2014. 96, 811–826. DOI: 10.1134/S0001434614110170

[5] Sidorov D.; Panasetsky D.; Tomin N.; Karamov D.; Zhukov A.; Muftahov I.; Dreglea A.; Liu F.; Li Y. Toward Zero-Emission Hybrid AC/DC Power Systems with Renewable Energy Sources and Storages: A Case Study from Lake Baikal Region. Energies. 2020. 13, 1226. DOI: 10.3390/en13051226

[6] Sidorov D.; Tynda A.; Muftahov I.; Dreglea A.; Liu F. Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels: Numerical Solution and Application for Power Systems Operation. Mathematics. 2020. 8, 1257 DOI: 10.3390/math8081257

[7] Муфтахов И.Р. Модели Вольтерра накопителей энергии в системах с возобновляемой генерацией: численные методы и приложения: автореф. дис. ... канд. тех. наук. Иркутск, 2022. 19 с.

[8] Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем, Москва, Наука. 1983. 352с.

[9] Yatsenko Yu. Volterra integral equations with unknown delay time. Methods and Applications of Analysis. 1995. 2 (4), pp. 408-419.

[10] Tynda A.N., Iterative numerical method for integral models of a nonlinear dynamical system with unknown delay. PAMM. 2009. Volume 9 Issue 1, p.591—592.

[11] Tynda A.N., On the direct numerical methods for systems of integral equations with nonlinear delays. PAMM. 2008. Volume 8, Issue 1 , p. 10857–10858.