Теоретический анализ метода оптимизации в задаче акустической маскировки материальных тел

Юлия Спивак
Научный руководитель: - д.ф.-м.н., профессор Г.В. Алексеев

Дальневосточный федеральный университет
uliyaspivak@gmail.com

Восьмая международная молодежная научная школа-конференция "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"
1 – 7 сентября 2016
Новосибирск, Россия

Введение

В настоящее время невидимость и маскировка широко обсуждаются в научных кругах, об этом можно судить по количеству публикаций на указанную тему. Под невидимостью будем понимать ситуацию, в которой объект не рассеивает и не поглощает излучение. На сегодняшний день можно выделить две наиболее разработанных стратегии маскировки:
1) активная и 2) пассивная стратегии маскировки;
Стоить отметить, что первые работы в этой области были посвящены электромагнитной маскировке. Далее основные результаты из теории электромагнитной маскировки были перенесены на случай акустической маскировки в 2D случае в Cummer, Shurig (2007), а затем и в 3D случае в Cummer et. al., Chen et. al. (2008). На основе разработанной теории пассивной акустической маскировки было показано, что для создания эффекта абсолютной маскировки любого объекта, помещенного внутрь идеальной маскировочной оболочки, последняя должна быть заполнена неоднородной анизотропной средой, причем некоторые из переменных параметров этой среды должны принимать все значения от нуля до бесконечности.

Постановка задачи

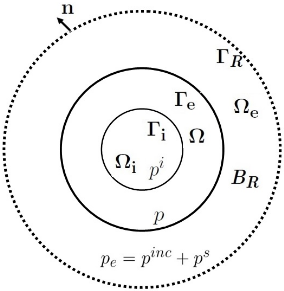

Рис.: Геометрия маскировочной оболочки

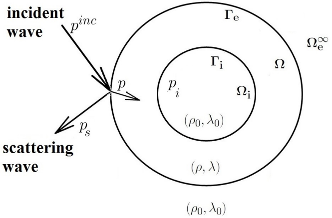

Рис.: Геометрия ограниченной задачи

Постановка задачи акустического рассеяния

Предположим, что во внешности Ω_e^∞ области Ω возникло поле p^{inc}. Падение этого поля на оболочку приводит к появлению преломленного поля p в области Ω, внутреннего рассеянного поля p_i в Ω_i и внешнего рассеянного поля в Ω_e. Задача определения полей p_i в Ω_i, p в Ω и p^s в Ω_e^∞ сводится к нахождению полей p_i в Ω_i, p в Ω и $p_e = p^{inc} + p^s$ в Ω_e^∞ из соотношений:

$$\Delta p_i + k^2 p_i = 0 \ \text{ в } \ \Omega_i, \ \Delta p_e + k^2 p_e = 0 \ \text{ в } \Omega_e^\infty,$$

$$\rho \mathrm{div}(\frac{1}{\rho} \nabla p) + k^2 \eta p = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \tag{1}$$

$$p = p_i, \ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_i}{\partial n} \ \text{ на } \ \Gamma_i, \ \ p = p_e, \ \ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_e}{\partial n} \ \text{ на } \Gamma_e, \tag{2}$$

$$p_e = p^{inc} + p^s, \ \partial p^s(\mathbf{x})/\partial r - ikp^s(\mathbf{x}) = o(r^{-1}), \ r = |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{3}$$

Здесь $\eta = c_0^2/c^2$ – индекс рефракции, (3) имеет смысл условия излучения Зоммерфельда в $\mathbb{R}^3$.

Функциональные пространства

Пусть B_R – шар радиуса R с границей Γ_R, содержащий Ω, $\Omega_e \equiv \Omega_e^\infty \cap B_R$. Ясно, что Ω_e – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega_e = \Gamma_e \cup \Gamma_R$. Будем использовать пространства $H^1(\Omega)$, $H^1(\Omega_e)$, $H^1(B_R)$, $L^2(\Omega)$, $L^2(Q)$, $L^2(\Gamma_r)$, $H^{1/2}(\Gamma_R)$, $H^{-1/2}(\Gamma_R)$, $L^\infty(\Omega)$ и $H^s(\Omega)$ с нормами $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_{1,\Omega_e}$, $\|\cdot\|_{1,B_R}$, $\|\cdot\|_{\Omega}$, $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_{\Gamma_r}$, $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_R}$, $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma_R}$, $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ и $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ соответственно. Положим $L^\infty_{\lambda_0}(\Omega) = \{\lambda \in L^\infty(\Omega) : \lambda(x) \geq \lambda_0 \text{ в } \Omega\}$, $\lambda_0 = \mathrm{const} > 0$, $L^\infty_{\mu_0}(\Omega) = \{\mu \in L^\infty(\Omega) : \mu \geq \mu_0 \text{ в } \Omega\}$, $\mu_0 = \mathrm{const} > 0$. А также пространство $H^1(\Delta, \Omega_e) = \{v \in H^1(\Omega_e) : \Delta v \in L^2(\Omega_e)\}$, наделенное нормой $\|v\|^2_{H^1(\Delta,\Omega_e)} = \|v\|^2_{1,\Omega_e} + \|\Delta v\|^2_{\Omega_e}$, и пространство $\mathcal{P}^{inc} = \left\{v \in H^1(\Omega_e) : \Delta v + k^2 v = 0 \text{ в } \Omega_e\right\} \subset H^1(\Delta, \Omega_e)$.

Задача в ограниченной области

Введем оператор Дирихле–Неймана $T \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$, ставящий в соответствие каждой функции $g \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ функцию $\partial\tilde{p}/\partial n \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$. Здесь $\tilde{p}$ – решение внешней задачи Дирихле

$$\Delta\tilde{p} + k^2\tilde{p} = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty \setminus \overline{B}_R,\ \tilde{p}|_{\Gamma_R} = g,$$

удовлетворяющее условию излучения (3). Исходная задача (1)–(3), рассматриваемая в неограниченной области $\mathbb{R}^3$, эквивалентна краевой задаче (1), (2), рассматриваемой в шаре B_R при следующем дополнительном условии на Γ_R:

$$\frac{\partial p_s}{\partial n} = Tp_s \text{ на } \Gamma_R. \tag{4}$$

Слабая формулировка задачи

Пусть $X = H^1(B_R)$, $P \in X$. Слабая формулировка задачи 1 состоит в нахождении тройки $(P_i, P, P_e) \equiv P \in X$ из

$$a_u(P, S) = \langle f^{inc}, S \rangle \ \ \forall S \in X. \qquad (D)$$

Здесь и ниже $u = (\lambda, \eta)$, где $\lambda = \rho^{-1}$, $a_u : X \times X \to \mathbb{C}$ и $f^{inc} : X \to \mathbb{C}$ – полуторалинейная и антилинейная формы

$$a_u(P,S) = a_0(P,S) + a(\lambda,\mu;P,S),\ a(\lambda,\mu;P,S) = \int_\Omega (\lambda \nabla P \cdot \nabla \overline{S} - k^2 \mu P \overline{S}) dx,$$

$$a_0(P,S) = \rho_0^{-1} \int_{\Omega_i} (\nabla P \cdot \nabla \overline{S} - k^2 P \overline{S}) dx + \rho_e^{-1} \int_{\Omega_e} (\nabla P \cdot \nabla \overline{S} - k^2 P \overline{S}) dx -$$

$$-\rho_0^{-1} \int_{\Gamma_R} T(P) \overline{S} d\sigma,$$

$$\langle f^{inc}, S \rangle = -\rho_0^{-1} \int_{\Gamma_R} T p^{inc} \overline{S} d\sigma + \rho_0^{-1} \int_{\Gamma_R} \frac{\partial p^{inc}}{\partial n} \overline{S} d\sigma.$$

Существование слабого решения

Тождество (D) представляет собой искомую слабую формулировку задачи 1, а ее решение $P \in X$ будем называть слабым решением задачи 1.
Используя свойства оператора Дирихле-Неймана, можно показать, что к задаче (D) применима альтернатива Фредгольма. С ее помощью может быть доказана теорема.
Теорема 1. Пусть $\Gamma \in C^{0,1}$, $K_1 \subset H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $K_2 \subset H^r_{\mu_0}(\Omega)$ – непустые ограниченные множества, где $\lambda_0 > 0$, $\mu_0 > 0$, $s > 5/2, r > 3/2$ и пусть $u = (\lambda, \mu) \in K_1 \times K_2$. Тогда для любого падающего поля $p^{inc} \in \mathcal{P}^{inc}$ задача (D) имеет единственное решение $P_u \in X$, которое удовлетворяет оценке

$$\|P_u\|_X \leq C_0 \|p^{inc}\|_{1,\Omega_e}.$$

Здесь C_0 зависит от Ω, R, k и размеров множеств K_1 и K_2, но не зависит от λ и μ.

Функционал качества

Экстремальные задачи состоят в минимизации определенных функционалов качества, зависящих от главного состояния (акустического поля $P = (p_i, p, p_e) \in X$) и неизвестных функций (управлений), удовлетворяющих уравнению состояния, имеющему вид слабой формулировки (D) задачи. Роль функционалов качества играют:

$$I_1(P) = \|P - p^d\|_Q^2 = \int_Q |P - p^d|^2 dx,\ I_2(P) = \|P - p^d\|_{1,Q}^2.$$

Здесь функция $p^d \in L^2(Q)$ (либо $p^d \subset H^1(Q)$) моделирует измеренное в некоторой подобласти $Q \subset \Omega_i \cup \Omega_e$ распределение акустического поля.

Выбор управлений

В качестве управлений выбираются функция $\lambda = \rho^{-1}$, обратная к плотности ρ, и функция $\mu = \lambda\eta$. Предполагая, что λ и μ являются элементами пространств Соболева $H^s(\Omega)$ и $H^r(\Omega)$, $s > 0$, $r > 0$, вводится следующий функционал:

$$J_j(P, u) = \frac{\alpha_0}{2} I_j(P) + \frac{\alpha_1}{2} \|\lambda\|^2_{s,\Omega} + \frac{\alpha_2}{2} \|\mu\|^2_{r,\Omega}.$$

Здесь α_0, α_1 и α_2 – неотрицательные параметры, служащие для регулирования относительной важности каждого из слагаемых в J_j. Будем считать, что управления λ и μ могут изменяться в некоторых множествах K_1 и K_2, причем выполняются следующие условия:

(j) $K_1 \subset H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $K_2 \subset H^r_{\mu_0}(\Omega)$ – непустые выпуклые замкнутые множества, где $s > 5/2$, $r > 3/2$, $\lambda_0, \mu_0 = \mathrm{const} > 0$, $\alpha_0 > 0$.

(jj) $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ и функционал I ограничен снизу либо $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, а K_1 и K_2 – ограниченные множества.

Постановка задачи управления

Полагая $K{=}K_1 \times K_2$, введем оператор $G : X \times K \times \mathcal{P}^{inc} \to X^*$ формулой

$$\langle G(P,u,p^{inc}),S\rangle = a_u(P,S) - F(S),\ S \in X,\ u=(\lambda,\mu)$$

и запишем слабую формулировку (D) задачи 1 в виде уравнения $G(P,u,p^{inc})=0$. Пусть $I : X \to \mathbb{R}$ — произвольный (пока) слабо полунепрерывный снизу функционал качества. Рассматривается экстремальная задача

$$J(P,u) \equiv J(P,\lambda,\mu) \equiv \frac{\alpha_0}{2} I(P) + \frac{\alpha_1}{2}\|\lambda\|^2_{s,\Omega} + \frac{\alpha_2}{2}\|\mu\|^2_{r,\Omega} \to \inf,$$

$$(P,u) \equiv (P,\lambda,\mu) \in X \times K,\ G(P,u,p^{inc}) = 0. \qquad (C)$$

Для исследования задачи (C) применяется математический аппарат исследования гладко-выпуклых экстремальных задач условной минимизации.

Существование оптимального решения

Теорема 2. Пусть выполняются условия (j) и (jj), тогда задача (C) имеет по крайней мере одно решение.

Теорема 3. Пусть при выполнении условий (j) пара $(\hat{P}, \hat{u}) \equiv (\hat{P}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) \in X \times K$ является решением задачи (C). Тогда существует единственный множитель Лагранжа $R \in X$, который является решением сопряженной задачи в виде уравнения Эйлера–Лагранжа $a_0(S, R) + a(\hat{\lambda}, \hat{\mu}; S, R) = -(\alpha_0/2)\langle I'_P(\hat{P}), S\rangle \ \forall S \in X$ и выполняются вариационные неравенства

$$\alpha_1(\hat{\lambda}, \lambda - \hat{\lambda})_{s,\Omega} + \mathrm{Re}((\lambda - \hat{\lambda})\nabla \hat{P}, \nabla R) \geq 0 \ \ \forall \lambda \in K_1,$$

$$\alpha_2(\hat{\mu}, \mu - \hat{\mu})_{r,\Omega} - \mathrm{Re}\, k^2((\mu - \hat{\mu})\hat{P}, R) \geq 0 \ \ \forall \mu \in K_2.$$

Сопряженная задача вместе с вариационными неравенствами и прямой задачей (D) образует систему оптимальности для (C).

Система оптимальности

Система оптимальности играет важную роль при изучении свойств решений задачи управления. На ее основе могут быть разработаны эффективные численные алгоритмы решения задачи. Кроме того, на основе анализа системы оптимальности могут быть установлены достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решений конкретных экстремальных задач. Имея в виду последнюю цель, предположим, что функция p^{inc}, описывающая падающее поле, изменяется в некотором ограниченном множестве $\mathcal{P}_{ad} \subset \mathcal{P}^{inc}$. Обозначим через $(P_1, u_1) \in X \times K$ произвольное решение задачи (C), отвечающее заданным функциям $p^d = p_1^d$ и $p^{inc} = p_1^{inc}$. Через $(P_2, u_2) \in X \times K$ обозначим решение той же задачи, отвечающее возмущенным функциям $\tilde{p}^d = p_2^d$ и $\tilde{p}^{inc} = p_2^{inc}$.

Оценки устойчивости

Теорема 4. Пусть пара (P_l, u_l), где $u_l = (\lambda_l, \mu_l)$, является решением задачи (C), отвечающим заданным функциям $p_l^d \in L^2(Q)$ и $p_l^{inc} \in \mathcal{P}^{inc}$, $l = 1, 2$. Предположим, что

$$\alpha_1(1-\varepsilon) > 5\alpha_0 V C_2^2 C_s^2 M_P M_P^0,\ \alpha_2(1-\varepsilon) > 5\alpha_0 C_2^2 C_r^2 M_P M_P^0,$$

$$M_P = C_2 \sup_{p^{inc} \in K^{inc}} \|p^{inc}\|_{1,\Omega_e},\ M_P^0 = M_P + \max(\|p_1^d\|_Q, \|p_2^d\|_Q).$$

Тогда справедливы оценки

$$\|P_1 - P_2\|_Q \le \|p_1^d - p_2^d\|_Q + (a\|p_1^{inc} - p_2^{inc}\|_{1,\Omega_e} + b\|p_1^{inc} - p_2^{inc}\|_{1,\Omega_e}^2)^{1/2}$$

$$\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{s,\Omega} \le \sqrt{\alpha_0/\varepsilon\alpha_1}\Delta,\ \|\mu_1 - \mu_2\|_{r,\Omega} \le \sqrt{\alpha_0/\varepsilon\alpha_2}\Delta,$$

$$\|P_1 - P_2\|_X \le C_2[M_P(C_s\sqrt{\alpha_0/\varepsilon\alpha_1} + k^2 C_r\sqrt{\alpha_0/\varepsilon\alpha_2})\Delta] + C_2\|p_1^{inc} - p_2^{inc}\|_{1,\Omega}$$

$$\Delta = (1/2)\|p_1^d - p_2^d\|_Q + \varphi(\|p_1^{inc} - p_2^{inc}\|_{1,\Omega_e}),$$

$$a = 2C_2 M_P^0,\quad b = 2C_2 M_P^0 M_P^{-1}.$$

Заключение

Таким образом, были рассмотрены задачи маскировки материальных тел от акустической локации. Описан приближенный метод маскировки, основанный на использовании методов оптимизации задачи. Указанный метод был применен для исследования трехмерной задачи маскировки от акустической локации. В дальнейшим этот метод планируется развить и применить для решения задач, возникающих при использовании смешанного типа маскировки основанного на совместном использовании пассивной и активной стратегий маскировки.

Спасибо за внимание!