

Численное исследование задачи маскировки материальных тел на основе методов оптимизации

Лобанов А. В.

Лаборатория вычислительной аэро-гидродинамики
Институт прикладной математики
Дальневосточное Отделение Российской Академии Наук
Радио 7, Владивосток, Россия
alekslobanov1@mail.ru

Теория и численные методы решения обратных и некорректных
задач

1–7 сентября, 2016

Новосибирск, Академгородок, Россия

- Введение
- Электромагнитная маскировка
- Анализ задачи маскировки на основе замены внутреннего слоя $a < r < a + \delta$ малым слоем (РЕМС – материалом)
- Оптимизационный алгоритм

Введение. Методы и стратегии маскировки

Разработанные к настоящему времени методы и стратегии маскировки принято разбивать на два основных класса:

Пассивные стратегии

- Метод оптических преобразований (“transformation optics”)
- Метод поверхностной маскировки (“mantle cloak”)
- Метод подавления рассеяния за счет плазмонических устройств (“plasmonic cloaking”)
- Метод подавления рассеяния за счет аномальных локализованных резонансов (“anomalous localized resonances”)

Активные стратегии

- Метод активного гашения (“noise reduction”)

Введение. Класс активных стратегий

Класс активных стратегий основан на использовании для подавления рассеяния маскируемого объекта активных источников. Он берет свое начало от метода активного гашения (Г.Д. Малюжинцев, в 1970 г.). Исследованиям в этой области “noise reduction” посвящены работы:

Г.Д. Малюжинцев (Труды Акуст. ин-та, 1971. Вып. 15)

М.В. Федорюк (Акуст. журн. 1972. Т. 25)

M. Gessel, G.A. Mangiate (J. Sound Vibr. 1972. V. 23)

М.В. Федорюк (Акуст. журн. 1975. Т. 21)

Г.В. Алексеев, Е.Г. Комаров (Акуст. журн. 1993. Т. 39)

Г.В. Алексеев, Е.Н. Мартыненко (Акуст. журн. 1995. Т. 41)

В.П. Иванов (Акуст. журн. 1993. Т. 39)

C.R. Fuller, S.J. Elliott, P.A. Nelson (Active control of vibrations. London. Academic. 1996)

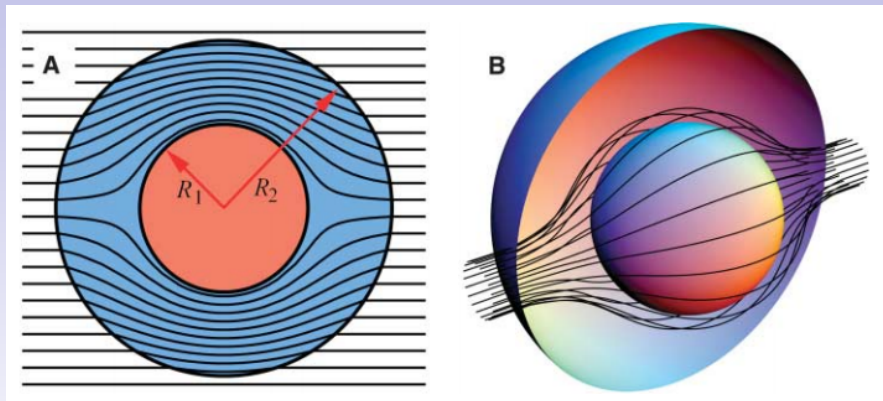
Г.В. Алексеев, Т.С. Комашинская (Акуст. журн. 2003. Т. 49)

Представление об этих и ряде других методов маскировки и их основателях можно найти в обзоре: А.Е. Дубинов, Л.А. Мытарева, Маскировка материальных тел методом волнового обтекания. Успехи физ. наук. 2010. Т. 180. С. 475-501.

Метод оптических преобразований (МОП)

- J.B. Pendry, D. Schurig, D.R. Smith. Controlling electromagnetic fields. Science. 2006. V. 312. P. 1780-1782.
- U. Leonhardt. Optical conformal mapping. Science. 2006. V. 312. P. 1777-1780.
- Л.С. Долин “О возможности сопоставления трехмерных электромагнитных систем с неоднородным анизотропным заполнением” (Известия вузов. Радиоп физика в 1961 г.)

Введение. Класс пассивных стратегий



J.B. Pendry, D. Schurig, D.R. Smith. Controlling electromagnetic fields. Science. 2006. V. 312. P. 1780-1782.

Электромагнитная маскировка. Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^2 со связным дополнением $\Omega^c = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ и липшицевой границей Γ . Соответствующая прямая задача рассеяния сводится к нахождению функций v в Ω и $u = u^{inc} + u^s$ в Ω^c , удовлетворяющих уравнениям

$$\Delta v + k^2 \delta(x)v = 0 \text{ в } \Omega, \quad \Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } \Omega^c = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \quad (1.1)$$

$$v - u = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} = i\eta(x)u \text{ на } \Gamma, \quad (1.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0 \quad \text{при } r = |x| \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Здесь u^{inc} – падающая волна, u^s – рассеянная волна, η – поверхностная проводимость границы Γ , ω – угловая частота, ε_0 и μ_0 – постоянные электрическая и магнитная проницаемости, $\delta(x)$ – индекс рефракции диэлектрического препятствия Ω .

Схема исследования задачи 1

- Ввод функциональных пространств. Сведение к задаче в ограниченной области
- Вывод слабого решения задачи 1
- Доказательство существования и единственности слабого решения задачи 1
- Постановка задачи управления
- Доказательство разрешимости задачи управления
- Вывод системы оптимальности и на основе ее анализа устанавливается единственность и устойчивость оптимальных решений

- Пространства Соболева $H^1(\Omega)$, $H^1(\Omega_e)$
- Пространства следов $H^{1/2}(\Gamma_R)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_R)$
- Пространство $H^1(\Delta, \Omega_e) = \{v \in H^1(\Omega_e) : \Delta v \in L^2(\Omega_e)\}$
- Нормы $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_{1,\Gamma_e}$, $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_R}$, $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma_R}$, $\|\cdot\|_{L^\infty(\Gamma)}$, $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$
- Скалярные произведения и нормы в $L^2(Q)$ обозначаются через $(\cdot, \cdot)_Q$ и $\|\cdot\|_Q$
- Скалярные произведения и нормы в $L^2(\Gamma)$ обозначаются через $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ и $\|\cdot\|_\Gamma$

Сведение к задаче в ограниченной области

Введем оператор Дирихле-Неймана $T : H^{1/2}(\Gamma_R) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_R)$, который ставит в соответствие каждой функции $g \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ функцию $\partial\tilde{u}/\partial n \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$

$$\Delta\tilde{u} + k^2\tilde{u} = 0 \text{ в } \Omega^c \setminus \bar{B}_R$$

Задача (1.1)–(1.3), рассматриваемая на всей плоскости \mathbb{R}^2 , эквивалентна задаче (1.1), (1.2), рассматриваемой в круге B_R при следующем граничном условии для рассеянного поля u^s на Γ_R :

$$\partial u^s / \partial n = Tu^s \text{ на } \Gamma_R. \quad (1.4)$$

Будем ссылаться на задачу (1.1), (1.2), (1.4) как на задачу 1.

Слабая формулировка задачи 1

Пусть $X = H^1(B_R)$, $\Phi \in X$. Слабая формулировка задачи 2 состоит в нахождении $U \in X$ из

$$a^\eta(U, \Phi) \equiv a_0(U, \Phi) - a_\eta(U, \Phi) = \langle f, \Phi \rangle \quad \forall \Phi \in X. \quad (1.5)$$

$$a_0(U, \Phi) = \tilde{a}_0(U, \Phi) - \int_{\Gamma_R} \bar{\Phi} T U d\sigma, \quad \tilde{a}_0(U, \Phi) = \int_{\Omega} (\nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla U - k^2 \delta \bar{\Phi} U) dx + \\ + \int_{\Omega_e} (\nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla U - k^2 \bar{\Phi} U) dx,$$

$$a_\eta(U, \Phi) = i(\eta U, \Phi)_\Gamma \equiv i \int_{\Gamma} \eta \bar{\Phi} U d\sigma, \quad \langle f, \Phi \rangle = - \int_{\Gamma_R} \bar{\Phi} T U^{inc} d\sigma + \int_{\Gamma_R} \bar{\Phi} \frac{\partial U^{inc}}{\partial n} d\sigma$$

Решение $U \in X$ задачи (1.5) называется слабым решением задачи 2.

Слабая формулировка задачи 1

Теорема 1.1

Пусть при выполнении условий (i) Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^2 с границей $\Gamma \in \mathcal{C}^{0,1}$, а множество Ω^c – связно, $K \subset L_{\eta_0}^\infty(\Gamma)$ – непустое ограниченное множество, где $\eta_0 > 0$ и пусть $\eta \in K$. Тогда для любого падающего поля $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$ задача (1.5) имеет единственное решение $U_\eta \in X$, которое удовлетворяет оценке

$$\|U_\eta\|_X \leq C_0 \|u^{inc}\|_{1, \Omega_e} \quad \forall \eta \in K.$$

Здесь C_0 зависит от Ω , k , R , δ , но не зависит от η .

Постановка задачи управления

В качестве функционала качества выбирается следующий:

$$I(U) = \|U - u^d\|_Q^2 = \int_Q |U - u^d|^2 dx. \quad (1.6)$$

В качестве управления выбирается проводимость $\eta \in H^s(\Gamma)$ и вводится следующий функционал:

$$J(U, \eta) = (\alpha_0/2)I(U) + (\alpha_1/2)\|\eta\|_{S,\Gamma}^2. \quad (1.7)$$

(j) $\Gamma \in C^{1,1}$; $\alpha_0 > 0$; $K \subset H_{\eta_0}^s(\Gamma)$ – непустое выпуклое замкнутое множество, где $s > 1/2$, $\eta_0 > 0$.

Вводится оператор $G: X \times K \times \mathcal{H}^{inc} \rightarrow X^*$ формулой

$$\langle G(U, \eta, u^{inc}), \Phi \rangle = a_0(U, \Phi) - i(\eta U, \Phi)_\Gamma - \langle f, \Phi \rangle,$$

и переписывается слабая формулировка (1.5) задачи 1 в виде

$$G(U, \eta, u^{inc}) = 0$$

Теорема существования решения задачи управления

Рассматривается следующая задача условной минимизации:

$$J(U, \eta) = \frac{\alpha_0}{2} I(U) + \frac{\alpha_1}{2} \|\eta\|_{s, \Gamma}^2 \rightarrow \inf,$$

$$G(U, \eta, u^{inc}) = 0, (U, \eta) \in X \times K. \quad (1.8)$$

Теорема 1.2.

Пусть при выполнении условий (i), (j), $\alpha_1 \geq 0$ и K – ограниченное множество, либо $\alpha_1 > 0$. Тогда задача (1.8) имеет по крайней мере одно решение $(U, \eta) \in X \times K$.

Теорема 1.3.

Пусть при выполнении условий (j) пара $(\hat{U}, \hat{\eta}) \in X \times K$ является решением задачи (1.8). Тогда существует единственный ненулевой множитель Лагранжа $P \in X$, который удовлетворяет комплексному уравнению Эйлера-Лагранжа

$$a_0(\Psi, P) - i(\hat{\eta}\Psi, P)_\Gamma = -\alpha_0(\Psi, \hat{U} - u^d)_Q \quad \forall \Psi \in X. \quad (1.9)$$

и справедлив принцип минимума, эквивалентный вариационному неравенству:

$$\alpha_1(\hat{\eta}, \eta - \hat{\eta})_{S,\Gamma} - \operatorname{Re}[i((\eta - \hat{\eta})\hat{U}, P)_\Gamma] \geq 0 \quad \forall \eta \in K. \quad (1.10)$$

Прямая задача (1.5), тождество (1.9) и вариационное неравенство (1.10) образуют систему оптимальности для задачи (1.8).

Анализ двумерной цилиндрической оболочки

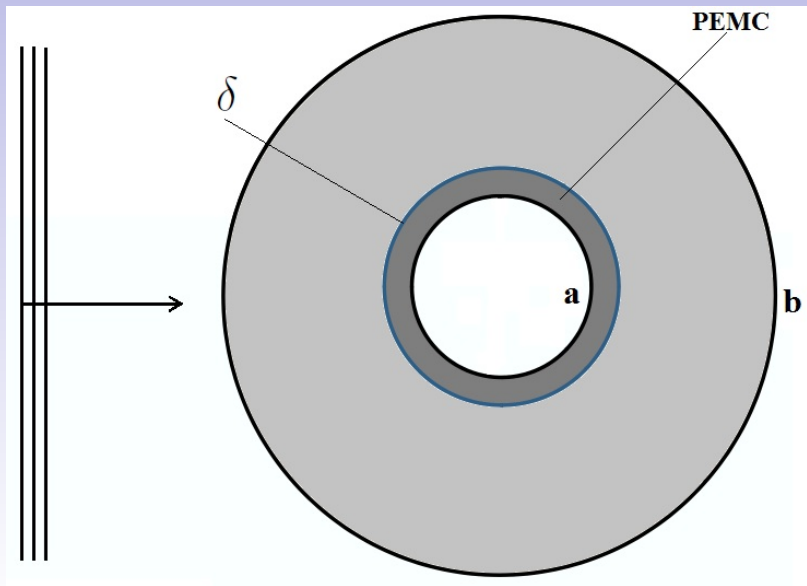
Для достижения абсолютного маскировочного эффекта рассматриваемую оболочку $a < r < b$ следует заполнить анизотропной средой с параметрами (Pendry et al. (2006), Ruan et al. (2007)):

$$\varepsilon_r = \mu_r = \frac{r-a}{r}, \quad \varepsilon_\theta = \mu_\theta = \frac{r}{r-a}, \quad \varepsilon_z = \mu_z = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2 \frac{r-a}{r}. \quad (2.1)$$

Поведение электрического поля E_z описывается 2-D уравнением Гельмгольца

$$\frac{1}{\varepsilon_z r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\mu_\theta} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{\varepsilon_z r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right) + k_0^2 E_z = 0,$$

Внутренняя часть оболочки $a < r < a + \delta$ состоит из РЕМС-слоя, тогда как внешняя часть $a + \delta < r < b$ является частью идеальной маскировочной оболочки с параметрами (2.1).



РЕМС-слой в задаче маскировки

Краевые условия на границе РЕМС-слоя имеют вид

$$n \times (H + ME) = 0, \quad n \cdot (D - MB) = 0. \quad (2.2)$$

С помощью метода Фурье полные поля во всех областях можно записать в виде

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} [J_l(k_0 r) + a_l H_l^{(1)}(k_0 r) - i\rho_0 J_l'(k_0 r) - i\rho_0 a_l H_l^{(1)'}(k_0 r)] e^{il\theta},$$
$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} [b_l J_l(k_0 f(r)) + c_l H_l^{(1)}(k_0 f(r)) - i\rho_0 f'(r)(b_l J_l'(k_0 f(r)) + c_l H_l^{(1)'}(k_0 f(r)))] e^{il\theta}, \quad (2.3)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} [f'(r) d_l H_l^{(1)'}(k_0 f(r)) - i\eta_0 d_l H_l^{(1)}(k_0 f(r))] e^{il\theta}$$

где a_l , b_l , c_l и d_l – неизвестные коэффициенты рассеяния, d_l – кросс-поляризованный коэффициент.

Граничные условия

Для нахождения a_l , b_l , c_l и d_l выводится СЛАУ. Граничные условия на поверхности раздела $r = b$, имеют вид

$$H_{0z}^{inc} + H_{0z}^{sc} \equiv H_{0z} = H_{1z} = H_{1z}^i + H_{1z}^{sc} \quad \text{при } r = b, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$E_{0\theta}^{inc} + E_{0\theta}^{sc} \equiv E_{0\theta} = E_{1\theta} = E_{1\theta}^i + E_{1\theta}^{sc} \quad \text{при } r = b, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Граничные условия на внутренней границе раздела $r = a + \delta$, имеют вид

$$H_{1z} + ME_{1z} \equiv H_{1z}^i + H_{1z}^{sc} + M(E_{1z}^i + E_{1z}^{sc}) = 0, \quad r = a + \delta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$H_{1\theta} + ME_{1\theta} \equiv H_{1\theta}^i + H_{1\theta}^{sc} + M(E_{1\theta}^i + E_{1\theta}^{sc}) = 0, \quad r = a + \delta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

где M – адмиттанс РЕМС-материала.

Подставляя приведенные выше разложения полей приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_l, b_l, c_l и $d_l, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$J_l(k_0 b) + a_l H_l^{(1)}(k_0 b) = b_l J_l(k_0 f(b)) + c_l H_l'(k_0 f(b)),$$

$$J_l'(k_0 b) + a_l H_l^{(1)'}(k_0 b) = b_l f'(b) J_l'(k_0 f(b)) + c_l f'(b) H_l^{(1)'}(k_0 f(b)),$$

$$b_l J_l(k_0 f(a + \delta)) + c_l H_l^{(1)}(k_0 f(a + \delta)) - Mi\eta_0 d_l H_l^{(1)}(k_0 f(a + \delta)) = 0,$$

$$d_l H_l^{(1)'}(k_0 f(a + \delta)) - Mi\eta_0 b_l J_l'(k_0 f(a + \delta)) - Mi\eta_0 c_l H_l^{(1)'}(k_0 f(a + \delta)) = 0.$$

Решив эту систему, если, конечно, ее определитель отличен от нуля, и подставив найденные коэффициенты a_l, b_l, c_l и d_l в формулы для полей во всех областях, мы определим тем самым поле на всей плоскости.

Программная реализация разработанного алгоритма состояла из следующих этапов.

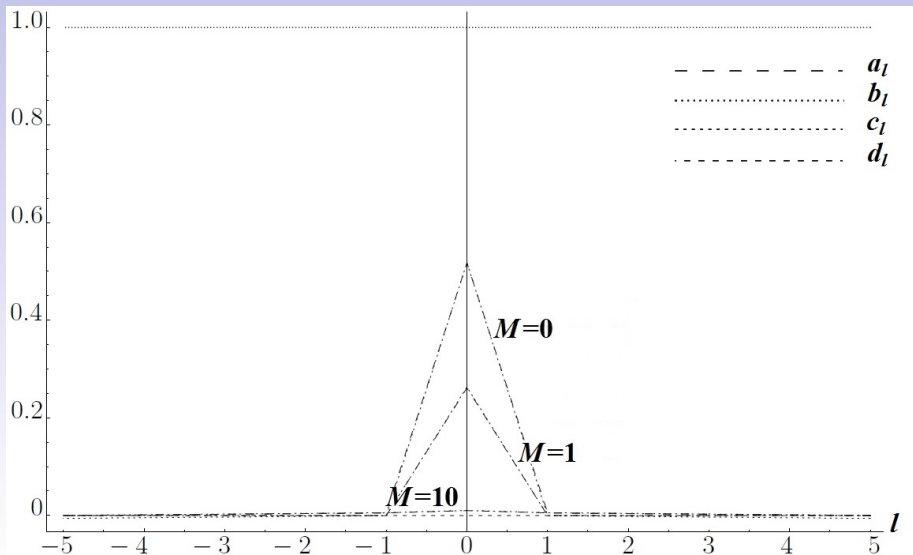
1. Задаются внутренний и внешний радиусы a, b , частота ω и параметры ε_0, μ_0 внешней среды (воздуха).
2. Задается число возможных значений $M : (0, 1, 10, 10^3, 10^6)$ и предельный интервал изменения параметра $\delta : [10^{-8}a, 10^{-2}a]$.
3. Организуются два цикла: внешний по значениям числа M и параметру l , внутренний по значению δ .
4. Для каждой тройки (M, l, δ) вычисляются следующие параметры:

$$\|A\|, \|A^{-1}\|, \sigma_{\min}(A), \sigma_{\max}(A), \sigma(A) = \sigma_{\max}(A)/\sigma_{\min}(A), \tilde{\sigma}(A),$$

а также коэффициенты a_l, b_l, c_l, d_l .

5. Выдаются графики зависимостей вычисленных значений параметров коэффициентов a_l, b_l, c_l и d_l от параметра δ (для фиксированных l и M) либо l (для фиксированных δ и M).

Зависимость коэффициентов рассеяния от l при $\delta = 10^{-2}a$, $M = 0, 1, 10$



Вычисленные значения модулей коэффициентов
рассеяния a_l , b_l , c_l и d_l от δ при $l = 0$, $M = 0$

δ	Коэффициенты рассеяния a_l , b_l , c_l и d_l			
	a_l	b_l	c_l	d_l
$\delta = 10^{-2}a$	0,51811	1,00000	0,51811	0,00000
$\delta = 10^{-3}a$	0,30541	1,00000	0,30541	0,00000
$\delta = 10^{-4}a$	0,21315	1,00000	0,21315	0,00000
$\delta = 10^{-5}a$	0,16308	1,00000	0,16308	0,00000
$\delta = 10^{-6}a$	0,13189	1,00000	0,13189	0,00000
$\delta = 10^{-7}a$	0,11065	1,00000	0,11065	0,00000
$\delta = 10^{-8}a$	0,09528	1,00000	0,09528	0,00000
$\delta = 10^{-9}a$	0,08364	1,00000	0,08364	0,00000

Вычисленные значения модулей коэффициентов рассеяния a_l , b_l , c_l и d_l от δ при $l = 1$, $M = 0$

δ	Коэффициенты рассеяния a_l , b_l , c_l и d_l			
	a_l	b_l	c_l	d_l
$\delta = 10^{-2}a$	0,00545	1,00000	0,00545	0,00000
$\delta = 10^{-3}a$	0,00005	1,00000	0,00005	0,00000
$\delta = 10^{-4}a$	$5,51984 \cdot 10^{-7}$	1,00000	$5,51984 \cdot 10^{-7}$	0,00000
$\delta = 10^{-5}a$	$5,51986 \cdot 10^{-9}$	1,00000	$5,51986 \cdot 10^{-9}$	0,00000
$\delta = 10^{-6}a$	$5,51986 \cdot 10^{-11}$	1,00000	$5,51986 \cdot 10^{-11}$	0,00000
$\delta = 10^{-7}a$	$5,51986 \cdot 10^{-13}$	1,00000	$5,51986 \cdot 10^{-13}$	0,00000
$\delta = 10^{-8}a$	$5,51986 \cdot 10^{-15}$	1,00000	$5,51986 \cdot 10^{-15}$	0,00000
$\delta = 10^{-9}a$	$5,51986 \cdot 10^{-17}$	1,00000	$5,51986 \cdot 10^{-17}$	0,00000

На слайдах приведены графики и таблицы зависимостей модулей коэффициентов a_l , b_l , c_l , d_l от l при $\delta = 10^{-2}a$ и значений $M = 0, 1, 10$. Проведенный анализ показал, что коэффициенты a_l , c_l и d_l стремятся к нулю при увеличении l , причем коэффициенты a_1 , c_1 , d_1 стремятся к нулю быстрее при $\delta \rightarrow 0$, чем a_0 , c_0 и d_0 . Кроме того, $b_l = 1$ при всех параметрах δ , l , M что находится в полном согласии с теоретическими результатами Shahzad et. al.

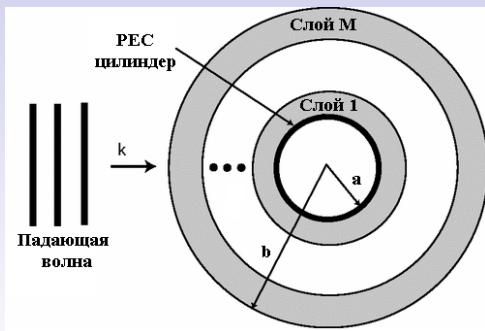
Указанные результаты говорят о большей эффективности данного способа дизайна. Кроме того, они позволяют выбрать оптимальное значение параметра M , обеспечивающее высокий маскировочный эффект при не очень высоких значениях параметров среды, заполняющей оболочку.

Подчеркнем, что при $\delta = 10^{-8}a$ параметры среды принимают на внутренней границе следующие значения: $\varepsilon_z = 3.329 \cdot 10^{-6}$, $\mu_r = 10^{-6}$, $\mu_\theta = 10^6$. Ясно, что техническая реализация маскировочных оболочек с указанными крайними значениями параметров среды является крайне затруднительной. Исходя из проведенного анализа, можно сказать, что данный метод дизайна идеальной маскировочной оболочки, является достаточно точным, но он мало эффективен и трудно реализуем. Поэтому больше внимания стоит уделить оптимизационным методам.

Оптимизация. Геометрия задачи

$$\Omega_1 = \{a = R_1 < r < R_2\}, \Omega_2 = \{R_2 < r < R_3\}, \dots, \Omega_M = \{R_M < r < R_{M+1}\},$$

где $R_1 = a$, $R_2 = a + (b - a)/M$, $R_3 = a + 2(b - a)/M$, ..., $R_{M+1} = b$.



Основное уравнение для поля в m -ом слое. Формулы для падающего и рассеянного полей

$$\frac{1}{\varepsilon_{z,m} r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\mu_{\theta,m}} \frac{\partial E_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{\varepsilon_{z,m} r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\mu_{r,m}} \frac{\partial E_m}{\partial \theta} \right) + k_0^2 E_m = 0, \quad (2.4)$$

$$E^{inc}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_0 r) \cos(n\theta), \quad (2.5)$$

$$E^{sc}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n^{(2)}(k_0 r) \cos(n\theta), \quad (2.6)$$

$$E_m(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [b_{mn} J_n(k_m r) + c_{mn} N_n(k_m r)] \cos(n\theta), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2.7)$$

$$E_0(r, \theta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_{0n} J_n(k_0 r) \cos(n\theta), \quad (2.8)$$

$$k_m = \omega \sqrt{\varepsilon_{z,m} \mu_{\theta,m}}, \quad v = n \sqrt{\mu_{\theta,m} / \mu_{r,m}}.$$

Условия сопряжения на границах раздела

$$E_0(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{0n} J_n(k_0 a) \cos(n\theta) = E_1(a, \theta),$$

$$\frac{\partial E_0(a, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial E_1(a, \theta)}{\partial r}, \quad \text{при } r = a,$$

$$E_m(R_{m+1}, \theta) = E_{m+1}(R_{m+1}, \theta), \quad m = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$\frac{\partial E_m(R_{m+1}, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial E_{m+1}(R_{m+1}, \theta)}{\partial r}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1,$$

при $r = R_{m+1}$,

$$E_M(b, \theta) = E^{inc}(b, \theta) + E^{sc}(b, \theta),$$

$$\frac{\partial E_M(b, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial E^{sc}(b, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial E^{inc}(b, \theta)}{\partial r}, \quad \text{при } r = b.$$

Выбор функционала качества (ЭПР). Постановка задачи оптимизации

Величи рассеяния в направлении θ :

$$\sigma(\theta) = \frac{2\pi R_0 |E^{sc}(R_0, \theta)|^2}{|E^{inc}(R_0, \theta)|^2}, \quad R_0 \gg \lambda, \quad (2.9)$$

Функционал качества $\sigma(\theta_0)$ при фиксированном θ :

$$\sigma(\theta_0) = J(\varepsilon_z^{(1)}, \mu_r^{(1)}, \mu_\theta^{(1)}, \dots, \varepsilon_z^{(M)}, \mu_r^{(M)}, \mu_\theta^{(M)}) \equiv J(X), \quad (2.10)$$

Задача оптимизации имеет вид

$$\begin{aligned} J(X) \equiv J(\varepsilon_z^{(1)}, \mu_r^{(1)}, \mu_\theta^{(1)}, \dots, \varepsilon_z^{(M)}, \mu_r^{(M)}, \mu_\theta^{(M)}) &\rightarrow \inf, \\ \varepsilon_z^{(1)} \geq 0, \mu_r^{(1)} \geq 0, \mu_\theta^{(1)} \geq 0 \dots \mu_\theta^{(M)} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В качестве начального приближения выбирается дискретизированная версия сингулярных параметров идеальной оболочки

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z,0}^m &= \varepsilon_z[(R_m + R_{m+1})/2], \mu_{r,0}^m = [\mu_r(R_m + R_{m+1})/2], \\ \mu_{\theta,0}^m &= [\mu_\theta(R_m + R_{m+1})/2], \quad m = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Численный алгоритм состоял из следующих этапов:

- 1 Инициализация параметров оболочки: внутренний и внешний радиусы $a = 0,1\text{м}$ и $b = 0,13\text{м}$, $\nu = 3$, $f = 2\text{ГГц}$. Задание вычислительной области (Summer, 2009).
- 2 Вводится число $N + 1$ слагаемых приближенного представления E_N^{sc} рассеянного поля E^{sc} в виде

$$E_N^{sc}(r, \theta) = \sum_{n=0}^N a_n H_n^{(2)}(k_0 r) \cos(n\theta) \quad (2.13)$$

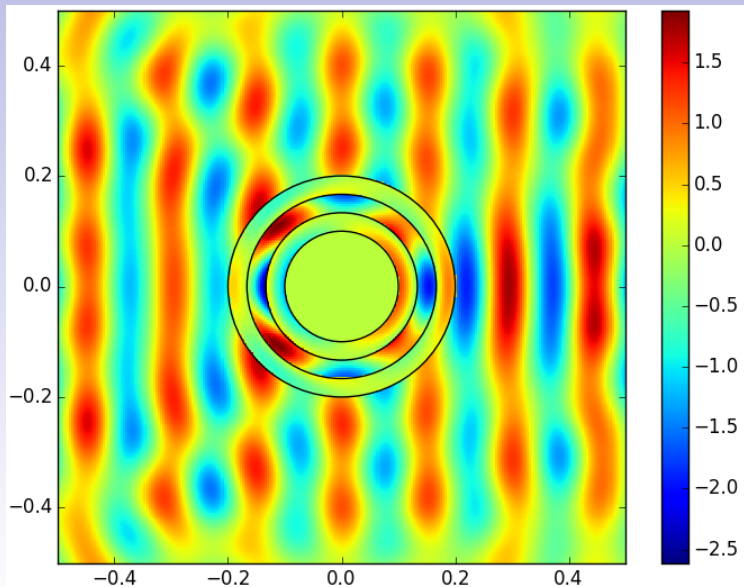
- 3 Выбираются начальные приближения $\varepsilon_z^{m,0}$, $\mu_r^{m,0}$, $\mu_\theta^{m,0}$, $m = 1, 2, \dots, M$ параметров среды во всех слоях в виде дискретизированных значений (2.12) параметров среды, отвечающих идеальной оболочке с параметрами, определенными формулами (2.1). Полагаем $l = 0$.
- 4 Запускается алгоритм оптимизации, в процессе которого на l -ой итерации, $l = 0, 1, \dots$, производятся следующие действия:

Оптимизационный алгоритм

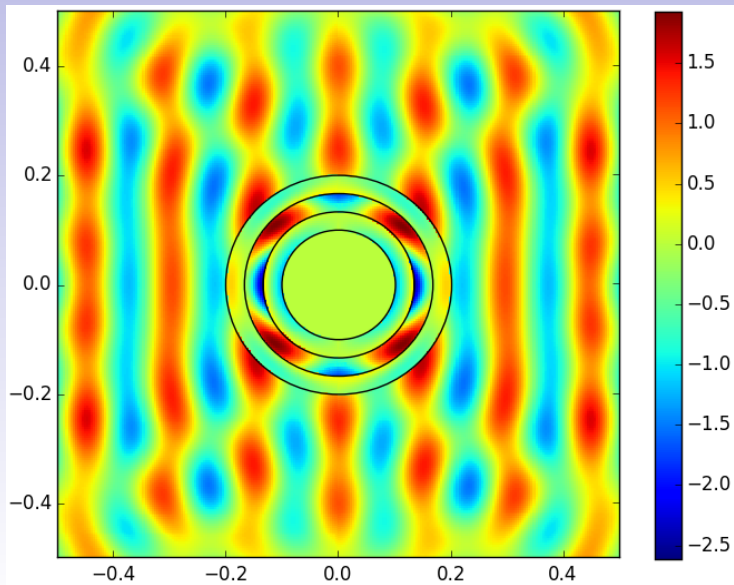
- 4.1. отвечающие l -й итерации параметры слоев $\varepsilon_z^{m,l}, \mu_r^{m,l}, \mu_\theta^{m,l}$, $m = 1, 2, \dots, M$, ($l = 0, 1, \dots$) вводятся в СЛАУ, которая решается для всех неотрицательных значений $n \leq N$;
- 4.2. найденные коэффициенты рассеяния a_n^l подставляются в формулу (2.13) для рассеянного поля;
- 4.3. по найденному рассеянному полю E_l^{sc} находится ширина рассеяния $\sigma^l(\theta_0)$.
- 4.4. с помощью итерационного алгоритма находятся новые значения параметров $\varepsilon_z^{m,l+1}, \mu_r^{m,l+1}, \mu_\theta^{m,l+1}$, $m = 1, 2, \dots, M$, $l = 0, 1, 2, \dots$, отвечающие $(l + 1)$ -ой итерации.
- 4.5. Проверяется условие выхода из цикла. Если оно не выполняется то увеличиваем номер итерации l на 1 и переходим к п. 4.1. Если условие выхода из цикла выполняется, то производится выход из цикла, а в качестве решения задачи принимается вычисленная в п. 4.4 совокупность параметров среды вместе с соответствующим значением ширины рассеяния $\sigma^{l+1}(\theta_0) = J(X_{l+1})$.

На приведенных ниже слайдах представлены визуализированная картина напряженности суммарного электрического поля отвечающее начальным значениям параметров ε_z , μ_r и μ_ϕ и оптимизированным значениям этих же параметров.

$M=3$ без оптимизации



$M=3$ с оптимизированными параметрами



Оптимизированные параметры материалов для трехслойной оболочки

Слой	Начальное приближение			Оптимизированные пар-ры		
	ϵ_z	μ_r	μ_ϕ	ϵ_z	μ_r	μ_ϕ
1	1.60	0.021	47.15	3.317	0,005	46,19
2	4.61	0.061	16.38	6,059	0,036	15,86
3	7.40	0.098	10.23	7,980	0,089	9,470

Описание таблицы

Результаты вычислительных экспериментов по реализации разработанного алгоритма представлены ниже в таблице. Таблица содержит начальные приближения относительных параметров в виде дискретизированных значений (2.12) основных параметров (2.1), тогда как вторая часть таблицы содержит значения этих же параметров, найденные с помощью итерационного алгоритма в случае, когда $M = 3$. Анализ рисунков и таблицы показывает, что применение процедуры оптимизации приводит к существенному улучшению маскировочных свойств исходной МО по сравнению с МО, отвечающей начальным значениям (не оптимизированным) значениям указанных параметров. Это говорит о высокой эффективности метода дизайна цилиндрической маскировочной оболочки, основанного на использовании процедуры оптимизации.