

Моделирование ламинарного и турбулентного сверхзвукового пограничного слоя

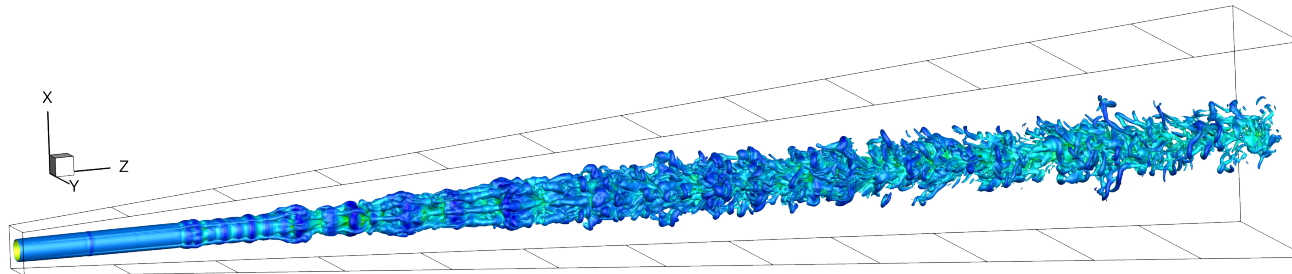
А.Н. Кудрявцев



*Лаборатория вычислительной аэродинамики
Институт теоретической и прикладной механики СО РАН*



*Лаборатория неравновесных течений
Новосибирский государственный университет*



Цель данных лекций

- Цель данных лекций состоит в том, чтобы кратко познакомить вас с подходами и методами, используемыми при численном моделировании сверхзвуковых течений сжимаемого газа. Такие течения встречаются во многих важных технических приложениях, в частности в авиации и космонавтике. Их можно наблюдать и в природе. Хотя на нашей планете сверхзвуковые течения достаточно редко появляются в естественных условиях, они весьма распространены в космосе. Многие методы, впервые разработанные для их моделирования в вычислительной гидродинамике, используются и в других отраслях науки для решения уравнений, имеющих сходную математическую природу.
- Мы рассмотрим течения, в которых важную роль играют сверхзвуковые пограничные слои, и постараемся найти простые примеры подобных течений, которые могут быть достаточно легко промоделированы с помощью свободно распространяемых расчетных программ, таких как OpenFOAM. В ряде случаев численные решения могут быть сравнены с результатами, полученными на основе более простых систем уравнений, таких как уравнения пограничного слоя, допускающих «почти» аналитическое решение.

Численное моделирование

Процесс численного решения многих задач можно разбить на следующие этапы:

- Формулировка математической модели изучаемого явления. Достаточно часто это система уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями.
- Та или иная дискретизация решаемых уравнений, например, с помощью метода конечных разностей, конечных объемов, конечных элементов, спектрального метода. Построение расчетной сетки, структурированной одноблочной или многоблочной или неструктурированной.
- Собственно решение с помощью того или иного численного метода, выполняемое компьютером.
- Обработка полученных данных, в частности их представление в графическом виде. Анализ результатов проведенных расчетов.

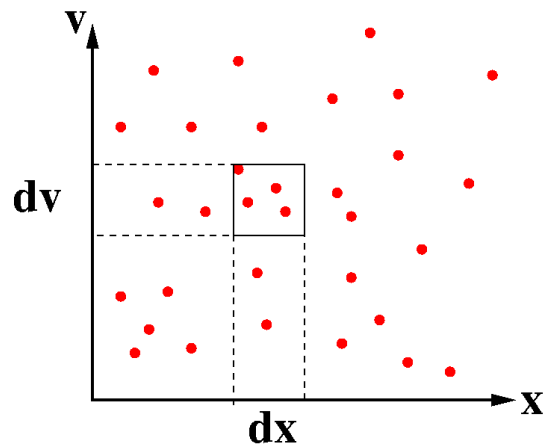
Уравнения движения сжимаемой сплошной среды

- Макроскопические движения сжимаемого газа описываются системой уравнений Навье—Стокса, которые могут быть получены из законов сохранения массы, импульса и энергии. Если пренебречь входящими в эти уравнения вязкими (диффузионными) членами, оставив только члены, ответственные за конвективный перенос и силы нормального давления, то приходим к системе уравнений Эйлера. При численном моделировании основные *принципиальные* сложности возникают именно при решении этих невязких уравнений. Метод, пригодный для решения уравнений Эйлера, обычно может быть довольно просто распространен и на уравнения Навье—Стокса (скажем, аппроксимируя диффузионные члены центральными разностями). При решении уравнений Навье—Стокса (особенно при больших числах Рейнольдса) возникают, однако, сложности иного рода, связанные с наличием тонких пограничных и свободных сдвиговых слоев и турбулизацией течения.

Связь с молекулярно-кинетической теорией

- При феноменологическом выводе уравнений Навье–Стокса, когда записываются законы сохранения массы, импульса и энергии для некоторого объема жидкости или газа, приходится вводить дополнительные предположения о действующих внутренних напряжениях и потоках тепла в сплошной среде. В то же время, по крайней мере для не очень плотных газов, эти уравнения могут быть достаточно строго получены из уравнения Больцмана для функции распределения молекул газа по скоростям $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\text{Kn}} J(f, f), \quad \text{Kn} = \ell / L \quad \text{— Число Кнудсена.}$$



$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}$ — число молекул в элементе фазового пространства $d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}$ вокруг точки $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

$J(f, f)$ — нелинейный интегральный член (*интеграл столкновений Больцмана*).

Метод Чэпмена–Энскога

- Ища решения уравнения Больцмана в виде разложения в ряд по степеням параметра $1/Kn$ можно получить выражения для функций распределения в соответствующем приближении и уравнения для моментов функции распределения, таких как

$$\begin{aligned} \text{плотность} \quad \rho(\mathbf{x}, t) &= m \iiint f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}, \\ \text{макроскопическая скорость} \quad \rho\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= m \iiint \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}, \\ \text{внутренняя энергия} \quad \rho e(\mathbf{x}, t) &= \frac{m}{2} \iiint (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}. \end{aligned}$$

- В частности, с точностью до членов нулевого порядка, решением уравнения Больцмана является локальная максвелловская функция распределения

$$f^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{\rho}{m} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m}{2k_B T} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \right],$$

а соответствующие моментные уравнения ни что иное как **уравнения Эйлера**.

Уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{l}) = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p) \mathbf{u}] = 0.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k + p \delta_{ik}) = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [(E + p) u_k] = 0.$$

$$p = \rho \mathcal{R} T / M, \quad E = \rho e + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2}, \quad e(T) = \int_0^T c_v(T') dT'$$

$\mathcal{R} = k_B N_A = 8314,46$ Дж/(К·кмоль) — универсальная газовая постоянная.

Для **совершенного газа** $c_v = \frac{\mathcal{R}}{M(\gamma - 1)}, \quad e = c_v T.$

В частности, для одноатомного газа $\gamma = 5/3, \quad c_v = \frac{3}{2} \mathcal{R} / M.$

Для двухатомного газа модель квантового гармонического осциллятора дает

$$c_v = \frac{5 \mathcal{R}}{2M} + \frac{\mathcal{R}}{M} \left(\frac{\Theta_v}{T} \right)^2 \frac{e^{\Theta_v/T}}{(e^{\Theta_v/T} - 1)^2}, \quad e = \frac{5}{2} \mathcal{R} T / M + \frac{\mathcal{R} \Theta_v / M}{e^{\Theta_v/T} - 1}.$$

Усложнение: химически реагирующий газ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{l}) = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p) \mathbf{u}] = 0.$$

$$\frac{\partial \rho Y_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho Y_i \mathbf{u}) = M_i \dot{\omega}_i,$$

$$Y_i = \rho_i / \rho, \quad i = 1, \dots, N_s,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [(E + p) u_k] = 0.$$

Уравнения химических реакций:

$$\sum_{i=1}^N \nu_{\alpha i}^f S_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \nu_{\alpha i}^r S_i, \quad \alpha = 1, \dots, J.$$

$$\dot{\omega}_i(C_1, \dots, C_N, T) = \sum_{\alpha=1}^J \left(\nu_{\alpha i}^r - \nu_{\alpha i}^f \right) \left[k_{\alpha}^f \prod_{l=1}^N C_l^{\nu_{\alpha l}^f} - \prod_{l=1}^N C_l^{\nu_{\alpha l}^r} \right],$$

$$C_i = \frac{\rho_i}{M_i} = \rho \frac{Y_i}{M_i}, \quad k_{\alpha}^{f/r} = A_{\alpha}^{f/r} T^{\beta_{\alpha}^{f/r}} \exp \left(-\frac{E_{\alpha}^{f/r}}{\mathcal{R}T} \right).$$

Уравнения Навье–Стокса

- При сохранении членов первого порядка $\mathcal{O}(Kn^{-1})$ из уравнения Больцмана могут быть выведены **уравнения Навье–Стокса**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{l}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau},$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p) \mathbf{u}] = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}).$$

Тензор вязких напряжений

$$\tau_{ik} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \lambda \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \quad (\text{Закон вязкости Ньютона})$$

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \kappa = \frac{\mu c_p}{Pr} \quad (\text{Закон теплопроводности Фурье})$$

$$\mu = \mu(T), \quad \lambda = \lambda(T), \quad \kappa = \kappa(T)$$

Закон вязкости Сазерленда

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + T_S}{T + T_S}$$

Граничные условия

- На поверхности обтекаемых жидкостью или газом твердых тел должны выполняться определенные граничные условия. В задачах о течении невязкой жидкости это условие непротекания, то есть равенство на поверхности тела Γ нормальных составляющих скорости жидкости \mathbf{u} и скорости тела \mathbf{U}_w :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_w \quad (\mathbf{n} \text{ — единичный вектор нормали к границе}).$$

- Для течения вязкой среды обычно используют условие прилипания для скорости и условие заданной температуры или адиабатическое условие (равенство нулю теплового потока):

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{U}_w, \quad T|_{\Gamma} = T_w \quad \text{или} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla T|_{\Gamma} = 0.$$

Однако, в случае разреженного газа необходимо учитывать скольжение и скачок температуры на поверхности тела. Соответствующие граничные условия

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} - \mathbf{U}_w = \alpha \ell \frac{\partial \mathbf{u}_{\tau}}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad T|_{\Gamma} - T_w = \beta \ell \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma},$$

где $\mathbf{u}_{\tau} \equiv \mathbf{u} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$, ℓ — длина свободного пробега, α , β — некоторые коэффициенты, позволяют расширить область применимости уравнений Навье–Стокса вплоть до $\text{Kn} \approx 0.1$ (режим со скольжением, $0,01 < \text{Kn} < 0,1$).

Несжимаемая жидкость

- Уравнения Навье–Стокса

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, & \rho &= \text{const}, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \nu \nabla^2 \mathbf{u}, & \nu &= \mu / \rho \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= k \nabla^2 T + \Phi, & k &= \kappa / \rho c_p.\end{aligned}$$

- Уравнения пограничного слоя.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

В случае несжимаемой жидкости уравнение неразрывности и уравнение импульса (динамическое уравнение) образуют замкнутую систему. После ее решения может быть отдельно решено уравнение энергии (уравнение теплопроводности).

Если число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty}$$

велико, то действие вязкости нужно учитывать только в тонком пограничном слое у поверхности обтекаемого тела.

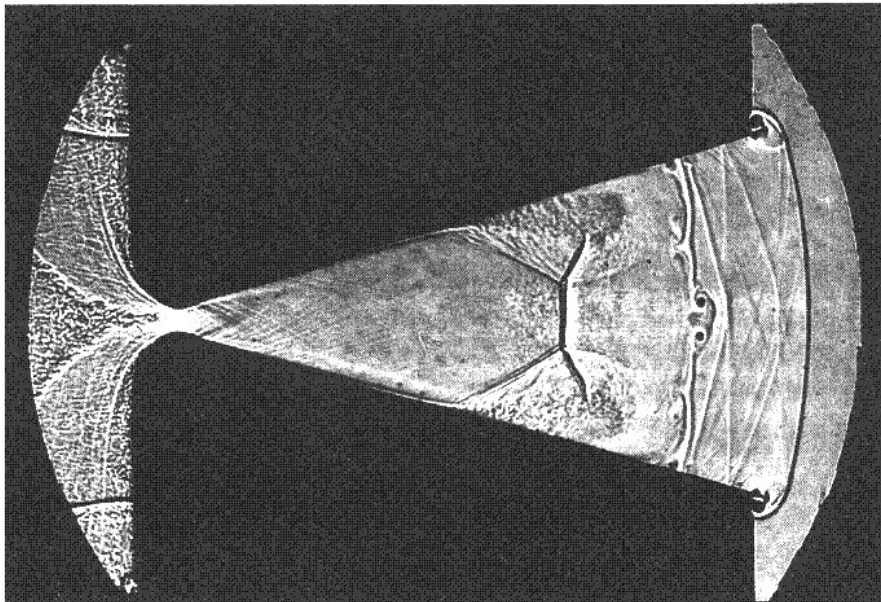
Уравнения пограничного слоя для сжимаемого газа

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial P_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= u \frac{\partial P_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu c_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

При известном (определенном из решения невязкой задачи обтекания) распределении давления на внешней границе пограничного слоя $P_e(x)$, эти уравнения можно интегрировать по x , сведя таким образом двумерную задачу к одномерной. При постоянном давлении (пограничный слой на плоской пластине, клине, конусе) может быть получено автомодельное решение, зависящее только от переменной

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^y \rho(y') dy'.$$

Пример: стартовый процесс в плоском сопле

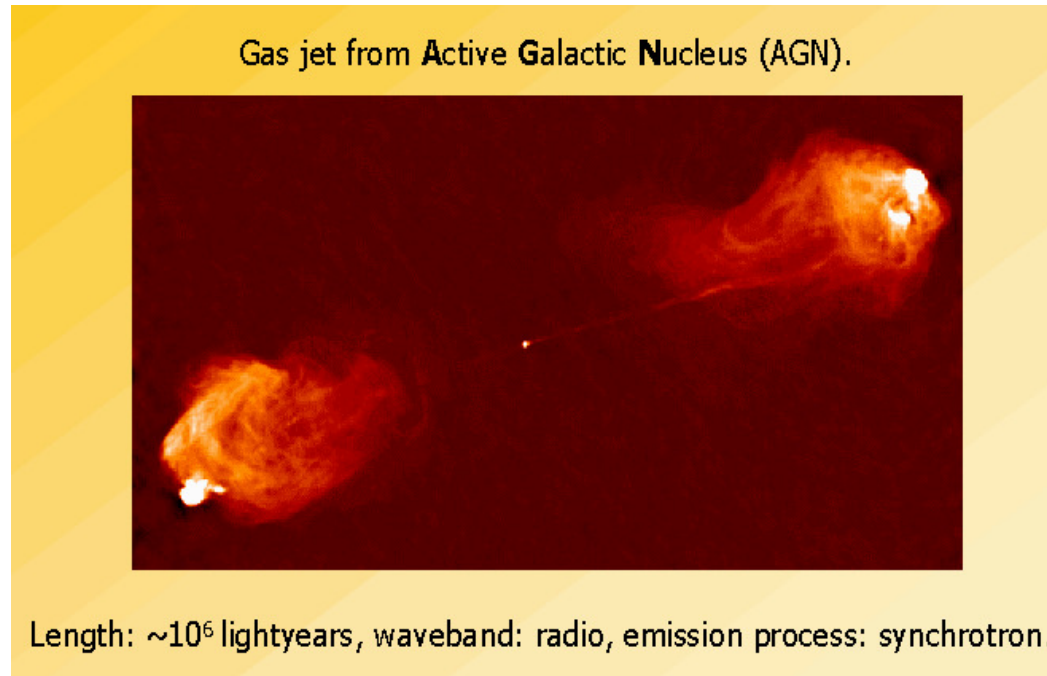


Процесс запуска сопла

Падающая ударная волна, движущаяся с числом Маха скачка, равным 3, только что прошла через плоское сопло. За этой волной имеется несколько контактных поверхностей, содержащих вихри; между этими поверхностями и горлом сопла — вторая ударная волна, направленная против течения, но сносимая вниз по потоку и вызывающая отрыв пограничных слоев.

Идущие от стенок волны Маха указывают на установление сверхзвукового течения вниз по потоку от горла. (Атанн, Н.-О., воспроизведено по «Альбому течений жидкости и газа», составленному М. Ван-Дайком).

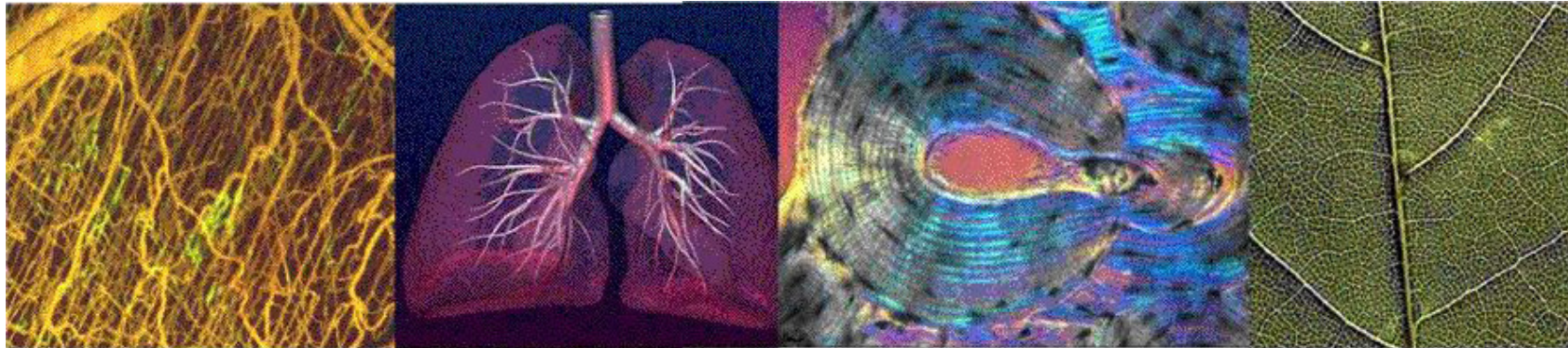
Пример: галактические струи



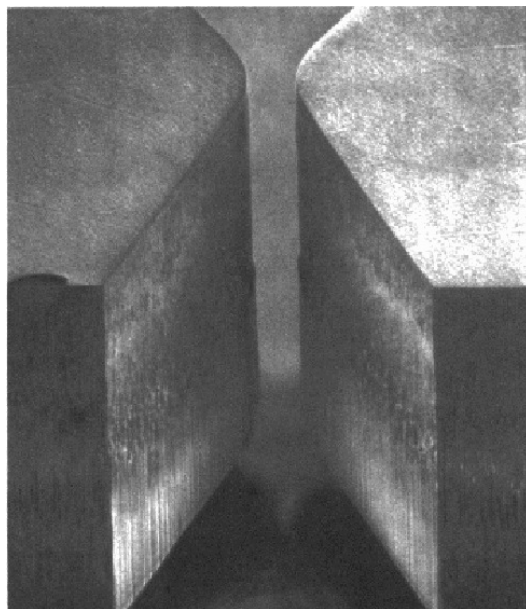
Струя газа из активного ядра галактики в созвездии Лебедя

Две симметричные струи горячих быстрых частиц (электрон-позитронной плазмы) генерируются в центральных областях радиогалактики Лебедь А, содержащих, вероятно, сверхмассивную черную дыру. Распространяясь от источника, струи взаимодействуют с межгалактической средой, что приводит к формированию интенсивной ударной волны в межгалактической среде и появлению на концах струй двух ярких радиоисточников.

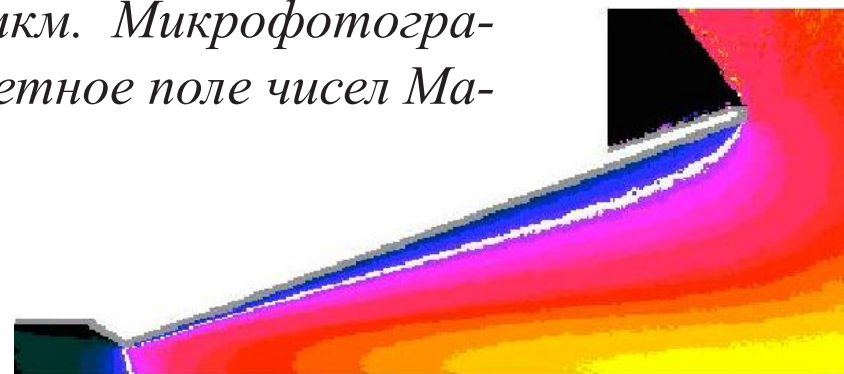
Пример: микротечения



Некоторые биологические микротечения. Слева направо: кровеносная система животного, легкие, капилляры в костной ткани, лист растения



Плоское микросопло с шириной горла 19 мкм. Микрофотография и расчетное поле чисел Маха.



Математические свойства уравнений движения

- Важнейшим математическим свойством уравнений газовой динамики (уравнений Эйлера) является то, что они образуют квазилинейную гиперболическую систему законов сохранения.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV + \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

- При численном решении уравнения Эйлера и Навье-Стокса обычно записываются в консервативной в консервативной форме.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}_v}{\partial z} \right)$$

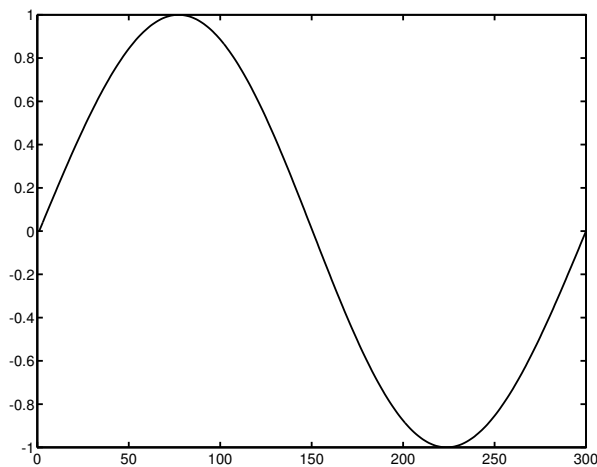
$$\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{Q}, \quad \mathbf{B} = \partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{Q}, \quad \mathbf{C} = \partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{A}_n = n_x \mathbf{A} + n_y \mathbf{B} + n_z \mathbf{C} = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{u_n - a, u_n, u_n, u_n, u_n + a\}.$$

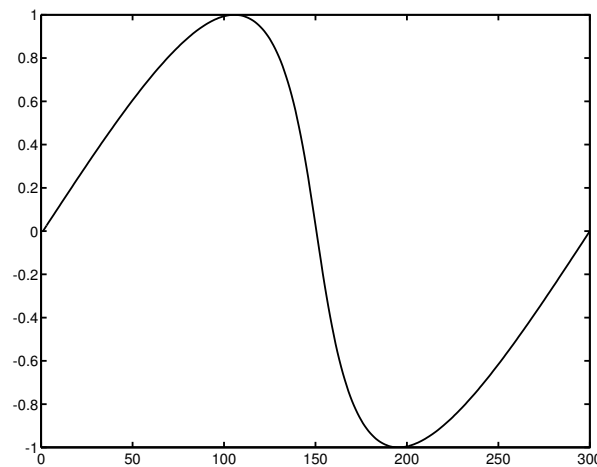
Здесь $u_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = n_x u_x + n_y v + n_z w$ — составляющая скорости вдоль единичного вектора $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$, $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — скорость звука.

Полученные собственные значения соответствуют различным модам возмущений. Тройное собственное значение соответствует трем модам, распространяющимся со скоростью течения самого газа, то есть неподвижным относительно его частиц, а два других — возмущениям, движущимся относительно газа со скоростью a соответственно влево и вправо, то есть акустическим волнам.

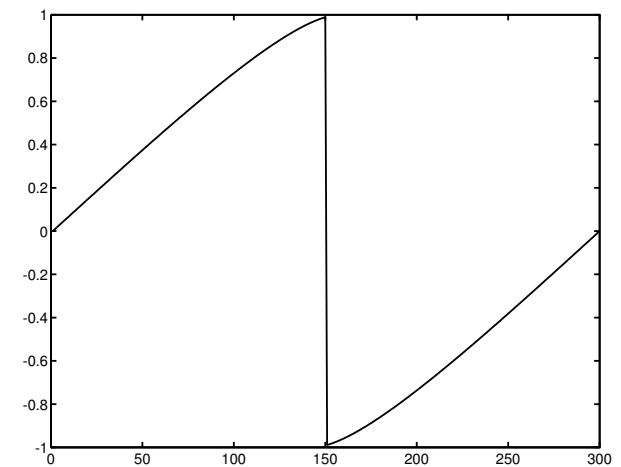
- Решения квазилинейных гиперболических систем могут становиться разрывными за конечное время даже если начальные данные были бесконечно гладкими.



$t = 0$



$t = 0,1$



$t = 0,5$

Соотношения Рэнкина–Гюгонио

Значения решения на двух сторонах разрыва не могут быть полностью произвольными. Они связаны определенными соотношениями, вытекающими из интегральной формы законов сохранения (соотношения Рэнкина–Гюгонио):

$$\mathbf{F}_{nR} - \mathbf{F}_{nL} = s (\mathbf{Q}_{nR} - \mathbf{Q}_{nL}),$$

где \mathbf{F}_n — поток по нормали к поверхности разрыва, s — скорость движения разрыва.

В частности, для невязкого уравнения Бюргерса

$$u_t + (u^2/2)_x = 0$$

$$s = \frac{f_L - f_R}{u_L - u_R} = \frac{u_L^2/2 - u_R^2/2}{u_L - u_R} = \frac{u_L + u_R}{2}.$$

Однако, если бы мы записали его как $(u^2/2)_t + (u^3/3)_x = 0$, то получили бы

$$s = \frac{u_L^3/3 - u_R^3/3}{u_L^2/2 - u_R^2/2} = \frac{2}{3} \frac{u_L^2 + u_L u_R + u_R^2}{u_L + u_R}.$$

Проблемы

При введении слабых решений мы сталкиваемся с некоторыми проблемами:

- Одному и тому же уравнению, записанному в неконсервативной форме, может соответствовать несколько законов сохранения. Им будут соответствовать разные слабые решения!
- Теряется единственность решения задачи Коши. Чтобы ее восстановить нужно ввести дополнительное условие, имеющее характер неравенства — энтропийное условие.

При попытке найти численно слабые решения законов сохранения мы также сталкиваемся с целым рядом трудностей:

- Возникновение сильного сглаживания или нефизических осцилляций, скорость сходимости при этом не соответствует порядку точности метода;
- Сходимость к слабому решению, не удовлетворяющему энтропийному условию;
- Полное отсутствие сходимости, распространение разрывов решения с неверной скоростью при использовании неконсервативных схем.

Осцилляции

Пример. $u_t + (u^2/2)_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0,$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

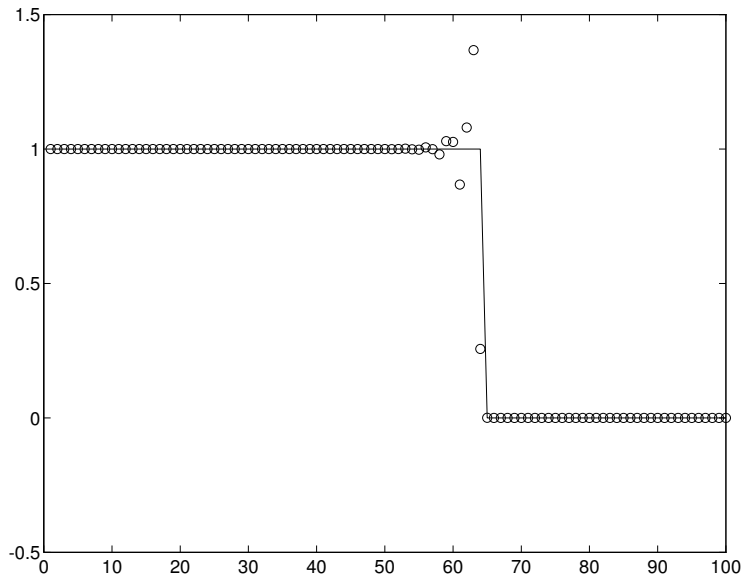


Схема Маккормака

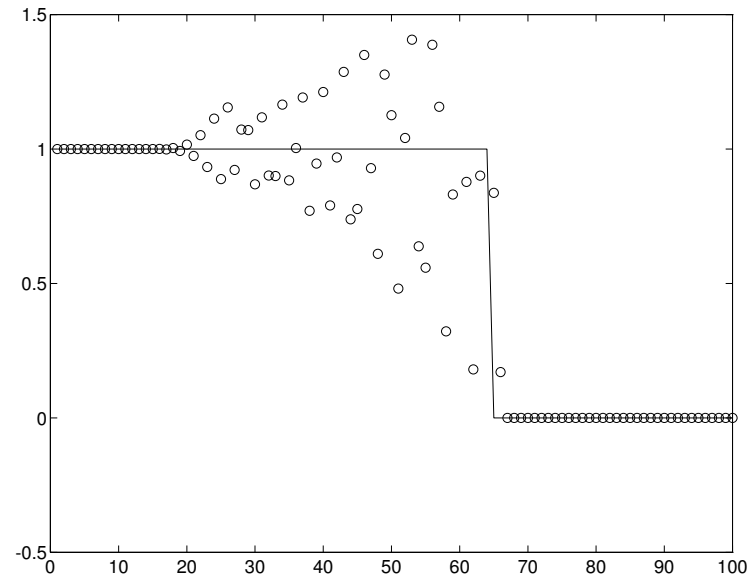


Схема с перешагиванием

Численное решение уравнений движения сжимаемого газа

- При движении со скоростями, превышающими скорость звука, внутри течения могут образовываться чрезвычайно узкие (с толщиной порядка нескольких длин свободного пробега) зоны, в которых газодинамические величины претерпевают резкие изменения – ударные волны, контактные поверхности. Фактически же мы вынуждены рассматривать такие зоны как поверхности разрыва газодинамических величин не только при численном решении уравнений Эйлера, но при решении уравнений Навье-Стокса, поскольку в большинстве задач, имеющих дело с областями макроскопических размеров, внутренняя структура ударных волн не может быть разрешена в силу вычислительных ограничений на число узлов расчетной сетки. При решении уравнений газовой динамики это приводит к необходимости обобщить классическое понятие решения, введя концепцию слабого решения для гиперболических систем законов сохранения. Задача приближенного численного нахождения таких слабых решений далеко не тривиальна, и ей были посвящены большие усилия как специалистов в области прикладной математики, так и вычислителей-практиков.

Расчет течений с разрывами

Существуют два основных подхода к расчету течений с газодинамическими разрывами:

- **Метод выделения особенностей.** Разрывы выделяются и служат границами расчетной области и внутренними границами, на которых выполняются условия Рэнкина-Гюгонио. Положение и движение границ определяется в процессе решения. Алгоритм становится очень запутанным, когда рассматриваются течения со сложным взаимодействием разрывов (особенно в многомерных задачах).
- **Метод сквозного счета.** Течение во всех точках расчетной области рассчитывается по одной и той же схеме. При этом в уравнения либо явно, в виде дополнительных членов, либо неявно, как результат специфической реализации численного метода, вводится искусственная диссипация, которая «размазывает» разрывы, увеличивая их толщину до нескольких ячеек расчетной сетки. Тонкий момент здесь заключается в том, что искусственная диссипация, значительно превышающая физическую вблизи разрывов, должно одновременно составлять лишь ее малую часть в областях гладкости, чтобы получить там близкое к реальности решение.

Методы сквозного счета

- **1950 г.** Основная идея методов сквозного счета сформулирована Дж. фон Нейманом и Р. Рихтмайером.
- **1953–1959 г.** С. К. Годунов предложил метод, основанный на использовании решения задачи о распаде разрыва. Схема Годунова лежит в основе почти современных методов численного моделирования течений с ударными волнами.
- **1954 г.** Схема Лакса (P. Lax).
- **1960 г.** Схема Лакса–Вендроффа (P. Lax & B. Wendroff).
- **1969 г.** Схема Маккормака (R. McCormack).

Широко использовавшиеся ранее в вычислительной аэродинамике схемы Лакса–Вендроффа и Маккормака 2-го порядка точности на гладких решениях. Однако, в отличие от схемы Годунова они не являются монотонными и приводят к появлению осцилляций при расчете течений, содержащих газодинамические разрывы.

Схемы высокого разрешения

- **1972, 1975 г.** В. П. Колганом разработана первая квазимонотонная схема повышенного порядка точности, основанная на принципе минимума значений производных.
- **1974, 1977, 1979 г.** Попытки Б. ван Леера (B. van Leer) построить (квази)монотонную схему второго порядка с помощью ограничения значений производных вблизи разрывов.
- **1983 г.** В статье А. Хартена (A. Harten) предложены TVD (Total Variation Diminishing) схемы, быстро завоевавшие популярность и являющиеся, вплоть до настоящего времени, основным инструментом вычислителей, работающих в области сверхзвуковой аэродинамики.
- **1987–1996 г.** В работах А. Хартена, С. Ошера (S. Osher), Ч.-В. Шу (C.-S. Shu) и др. развиты ENO (essentially non-oscillatory) и WENO (weighted ENO) схемы высокого разрешения. Эти схемы могут стать базовым вычислительным инструментом в новом поколении расчетных программ для решения сложных задач вычислительной аэродинамики.

Немного истории



1917 г. Первая попытка Л. Ф. Ричардсона предсказать погоду путем численного решения (вручную!) уравнений в частных производных.

«Пока что я платил за расчет одного координатного узла лапласиана по расценке $n/18$ пенсов, где n — число цифр, с которыми проводятся вычисления. Основная ошибка вычислителей состояла в том, что они путали знаки «плюс» и «минус». Что касается скорости расчетов, то один из самых быстрых работников рассчитывал за неделю в среднем 2000 узлов лапласиана с трехзначными числами; ошибочные расчеты не оплачивались.»



1950 г. После создания ЭВМ, они были почти немедленно использованы для численного решения задач гидромеханики. Для рассматриваемого нами предмета особый интерес представляет статья Дж. фон Неймана и Р. Рихтмайера, в которой они предложили использовать явную искусственную вязкость для расчета течений с ударными волнами. Это было началом развития методов сквозного счета.



1959 г. Первая открытая публикация С. К. Годунова, в которой была описана знаменитая схема Годунова, основанная на решении задачи о распаде разрыва. Эта схема и ее почти бесчисленные модификации и модернизации были успешно применены к огромному количеству различных задач. Она лежит в основе практически всех современных методов численного моделирования течений с ударными волнами.

*”Professor S.K. Godunov’s work influences all of modern scientific computation ... He is perhaps the most influential applied mathematician working in this area for the past forty years“
S. Osher*



1983 г. В статье А. Хартена предложены TVD (total variation diminishing) схемы, быстро завоевавшие популярность и являющиеся сейчас, пожалуй, основным рабочим инструментом, применяемым учеными, работающими в области вычислительной аэродинамики. Именно эти схемы используются и в большинстве известных коммерческих кодов.

Консервативные схемы

Консервативная разностная схема:

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \Rightarrow \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F(U_{j-p}^n, \dots, U_{j+q}^n) - F(U_{j-p-1}^n, \dots, U_{j+q-1}^n) \right],$$

где F — некая функция от $p + q + 1$ аргументов.

В случае консервативных схем интегральная форма закона сохранения

$$\int_a^b u(x, t_2) dx = \int_a^b u(x, t_1) dx - \left[\int_{t_1}^{t_2} f(u(b, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(u(a, t)) dt \right]$$

имеет дискретный аналог:

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{j=J}^K U_j^{n+1} &= \Delta x \sum_{j=J}^K U_j^n - \Delta t \sum_{j=J}^K \left[F(U_j^n) - F(U_{j-1}^n) \right] = \\ &= \Delta x \sum_{j=J}^K U_j^n - \Delta t \left[F(U_K^n) - F(U_J^n) \right] \end{aligned}$$

Чтобы консервативная схема была согласована с уравнением, необходимо, чтобы

$$f(u) = F(u, u, \dots, u)$$

.

TVD схемы

Схема называется *TVD (total variation diminishing) схемой*, если

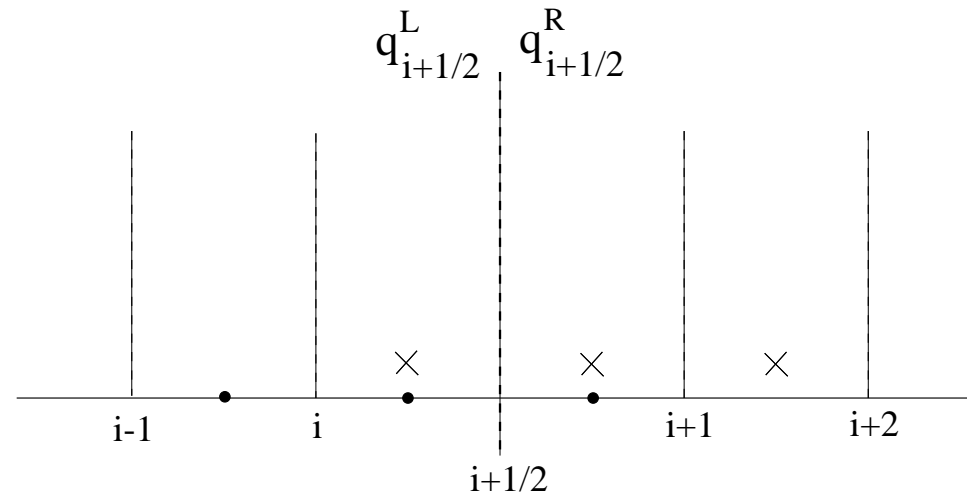
$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n), \quad \text{где } TV(U) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{j+1} - U_j|$$

монотонная \Rightarrow TVD схема \Rightarrow сохраняющая монотонность

В большинстве современных TVD схем вычисления можно разбить на три более или менее независимых этапа:

- Реконструкция переменных на гранях между ячейками из переменных в центре ячеек или средних по ячейкам. Для того, чтобы избежать возникновения численных осцилляций, применяются т. н. ограничители наклона.
- Вычисление, исходя из реконструированных переменных, потоков через грани ячеек. Обычно это делается путем приближенного решения задачи о распаде разрыва между «левым» и «правым» состояниями.
- Нахождения значений переменных на новом временном слое — средних по ячейкам (в конечнообъемных методах) или в центре ячейки (в конечноразностных методах). При этом используются значения переменных на старом временном слое и вычисленные потоки через грани ячеек.

Реконструкция переменных на гранях ячеек



$$q_{i+1/2}^L = q_i + \frac{1-\phi}{4}L(\Delta q_{i-1/2}, \Delta q_{i+1/2}) + \frac{1+\phi}{4}L(\Delta q_{i+1/2}, \Delta q_{i-1/2})$$

$$q_{i+1/2}^R = q_i - \frac{1+\phi}{4}L(\Delta q_{i-1/2}, \Delta q_{i+1/2}) - \frac{1-\phi}{4}L(\Delta q_{i+1/2}, \Delta q_{i-1/2})$$

Здесь $L(x, y)$ — некоторая нелинейная функция переменных x, y (ограничитель наклонов), выбираемая так, чтобы схема удовлетворяла TVD свойству.

Ограничители наклона (slope limiters)

Рассмотрим следующую реконструкцию:

$$U_{j+1/2}^L = U_j^n + \frac{1}{2} \psi(R_j^n) (U_j^n - U_{j-1}^n),$$

$$U_{j-1/2}^R = U_j^n - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{R_j^n}\right) (U_{j+1}^n - U_j^n), \quad R_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{U_j^n - U_{j-1}^n}$$

Здесь $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная функция, называемая *лимитером (ограничителем)*; $\psi = 0$ соответствует схеме первого порядка, $\psi = 1$ — односторонней схеме второго порядка с разностями против потока.

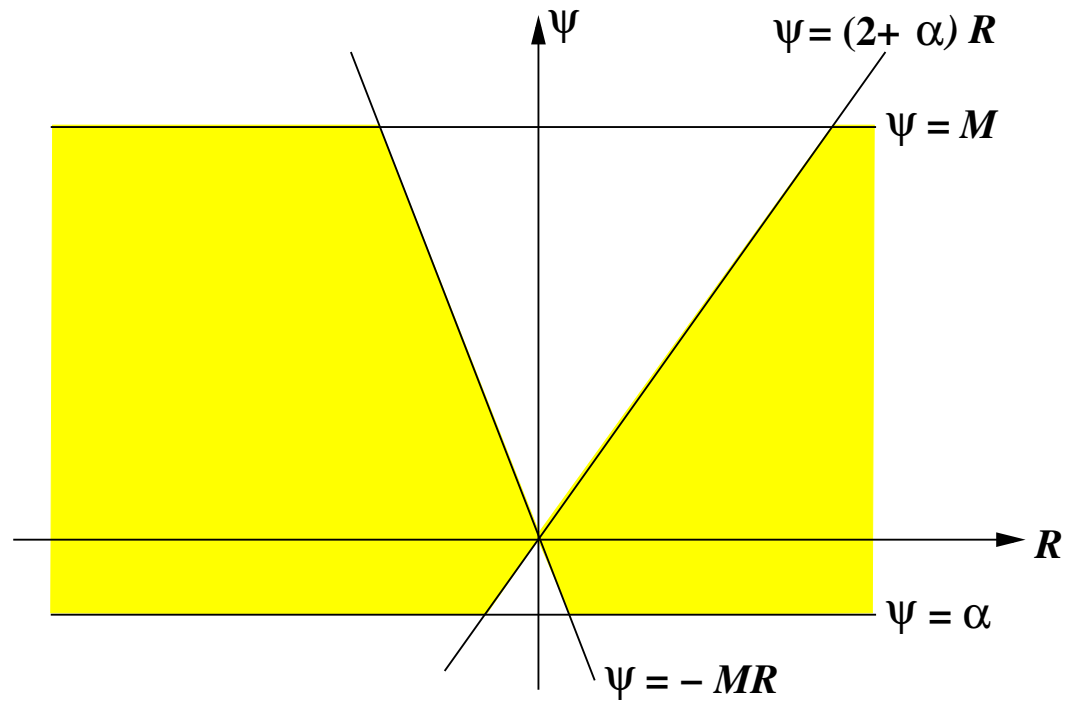
Требование выполнения TVD свойства приводит к условию, которому должен удовлетворять ограничитель:

$$\alpha \leq \psi(R) \leq M, \quad \forall R \in \mathbb{R}$$

и

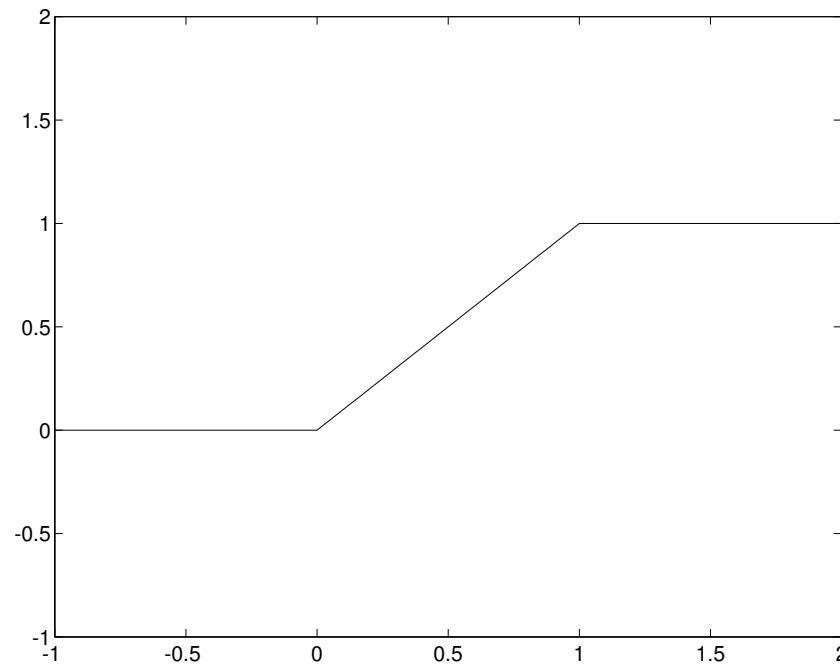
$$-M \leq \frac{\psi(R)}{R} \leq 2 + \alpha, \quad \forall R \in \mathbb{R} \quad (\alpha \in [-2, 0])$$

Область TVD



Примеры ограничителей. *MinMod*

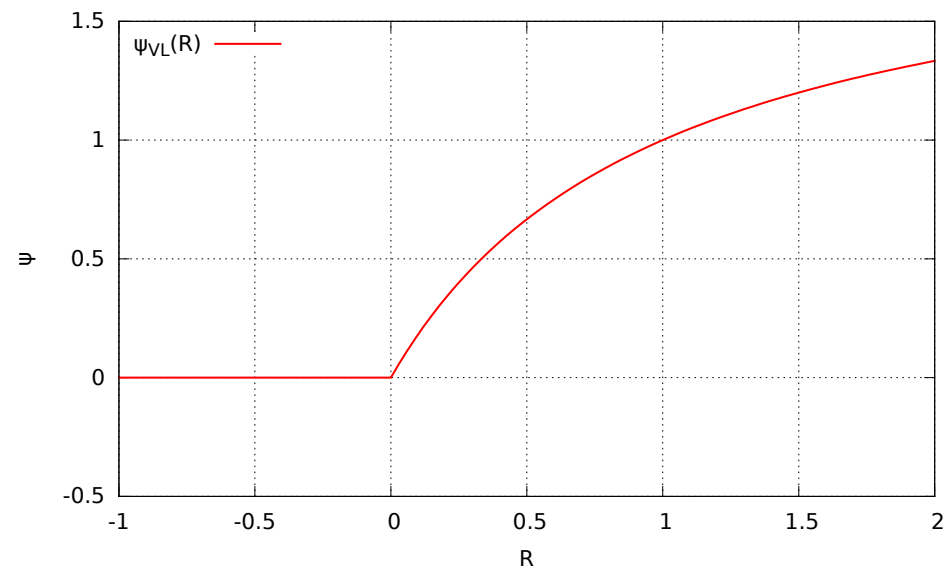
$$\psi_{MM}(R) = \begin{cases} 0, & R \leq 0 \\ \min(1, R), & R > 0 \end{cases}, \quad \psi_{MM}(1) = 1$$



Ограничитель Minmod

Примеры ограничителей. Ограничитель Ван Леера

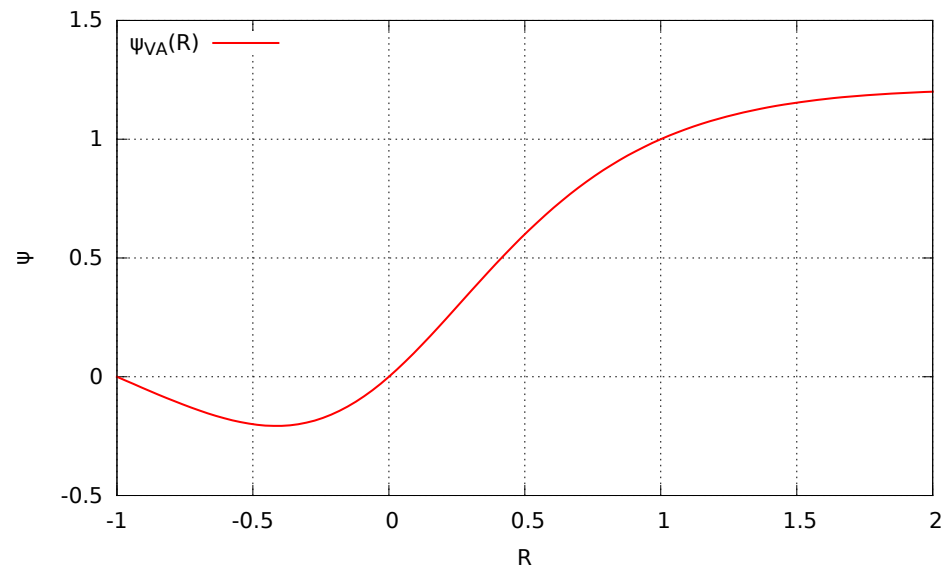
$$\psi_{VL}(R) = \frac{R + |R|}{|R| + 1} = \begin{cases} 0, & R \leq 0 \\ \frac{2R}{R+1}, & R > 0 \end{cases}, \quad M = 2, \alpha = 0, \quad \psi_{VL}(1) = 1$$



Ограничитель ван Леера

Примеры ограничителей. Ограничитель Ван Альбада

$$\psi_{VA}(R) = \frac{R^2 + R}{R^2 + 1}, \quad M = 2, \quad \alpha = -1/2, \quad \psi_{VA}(1) = 1, \quad \psi_{VA} \in C^\infty$$



Ограничитель ван Альбада

κ -формула Ван Леера

В литературе часто встречается так называемая κ -формула ван Леера:

$$U_{j+1/2}^L = U_j + \frac{1}{4} \left[(1 - \kappa) \tilde{\tilde{\Delta}}_{j-1/2} + (1 + \kappa) \tilde{\tilde{\Delta}}_{j+1/2} \right],$$

$$U_{j-1/2}^R = U_j - \frac{1}{4} \left[(1 - \kappa) \tilde{\tilde{\Delta}}_{j+1/2} + (1 + \kappa) \tilde{\tilde{\Delta}}_{j-1/2} \right],$$

$$\tilde{\tilde{\Delta}}_{j+1/2} = \text{Lim}(U_{j+1} - U_j, U_j - U_{j-1}), \quad \tilde{\tilde{\Delta}}_{j-1/2} = \text{Lim}(U_j - U_{j-1}, U_{j+1} - U_j)$$

с утверждением, что она дает третий порядок точности при $\kappa = 1/3$. В действительности реконструкция по данной формуле будет третьего порядка, если не применять ограничителей. В противном случае справедливость этого утверждения зависит от свойств используемого ограничителя. Формулу ван Леера можно переписать в стандартном виде, использованном нами, и анализировать также, как это делалось выше.

Обобщение на систему законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x = 0, \quad A(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u} = R^{-1}(\mathbf{u}) \Lambda(\mathbf{u}) R(\mathbf{u})$$

Определим локальные характеристические переменные

$$\mathbf{W}_{j-q} = R_j^{-1} \mathbf{U}_{j-q}, \dots, \mathbf{W}_j = R_j^{-1} \mathbf{U}_j, \dots, \mathbf{W}_{j+p} = R_j^{-1} \mathbf{U}_{j+p},$$

$$\mathbf{W}_j = \{W_j^{(\alpha)}\} = (W_j^{(1)}, \dots, W_j^{(n)})^T.$$

Реконструкцию будем делать в локальном характеристическом поле:

$$\begin{aligned} W_{j+1/2}^{(\alpha)L} &= W_j^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \psi(S_j^{(\alpha)}) (W_j^{(\alpha)} - W_{j-1}^{(\alpha)}) \\ W_{j-1/2}^{(\alpha)R} &= W_j^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{S_j^{(\alpha)}}\right) (W_{j+1}^{(\alpha)} - W_j^{(\alpha)}) \end{aligned} \quad S_j^{(\alpha)} = \frac{W_{j+1}^{(\alpha)} - W_j^{(\alpha)}}{W_j^{(\alpha)} - W_{j-1}^{(\alpha)}}$$

Обратное преобразование к физическим переменным

$$\mathbf{U}_{j+1/2}^L = R_j \mathbf{W}_{j+1/2}^L \quad \mathbf{U}_{j-1/2}^R = R_j \mathbf{W}_{j-1/2}^R$$

Задача о распаде разрыва

Рассмотрим следующую задачу с начальными данными:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0, \quad \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0 \\ \mathbf{U}_R, & x > 0 \end{cases}$$

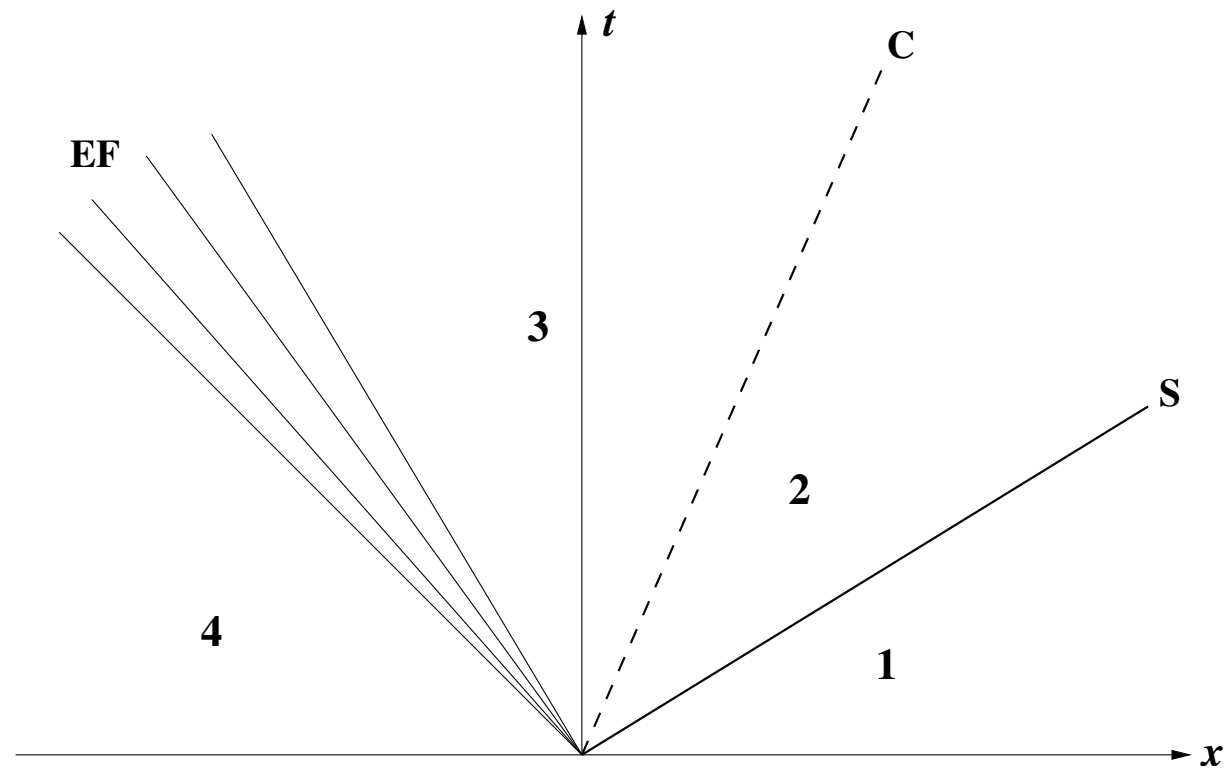
Такая задача с начальными данными, содержащими один разрыв, слева и справа от которого решение постоянно, называется **задачей о распаде разрыва** или **задачей Римана**.

Если одновременно умножить x и t на некоторую константу, то система уравнений и начальные данные сохранят свой вид. Следовательно, решение задачи Римана должно быть автомодельным: оно зависит не от x и t в отдельности, а только от комбинации x/t :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(x/t).$$

Со времен работы Годунова (1959 г.) решение задачи Римана постоянно используется при построении численных методов решения гиперболических систем уравнений.

Точное решение задачи



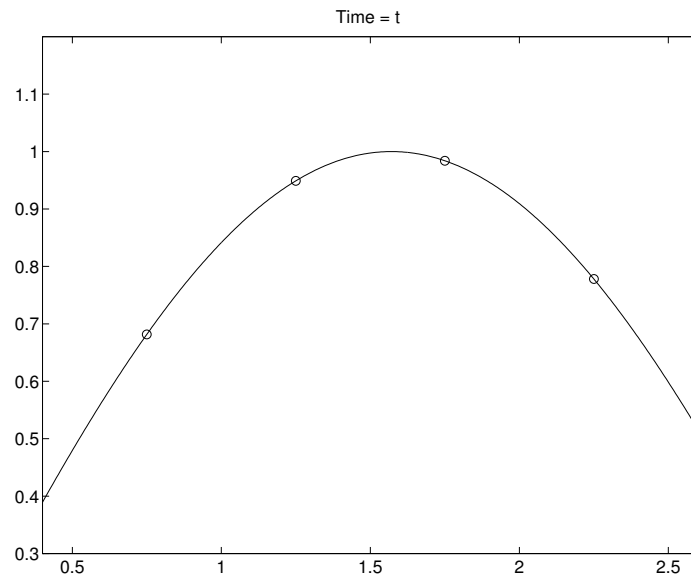
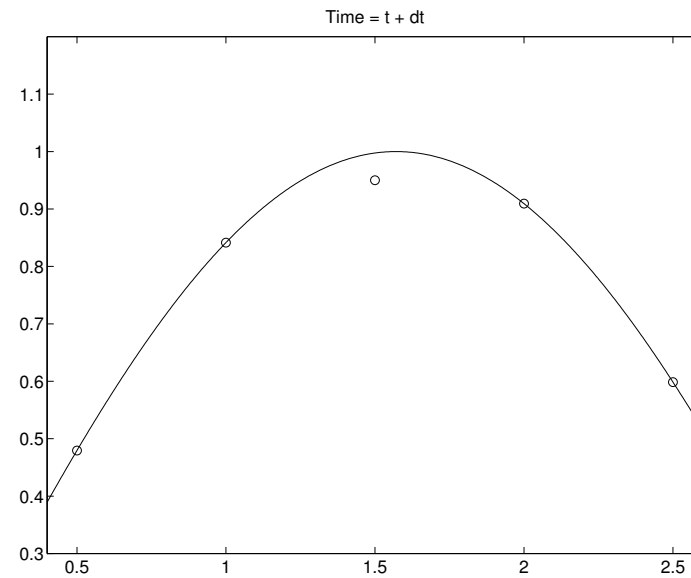
Одна из возможных волновых структур, возникающих при распаде разрыва. S — ударная волна, C — контактная поверхность, EF — веер волн разрежения. Состояниям 1 и 4 отвечают наборы газодинамических переменных Q_R и Q_L , соответственно.

Вычисление потоков через грани ячеек

Для вычисления потоков используется точное или приближенное решение задачи о распаде разрыва между $q_{i+1/2}^L$ и $q_{i+1/2}^R$. Было предложено большое количество способов приближенного решения задачи (солверов):

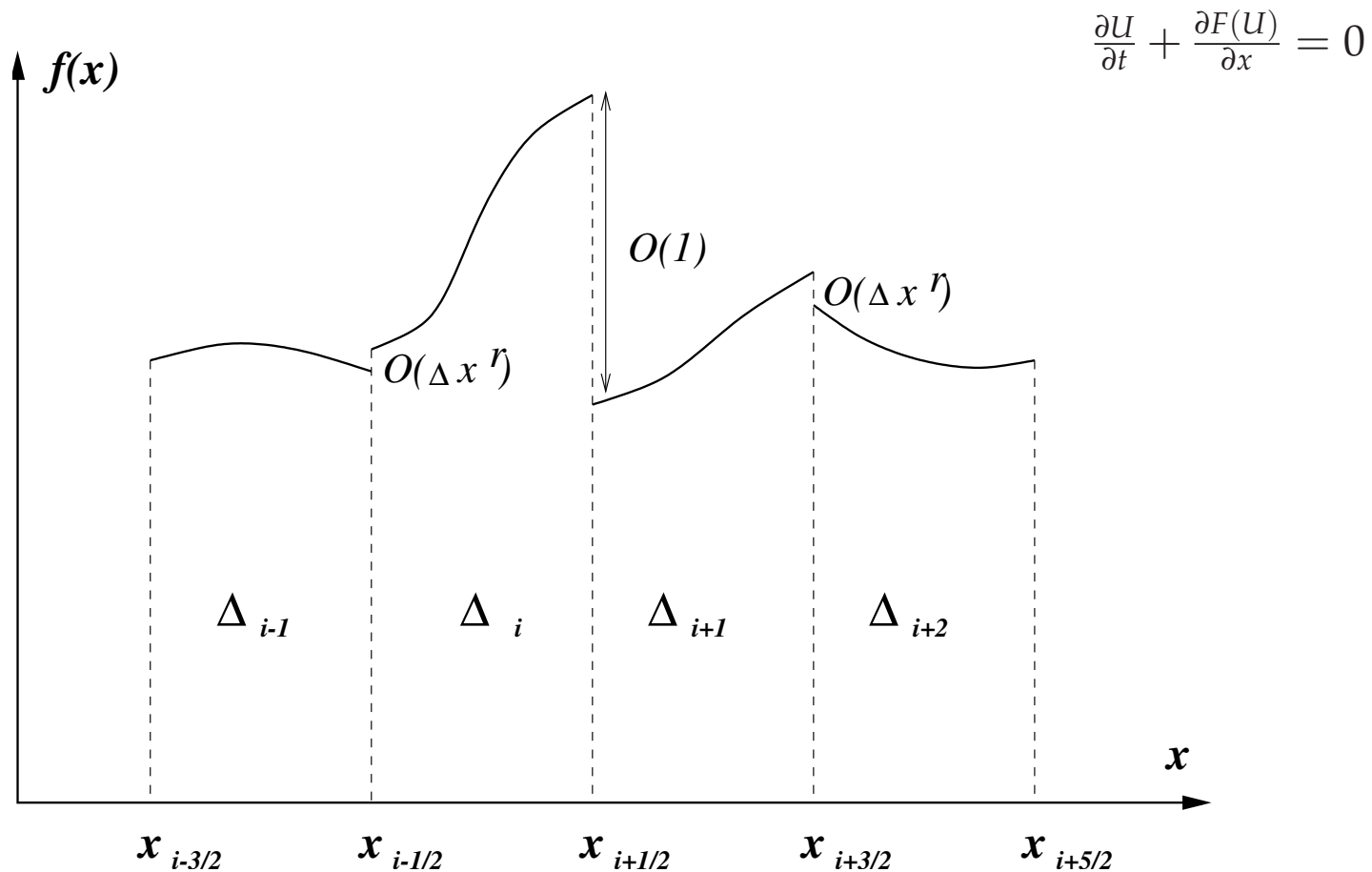
- Точное решение задачи о распаде разрыва
- Расщепление разности потоков по Роу
- Расщепление разности потоков по Ошеру
- Метод HLLE и его модификации (HLLEM, HLLEO, HLLC)
- Расщепление вектора потоков по ван Лееру
- Расщепление вектора потоков по Стегеру-Уормингу
- Метод AUSM
- Схема Маркины
- ... и множество других.

Первый порядок на гладких экстремумах

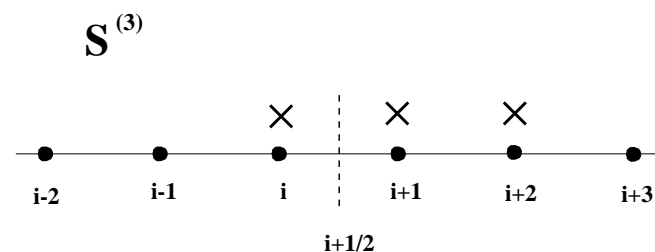
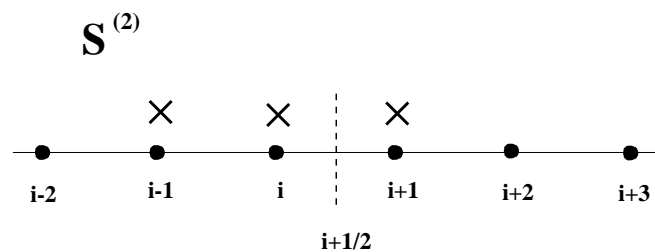
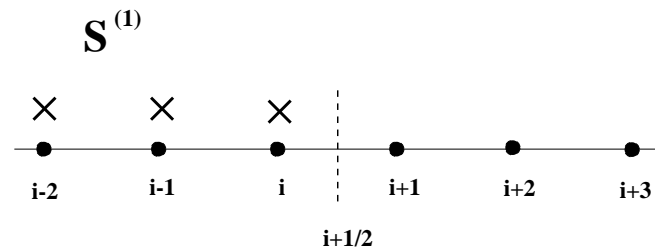
Время t Время $t + \Delta t$

Основная идея ENO и WENO схем

Основная идея: использовать кусочно-полиномиальную реконструкцию локально-характеристических переменных и избежать интерполирования через разрывы.



Конечноразностная WENO схема 5-го порядка



Скалярный закон сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad \lambda = \frac{\partial f}{\partial u} \geq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \sim \frac{\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}}{\Delta x}$$

ENO:

$$\hat{f}_{i+1/2} = \begin{cases} f_{i+1/2}^{(1)} = \frac{11}{6}f_i - \frac{7}{6}f_{i-1} + \frac{2}{6}f_{i-2} & \text{или} \\ f_{i+1/2}^{(2)} = \frac{2}{6}f_{i+1} + \frac{5}{6}f_i - \frac{1}{6}f_{i-1} & \text{или} \\ f_{i+1/2}^{(3)} = -\frac{1}{6}f_{i+2} + \frac{5}{6}f_{i+1} + \frac{2}{6}f_i \end{cases}$$

WENO:

$$\hat{f}_{i+1/2} = \sum_{v=1}^3 \omega^{(v)} f_{i+1/2}^{(v)}$$

Конечноразностная WENO схема 5-го порядка

$$\omega^{(v)} = \frac{\sigma^{(v)}}{\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)}}, \quad \sigma^{(v)} = \frac{\Omega^{(v)}}{[\varepsilon + IS^{(v)}]^p}, \quad p = 2, \quad \varepsilon \sim 10^{-6}$$

Более подходящий выбор: $\varepsilon = 10^{-6} \max\{f_{i-2}^2, \dots, f_{i+2}^2\} + 10^{-99}$ (Osher & Fedkiw)

Оптимальные коэффициенты:

$$\Omega^{(1)} = 1/10$$

$$\Omega^{(2)} = 6/10$$

$$\Omega^{(3)} = 3/10$$

Индикатор гладкости:

$$IS^{(v)} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[\Delta x \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + \Delta x^3 \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)^2 \right] dx$$

С оптимальными коэффициентами WENO схема эквивалентна несимметричной схеме 5-го порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-3f_{i+2} + 30f_{i+1} + 27f_i - 60f_{i-1} + 15f_{i-2} - 2f_{i-3}}{60\Delta x}$$

При $\lambda = \partial f / \partial u \leq 0$, используются симметрично отраженные формулы.

Интегрирование по времени

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = L(Q).$$

- При моделировании нестационарных течений требуется достаточно точно воспроизвести эволюцию течения во времени. Теоретически неявные методы могут обеспечить существенную экономию компьютерного времени за счет ослабления условий устойчивости и, следовательно, использования больших шагов интегрирования. Однако, их использование сильно осложняется нелинейностью уравнений Навье-Стокса. Фактически приходится прибегать к приближенной линеаризации уравнений, которая немедленно снижает порядок точности схемы. В ряде случаев приходится итерационно уточнять решение на каждом временном шаге.
- При моделировании стационарных течений использование неявных схем выглядит достаточно естественным выбором, особенно при наличии областей, где ячейки сетки должны сильно измельчаться (например, турбулентных пограничных слоев). Существуют также приемы, позволяющие ускорить сходимость явных схем, такие как использование локального временного шага, сглаживание невязок, многосеточные методы

Явные схемы

Трехстадийная TVD схема Рунге-Кутты 3-его порядка

$$\begin{aligned} Q^{(1)} &= Q^n + \Delta t L(Q^n), \\ Q^{(2)} &= \frac{3}{4}Q^n + \frac{1}{4}Q^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(Q^{(1)}), \\ Q^{n+1} &= \frac{1}{3}Q^n + \frac{2}{3}Q^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(Q^{(2)}). \end{aligned}$$

Условие устойчивости для явных схем (обобщенное условие Куранта–Фридрихса–Леви):

$$\Delta t \leq CFL \left/ \max_{i,j,k} \left(\frac{|u_{ijk}| + a_{ijk}}{\Delta x_{ijk}} + \frac{|v_{ijk}| + a_{ijk}}{\Delta y_{ijk}} + \frac{|w_{ijk}| + a_{ijk}}{\Delta z_{ijk}} + \frac{2\gamma\mu}{\rho \text{RePr}} \left(1/(\Delta x_{ijk})^2 + 1/(\Delta y_{ijk})^2 + 1/(\Delta z_{ijk})^2 \right) \right) \right.$$

Число Куранта $CFL < 1$.

Неявные схемы

Обычно уравнения линейризуются относительно переменных на верхнем слое. Используется приближенная факторизация — разложение на произведение одномерных операторов. Возможно также использование итерационных методов, таких как метод Гаусса–Зейделя, или методов, которые являются прямыми в одном направлении и итерационными в других.

LU-факторизация

$$(D + L)D^{-1}(D + U)\Delta Q^n = R^n, \quad \Delta Q^n = Q^{n+1} - Q^n.$$

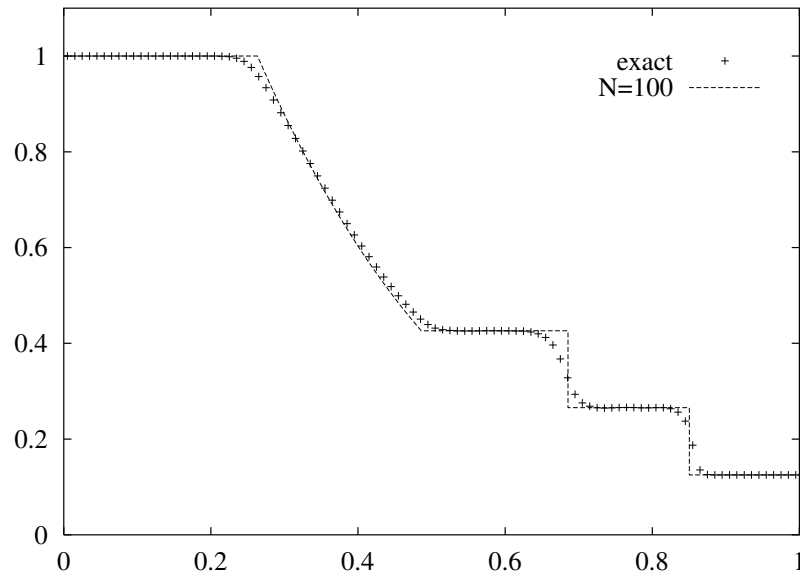
Эта система может быть решена в два прохода:

$$\begin{aligned} (D + L) \Delta Q^* &= R^n, \\ (D + U) \Delta Q^n &= D\Delta Q^*. \end{aligned}$$

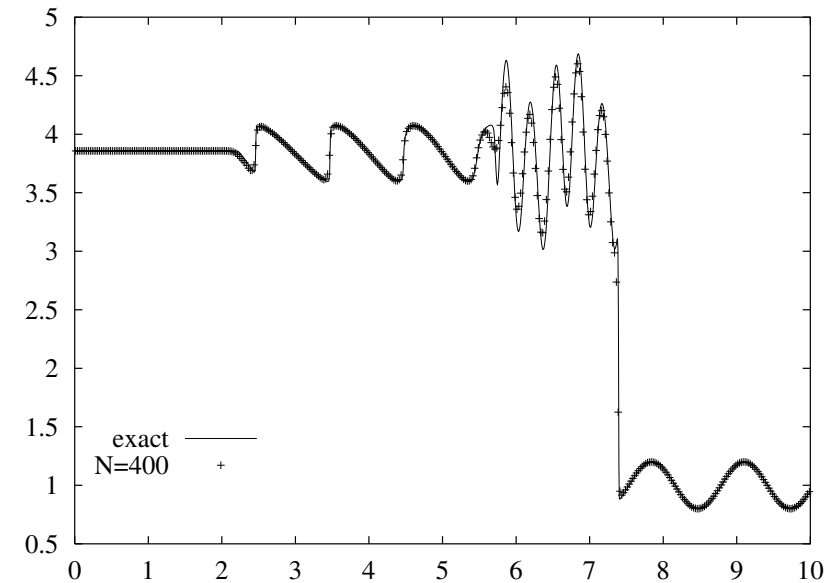
Фактически проходы выполняются на плоскостях $i + j + k = \text{const}$, так что внедиагональные члены известны с предыдущих частей прохода:

$$\begin{aligned} D \Delta Q_{ijk}^* &= R_{ijk}^n - L \Delta Q^*, \\ D \Delta Q_{ijk}^n &= D\Delta Q^* - U \Delta Q^n, \end{aligned}$$

Одномерные расчеты



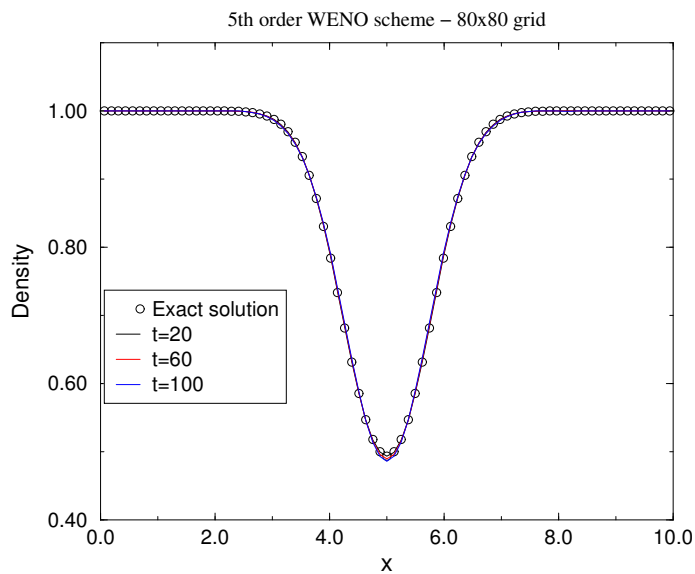
Задача Сода об ударной трубе,
N=100. HLLC солвер



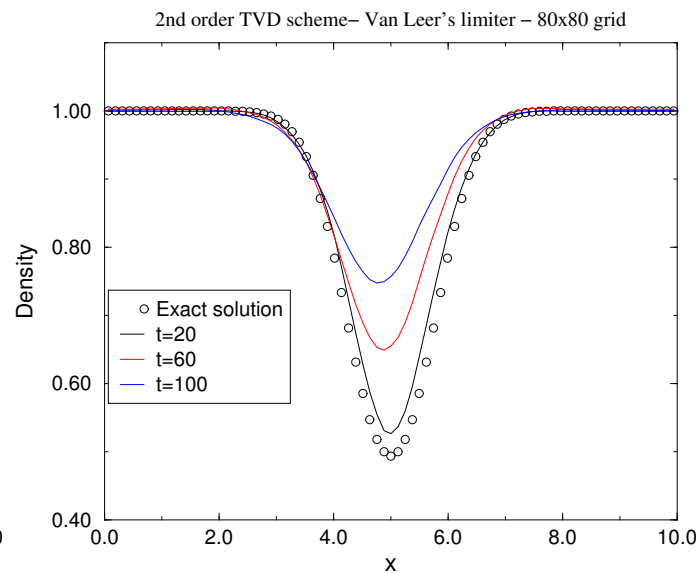
Взаимодействие ударной волны
с возмущением плотности,
N=400. HLLC солвер

Пример: диагональная конвекция вихря

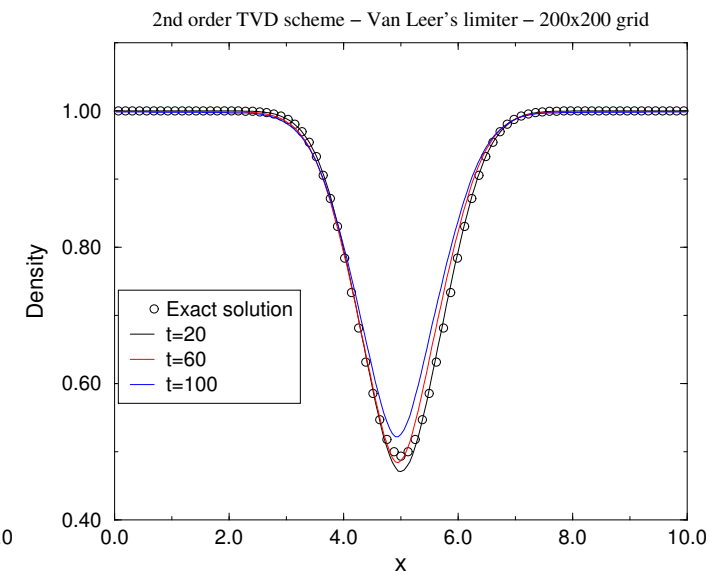
Изэнтропический вихрь переносится средним полем скорости $u = 1, v = 1$



5th order WENO, 80×80



2nd order TVD, 80×80



2nd order TVD, 200×200

Визуализация расчетных данных

- Построение изолиний и заливка цветом — вот графические техники, которые наиболее широко используются для представления вычислительных результатов. В то же время как более изощренные способы конструирования образов течения из расчетных полей газодинамических величин были развиты, вплоть до настоящего времени они не применяются в вычислительной аэродинамике так широко, как они того заслуживают.
- Численные интерферограммы, теневые картинки и шпирен-визуализации (Yates 1993, Quirk, 1994) позволяют построить картины течения, близко напоминающие те, что регистрируются экспериментально.
- Кроме того, они очень чувствительны к тонким деталям течения, также как к любому численному шуму. Последнее означает, что представляют суровое испытание качества численного моделирования. Более важным, однако, является то, что образы, полученные с помощью этих более новых способов визуализации, содержат ранее недоступную информацию об исследуемых течениях.

Численный шлирен

- Для двумерного течения, $\nabla\rho(x, y) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}, \frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^T$
- На экспериментальных шлирен-фотографиях либо $\partial\rho/\partial x$, либо $\partial\rho/\partial y$ визуализируется в зависимости от ориентации ножа.
- Для численных образов, наиболее подходящим выбором кажется абсолютная величина градиента плотности

$$|\nabla\rho| = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2}.$$

- Лучше всего использовать нелинейную шкалу, чтобы ясно представить даже слабые неоднородности течения, например изображая величину

$$S(x, y) = \beta \exp\left(-\frac{\kappa |\nabla\rho|}{|\nabla\rho|_{\max}}\right).$$

Два свободных параметра $\beta \sim 0.8$, $\kappa \sim 15$.

Численные теневые картины

- Локальная интенсивность света на теневой картинке зависит от суммы вторых производных плотности:

$$\nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}.$$

- Численная теневая картина может быть сконструирована, изображая эту величину в нелинейной шкале, как это делается для шпирен-визуализаций. Один из возможных выборов суть

$$D(x, y) = \beta \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\kappa \nabla^2 \rho}{|\nabla^2 \rho|_{\max}} \right) \right].$$

В соответствии с моим опытом, константа κ должна быть много больше, чем для шпирен-визуализаций, $\kappa \sim 250$.

Численные интерферограммы

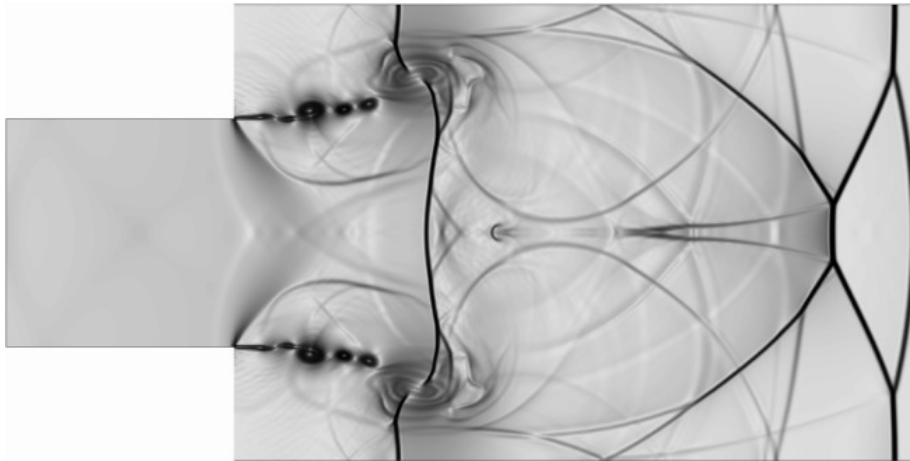
- Численные интерферограммы пытаются подражать экспериментальным картинам используя само поле плотности. Интенсивность света изменяется периодически с изменением плотности, воспроизводя экспериментальные интерферограммы, где это происходит из-за интерференции между пучком света, проходящим через течение и опорным пучком. Величина, которая на самом деле рисуется, суть

$$I(x, y) = 1 + \cos\left(2\pi\frac{\rho - \rho_0}{\Delta\rho}\right).$$

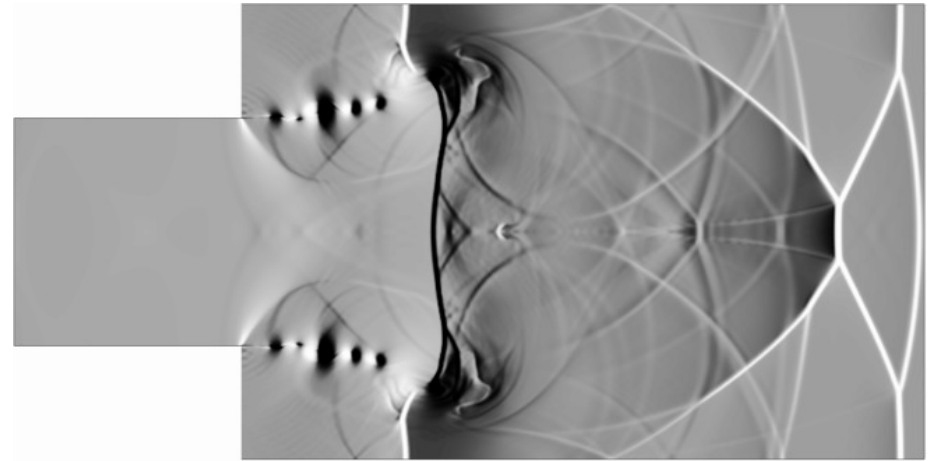
Характерное значение плотности ρ_0 изображается на интерферограммах белым цветом. Различные выборы $\Delta\rho$ изменяют N , число интерференционных полос. Одна из возможностей — взять $\Delta\rho = (\rho_{\max} - \rho_{\min})/N$.

- Когда плотность меняется от ρ_{\min} до ρ_{\max} , оттенки серого цвета N раз проходят от белого до черного и назад, образуя картинку, которая высоко чувствительна к неоднородностям течения.

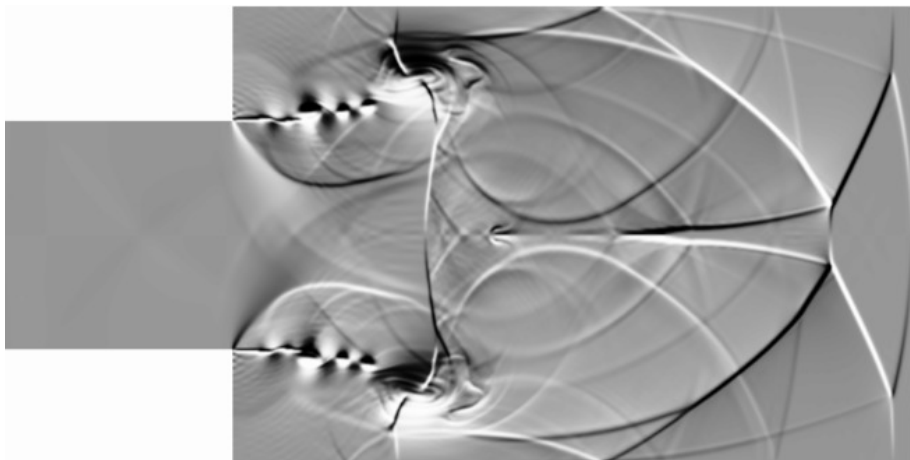
Сравнение различных способов визуализации



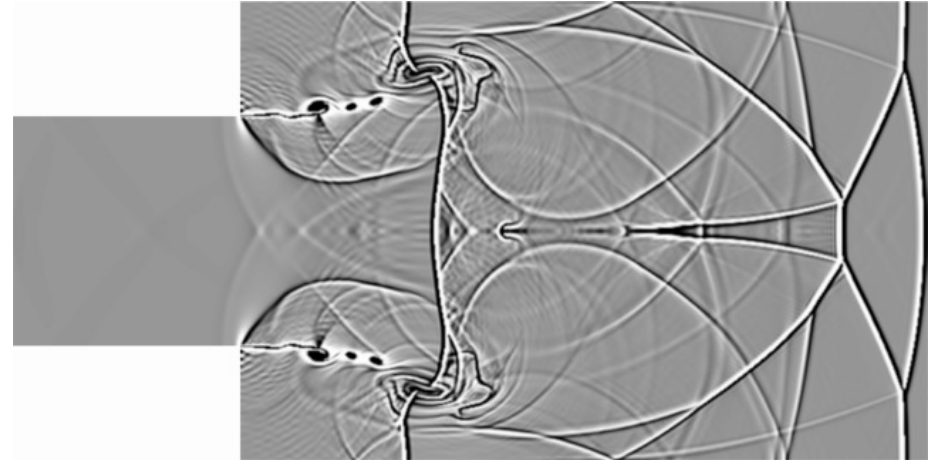
Шлирен-визуализация $|\nabla\rho|$



Шлирен-визуализация $\partial\rho/\partial x$



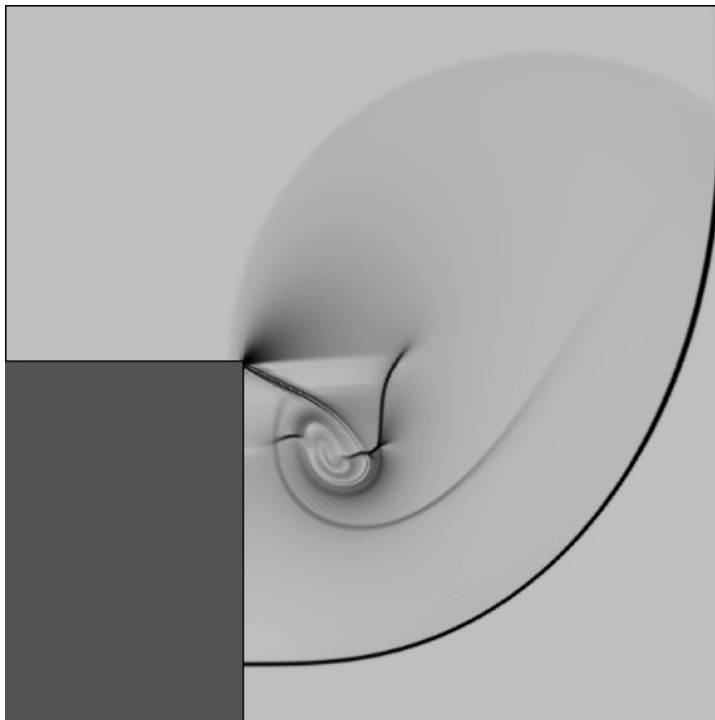
Шлирен-визуализация $\partial\rho/\partial y$



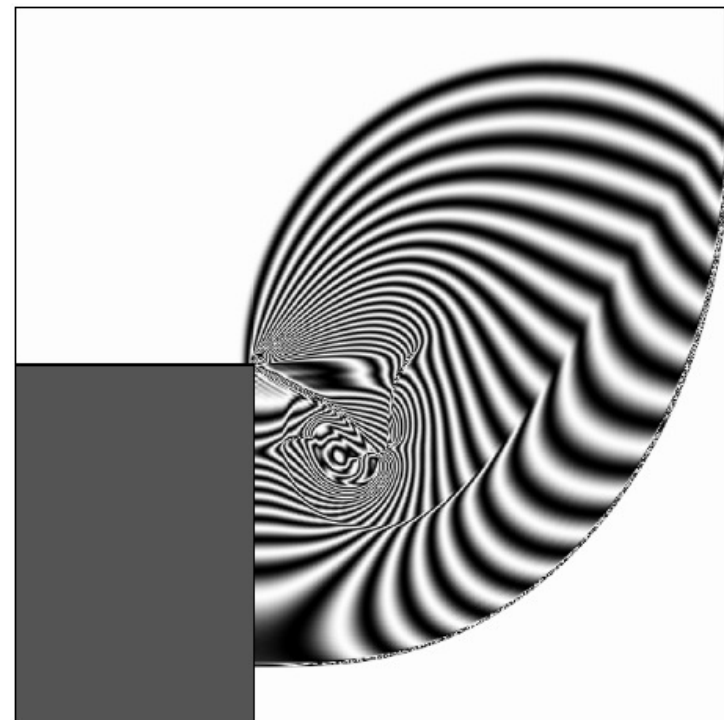
Теневая визуализация

Дифракция ударной волны ($M_s = 2$) на прямом угле

Численная шпирен-визуализация

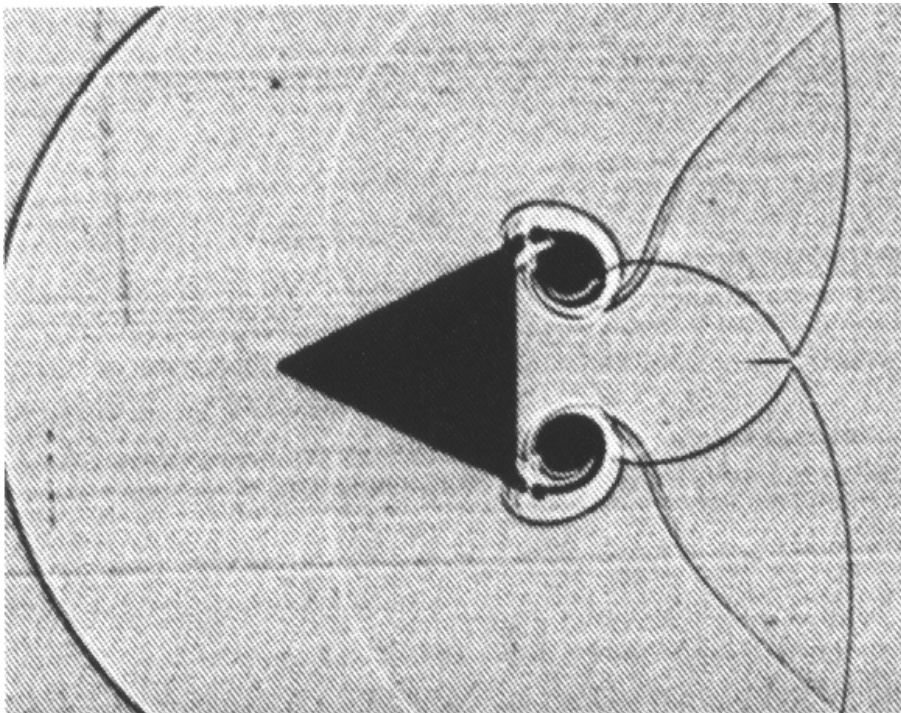


Численная интерферограмма

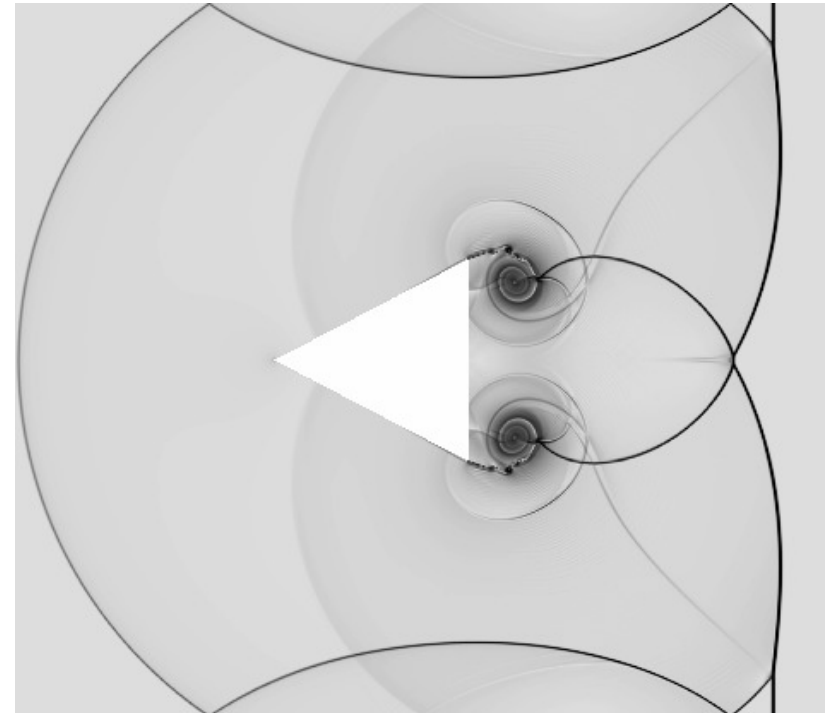


*Дифракция ударной волны ($M_s = 1,3$)
на треугольном теле*

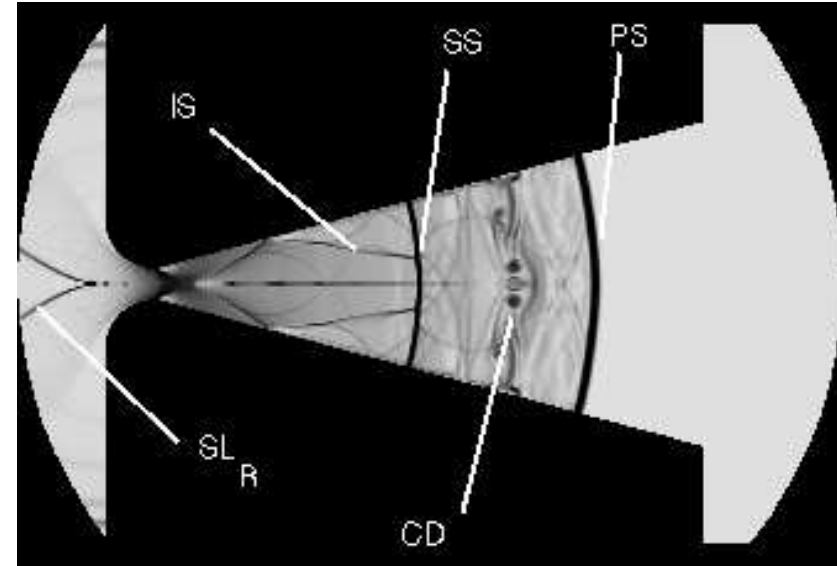
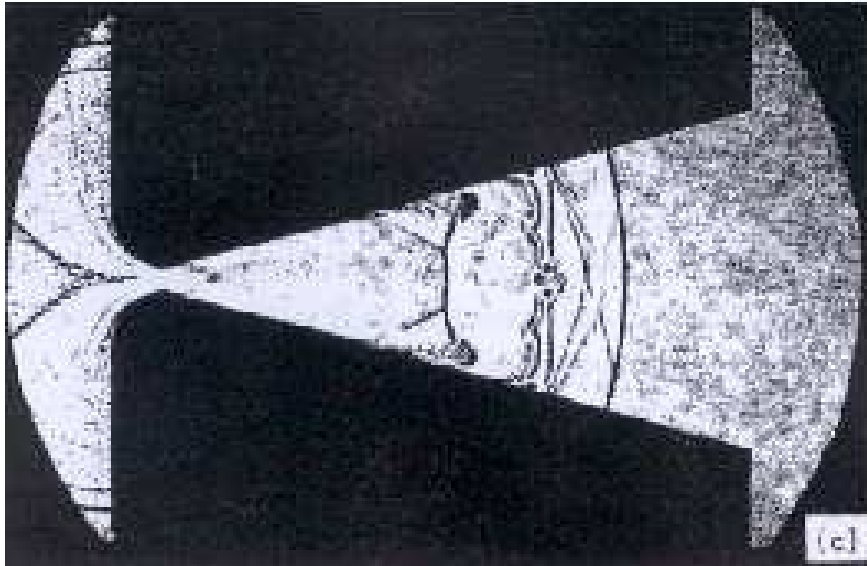
Экспериментальная теньевая фотография



Численная шпирен-визуализация

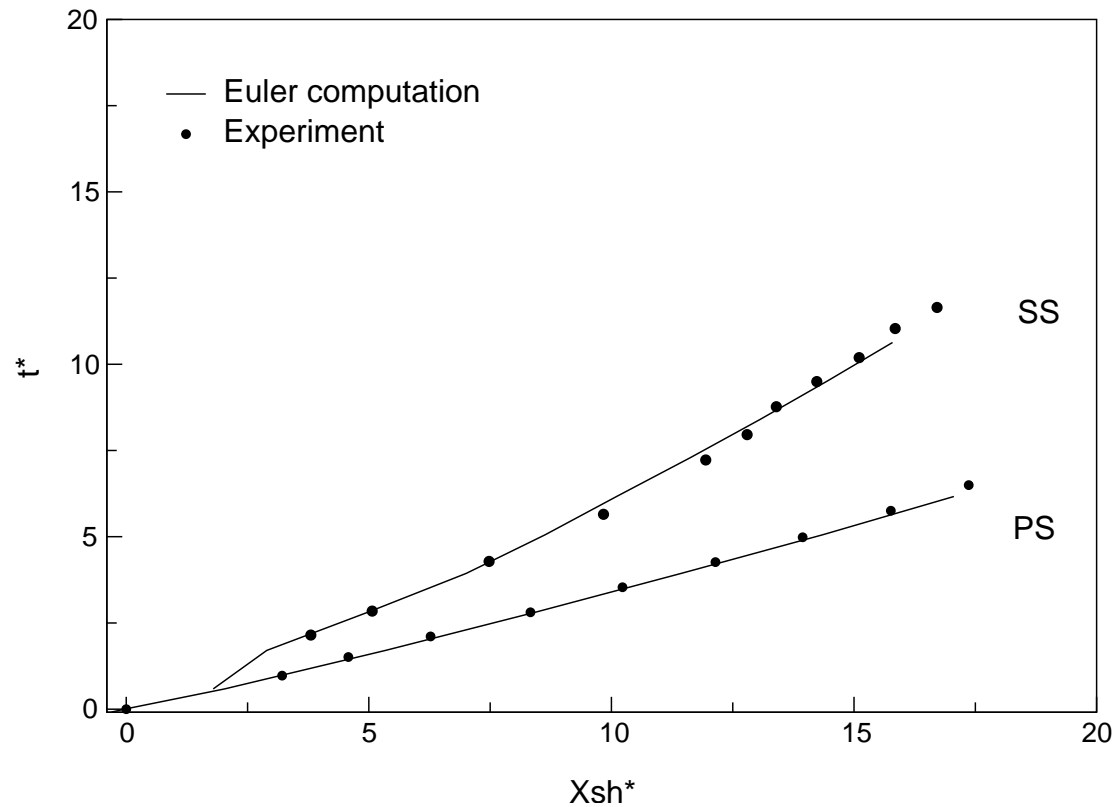


Процесс запуска отражающего сопла



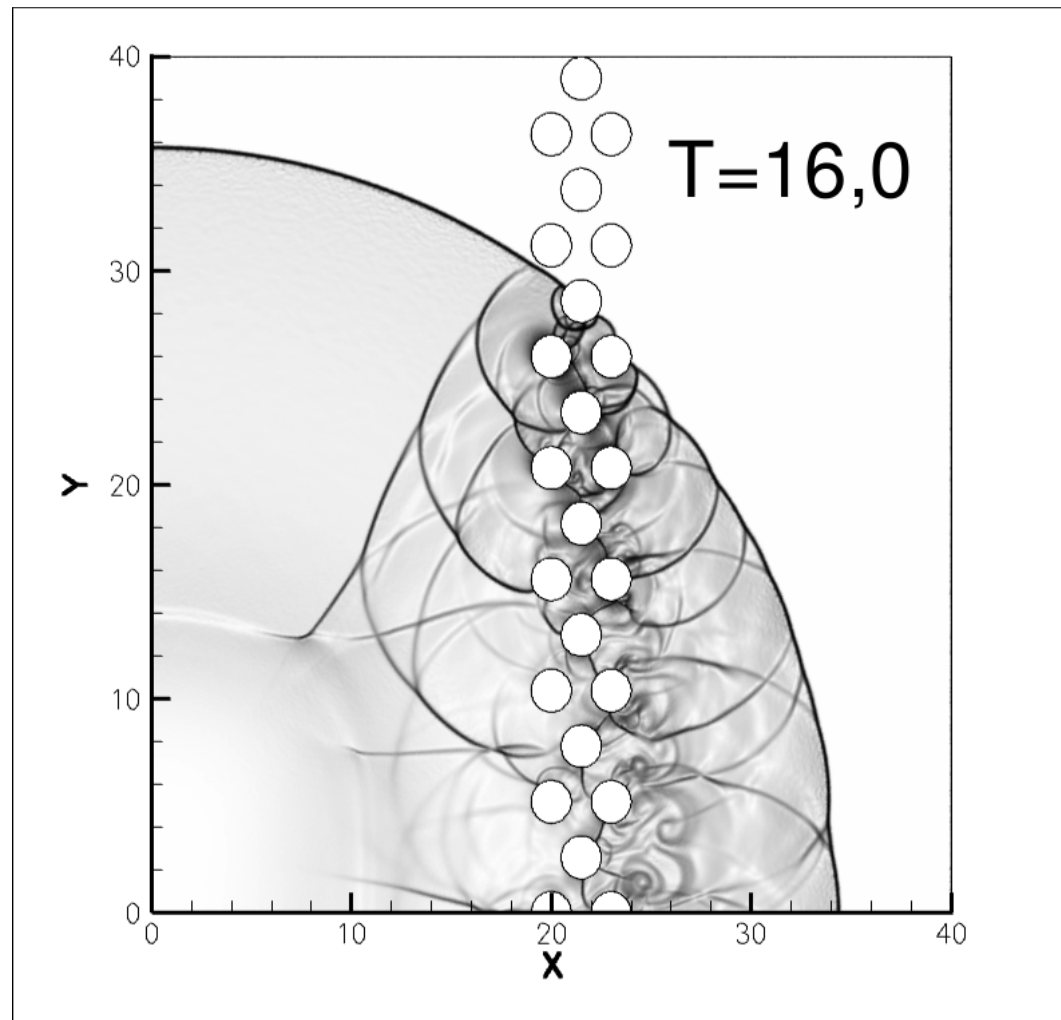
Экспериментальная (Amann, 1969) и численная (невязкий расчет) шпирен-визуализации. PS: Первичная ударная волна, CD: Контактный разрыв, SS: Вторичная волна, IS: Внутренний скачок, SL_R: Отраженный контактный разрыв.

Процесс запуска отражающего сопла



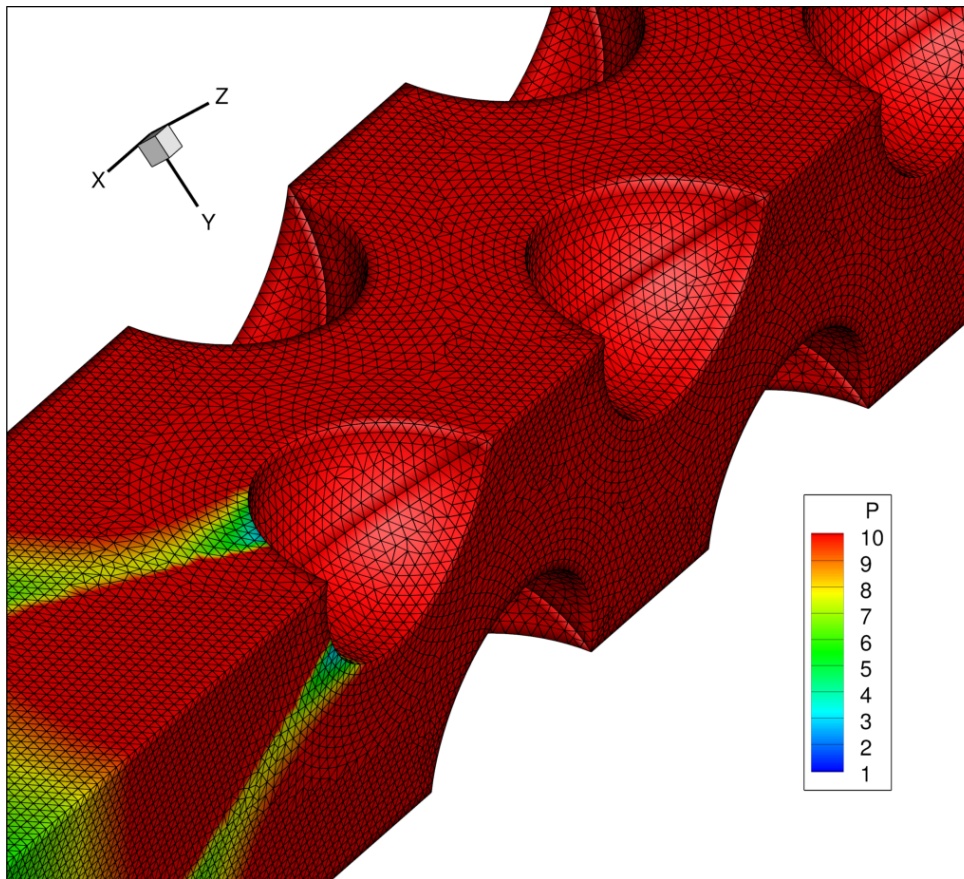
Сравнение экспериментальных и численных результатов: $(x - t)$ диаграмма местоположений ударных волн на оси

Прохождение взрывной волны через систему цилиндров

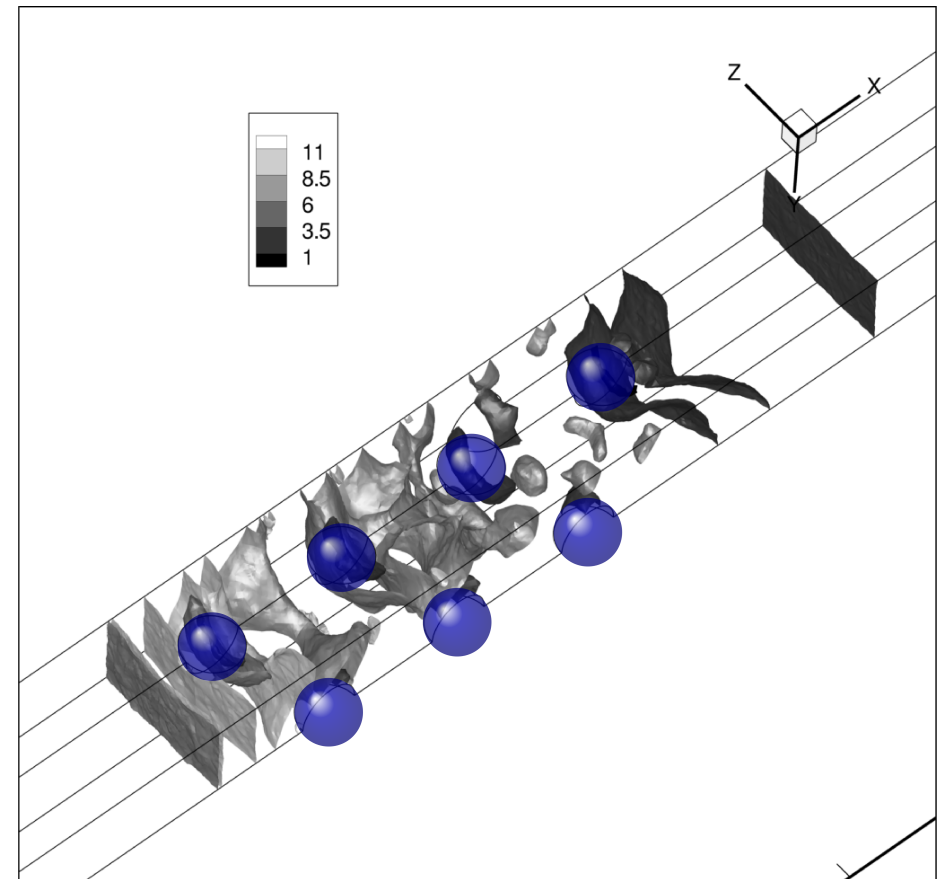


Численная шпирен-визуализация

Прохождение ударной волны через систему сфер

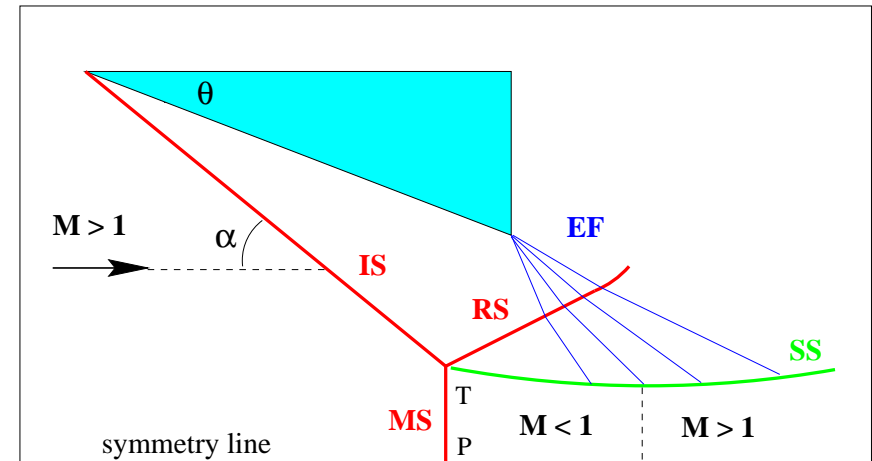
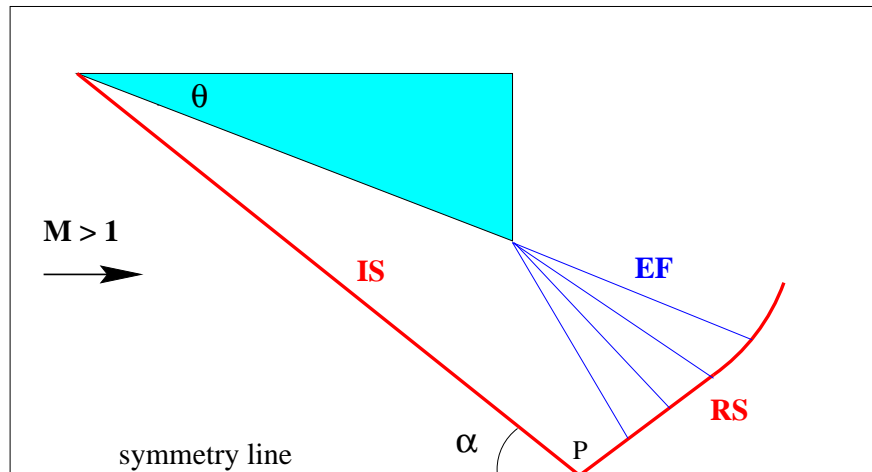


Расчетная сетка



Форма ударной волны

Стационарное регулярное и маховское отражение



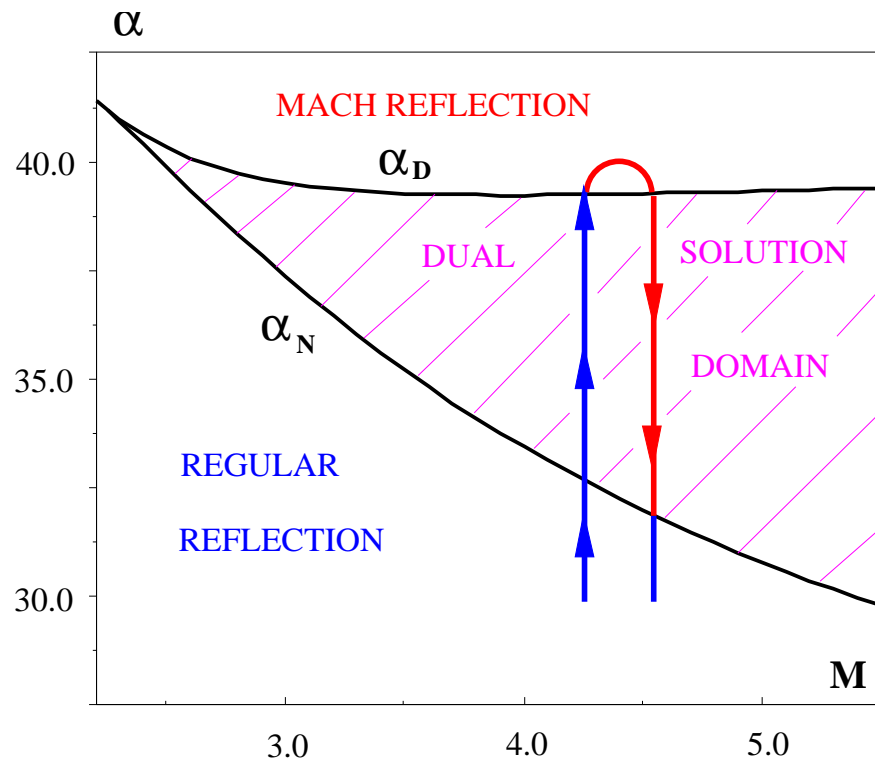
Регулярное отражение:

- IS** – Падающий скачок
- RS** – Отраженный скачок
- EF** – Веер волн разрежения
- P** – Точка отражения

Маховское отражение:

- MS** – Ножка Маха
- SS** – Контактный разрыв
- T** – Тройная точка

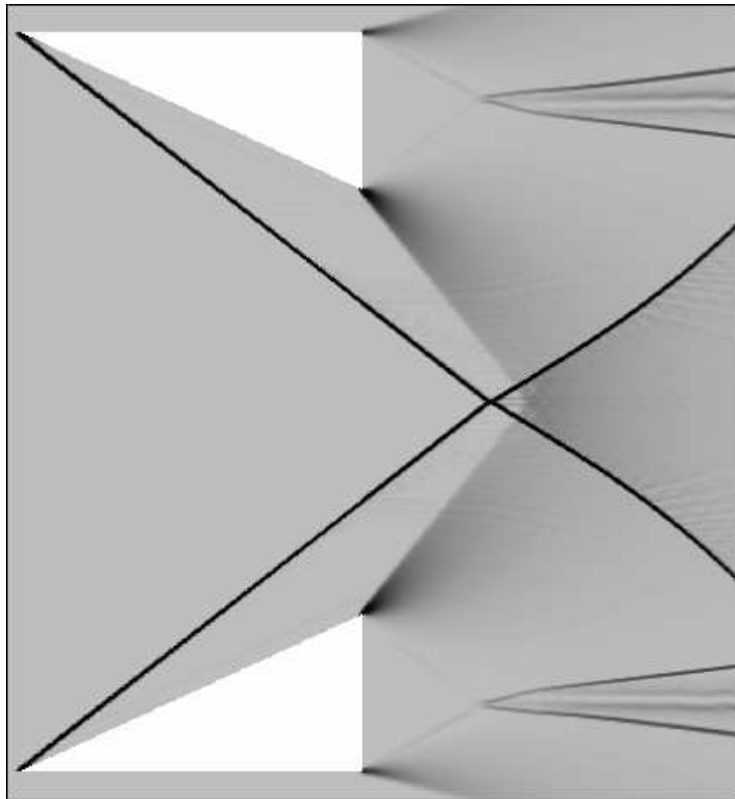
Область двойного решения



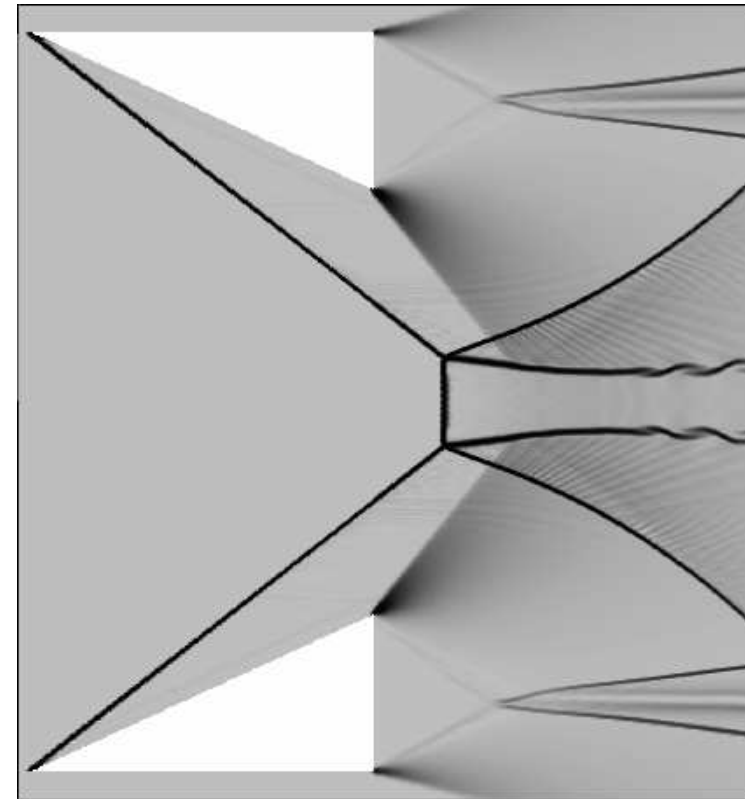
Критерии перехода:

- α_D — Критерий максимального угла поворота
- α_N — Критерий механического равновесия или критерий фон Неймана

Гистерезис при отражении ударных волн

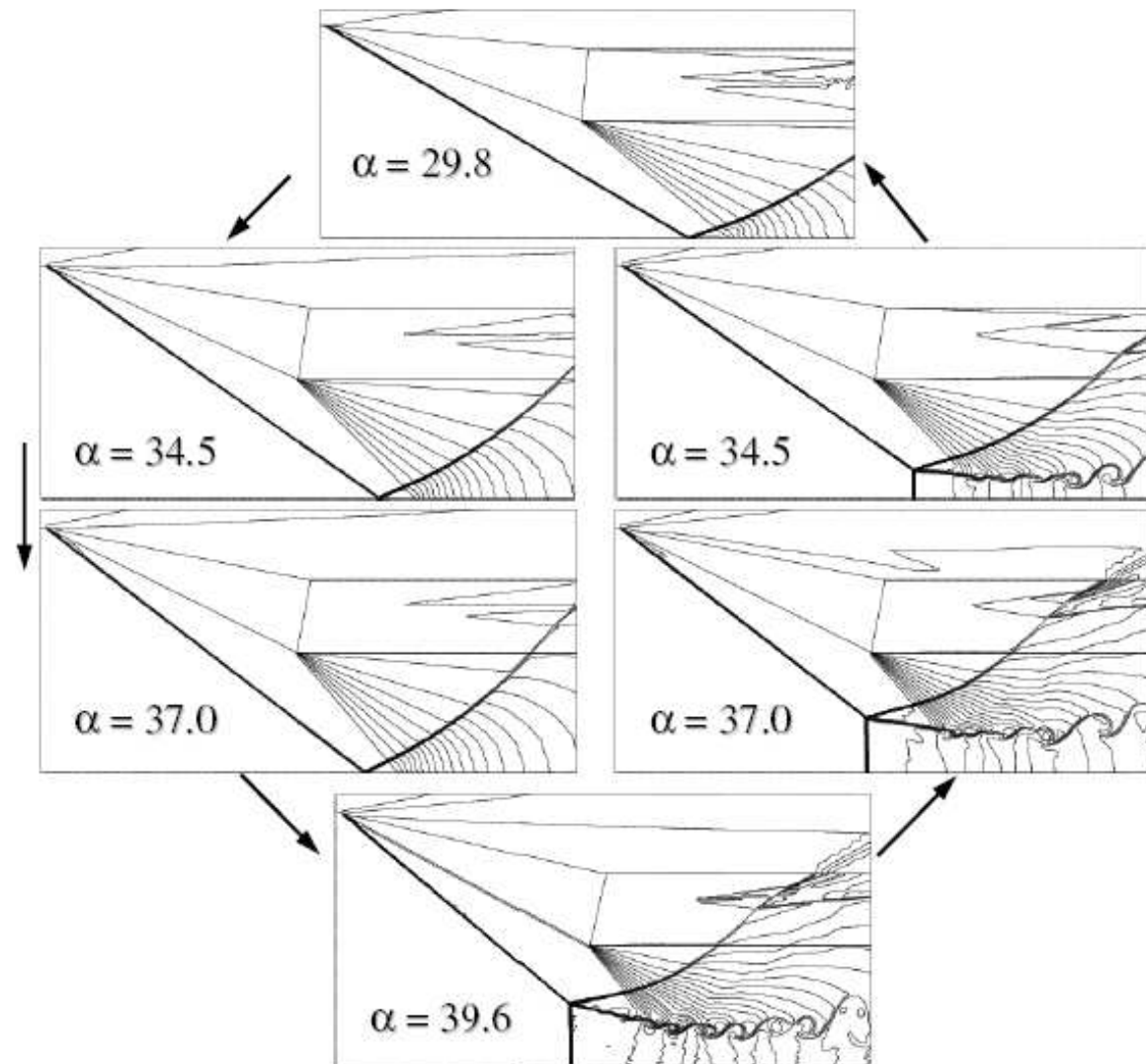


Численная шпирен-визуализация регулярного отражения при $M_\infty = 4$, $\alpha = 38^\circ$.



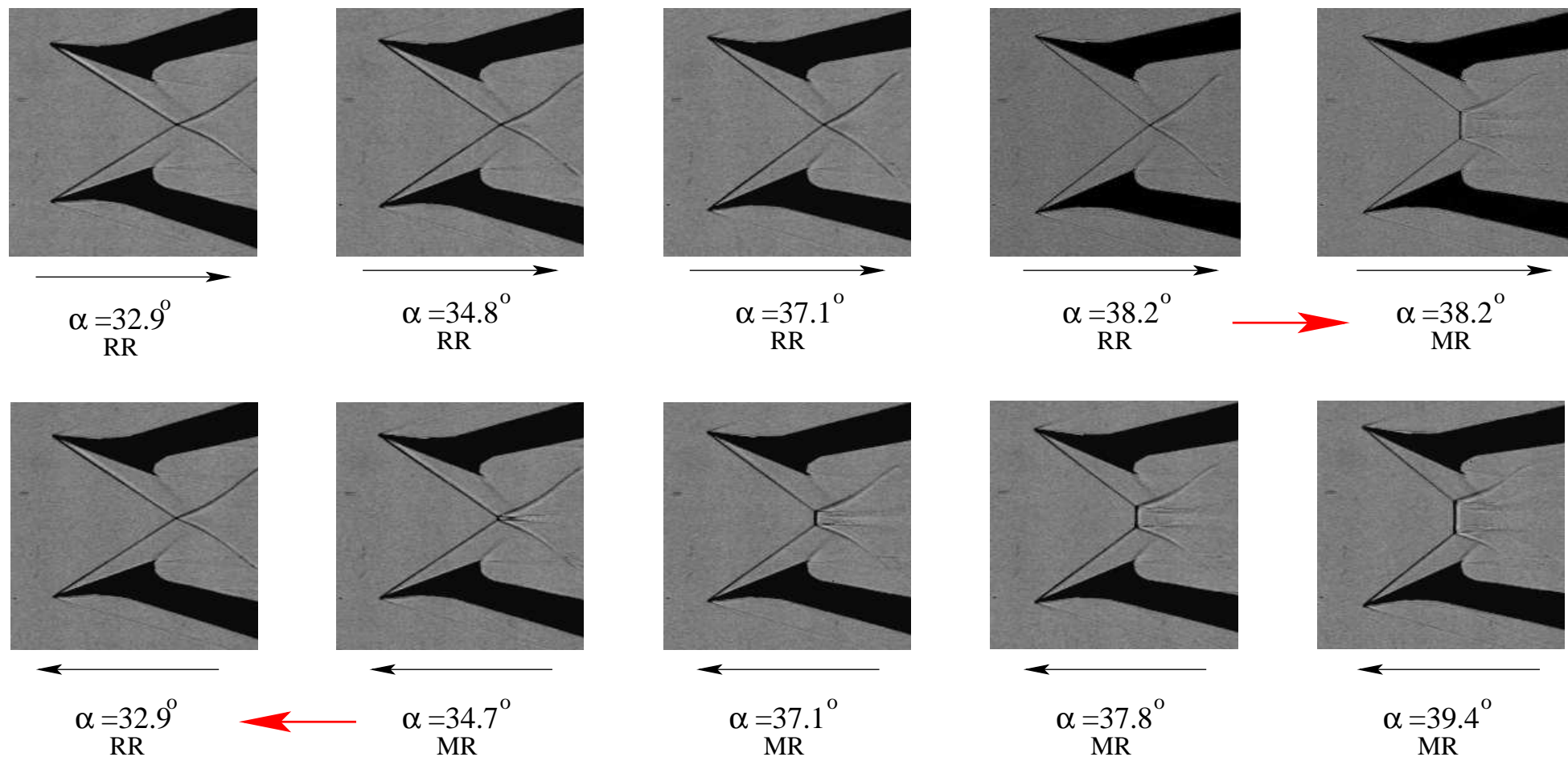
Численная шпирен-визуализация маховского отражения при $M_\infty = 4$, $\alpha = 38^\circ$.

Кольцо гистерезиса



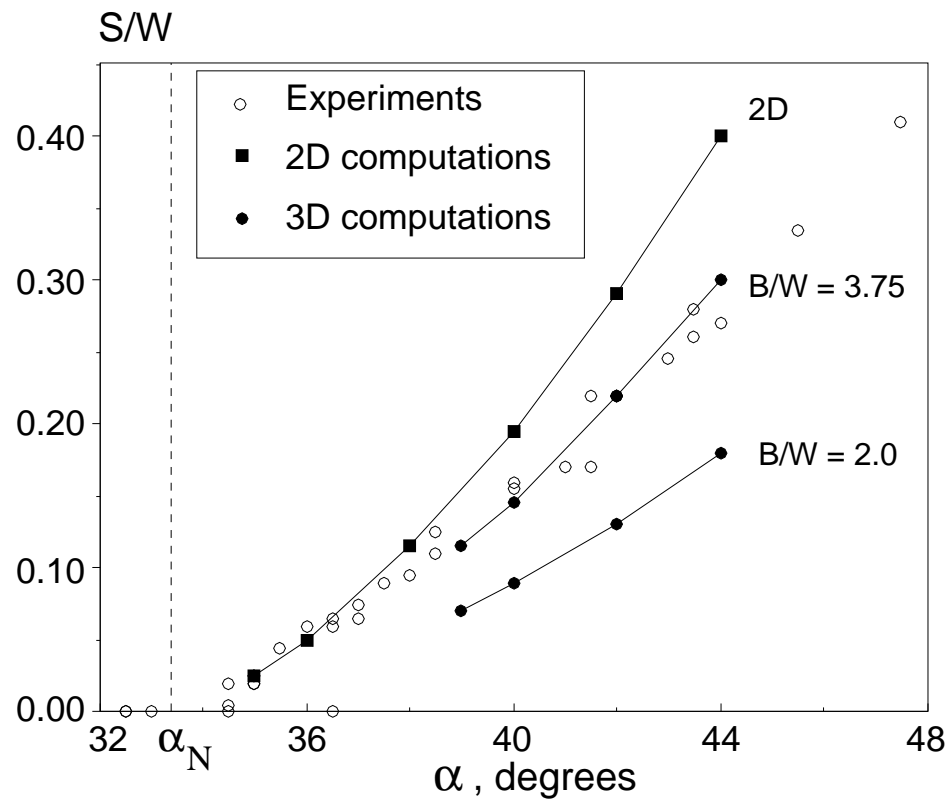
$$M = 5$$
$$g/w = 0.42$$
$$\alpha_N = 30.8^\circ$$
$$\alpha_d = 39.3^\circ$$

Гистерезис в малотурбулентной аэродинамической трубе

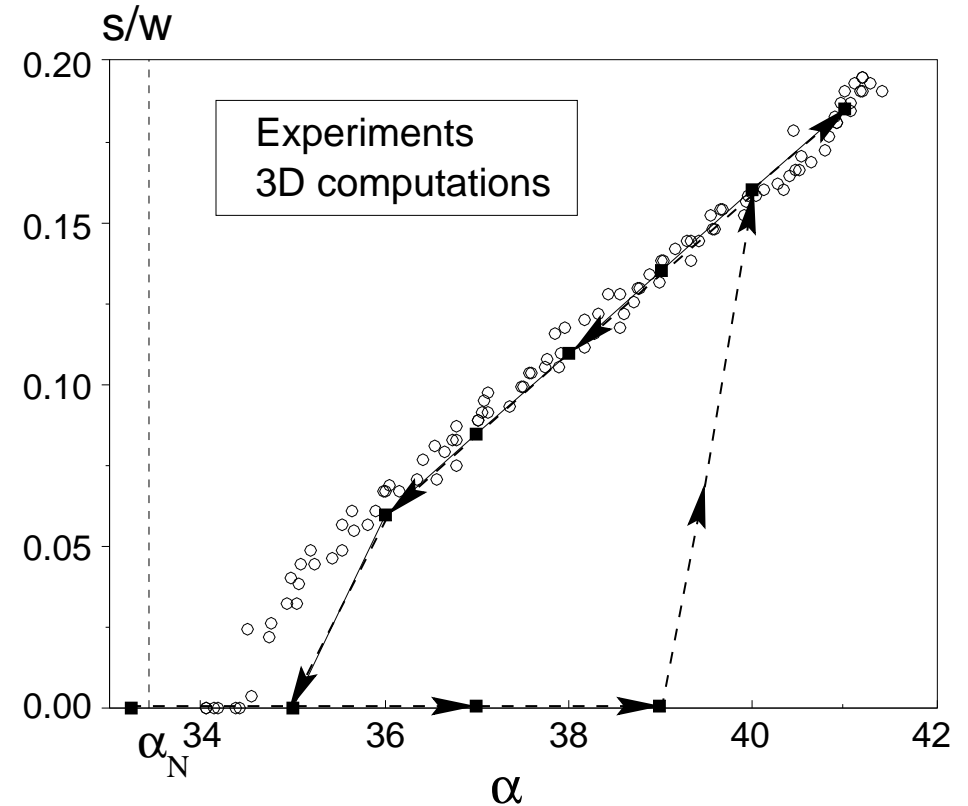


$M = 4$. Теоретические критерии: $\alpha_N = 33.4^\circ$, $\alpha_d = 39.2^\circ$

Высота ножек Маха в расчетах и экспериментах

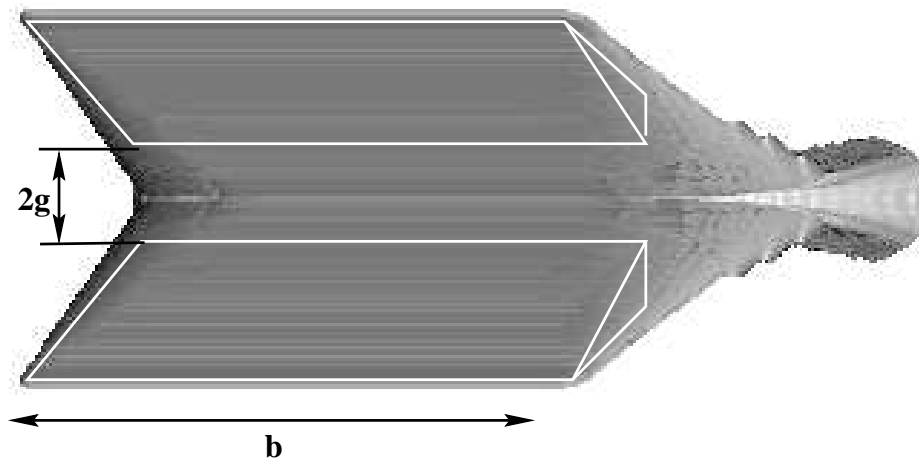


$M = 4, b/w = 3,75, g/w = 0,56$

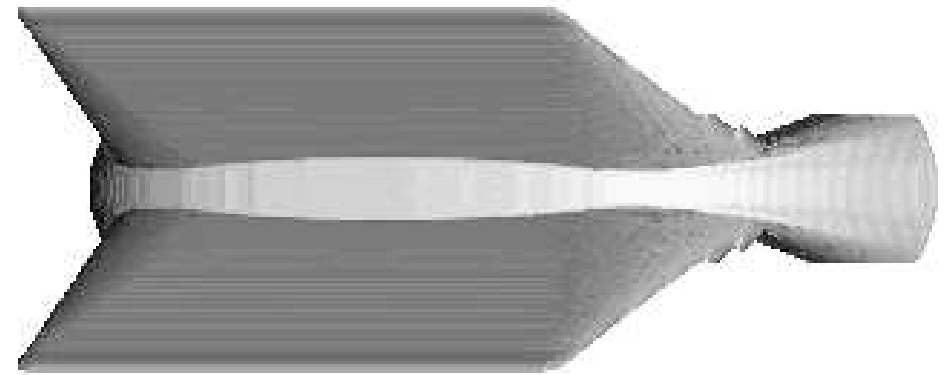


$M = 4, b/w = 2, g/w = 0,3$

Трехмерные ударно-волновые конфигурации



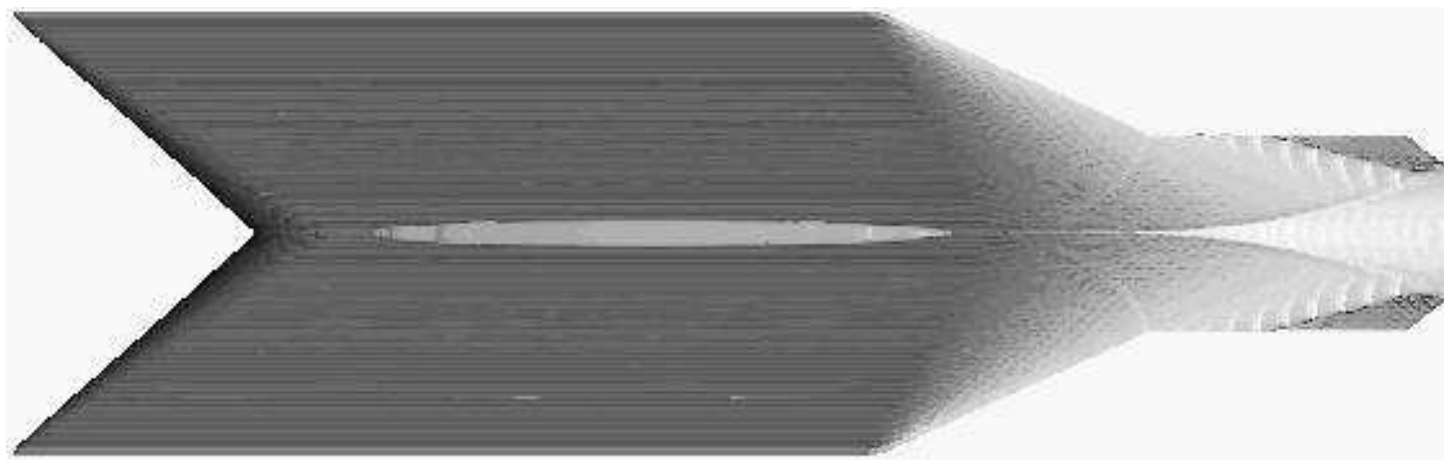
регулярное отражение



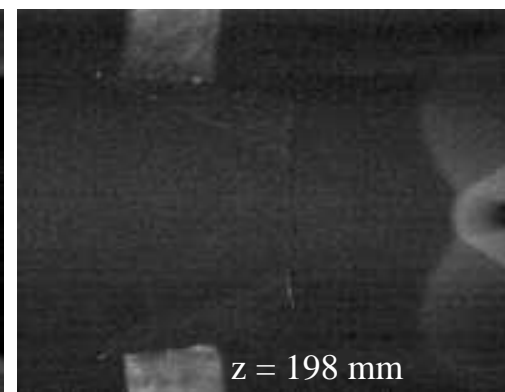
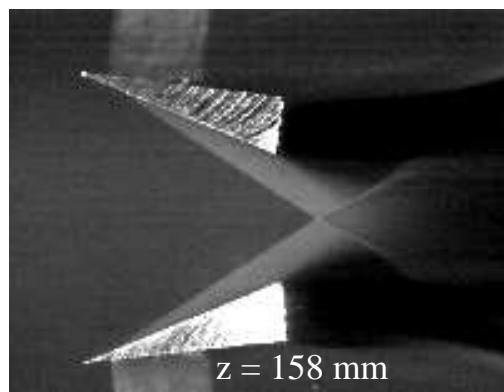
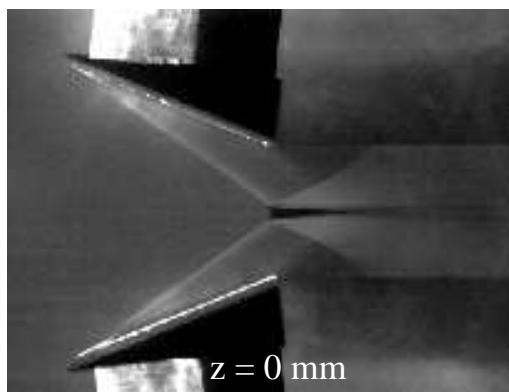
маховское отражение

Изоповерхности плотности $\rho/\rho_\infty = 2,2$ при $M = 4$, $\alpha = 38^\circ$, $b/w = 2$, $g/w = 0,3$.

Комбинированное отражение



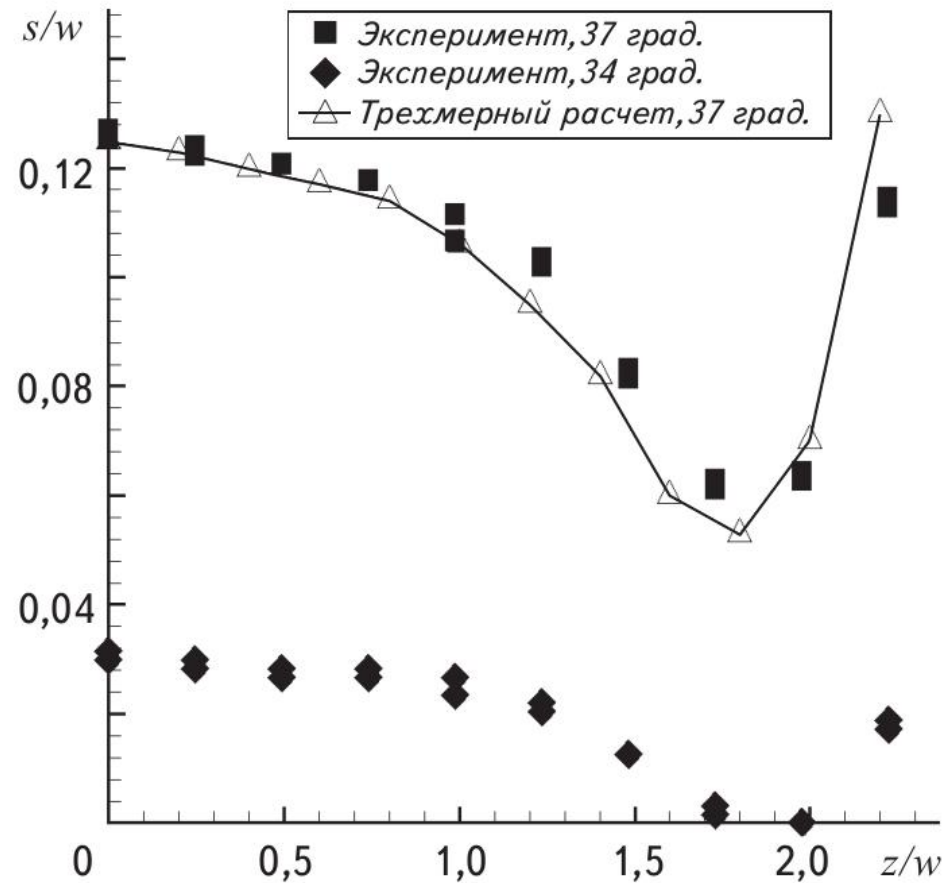
$$M = 4, b/w = 3,75, g/w = 0,3, \alpha = 35,5^\circ$$



Картинки течения, полученные методом лазерного ножа

$$M = 4, b/w = 3,75, g/w = 0,3, \alpha = 34^\circ$$

Сравнение расчета и эксперимента

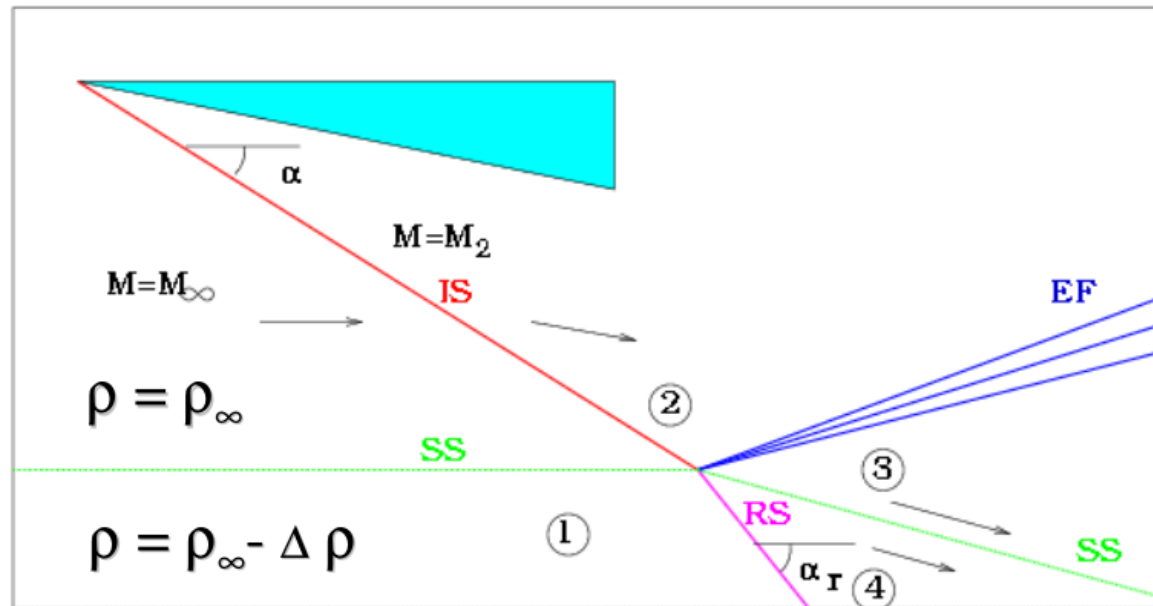


Изменение величины ножки Маха по размаху. $M = 4$, $b/w = 3,75$, $g/w = 0,3$

Рекомендуемая литература

1. Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1,2. М.: Мир, 1990.
2. К. Флетчер. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1,2. М.: Мир, 1991.
3. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М: Физматлит, 2001, 2012.
4. J. Blazek. Computational Fluid Dynamics. Principles and Applications. Amsterdam et al.: Elsevier, 2005, 2007, 2015.
5. E. F. Toro. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1997, 1999, 2009.
6. В. И. Пинчуков, Ч.-В. Шу. Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
7. C.-W. Shu. Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. NASA/CR-97-206253, ICASE Report No. 97-65, 1997.
lsec.cc.ac.cn/lcf/DEWENO/paper/icase-1997-65.pdf
8. V. D. Liseikin. Grid Generation Methods. Springer, 1999, 2010, 2017.

Локализованные возмущения плотности



IS - incident shock

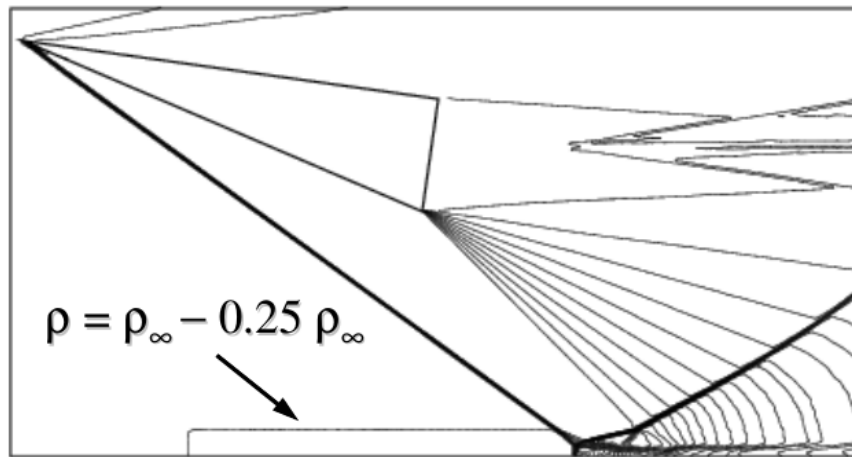
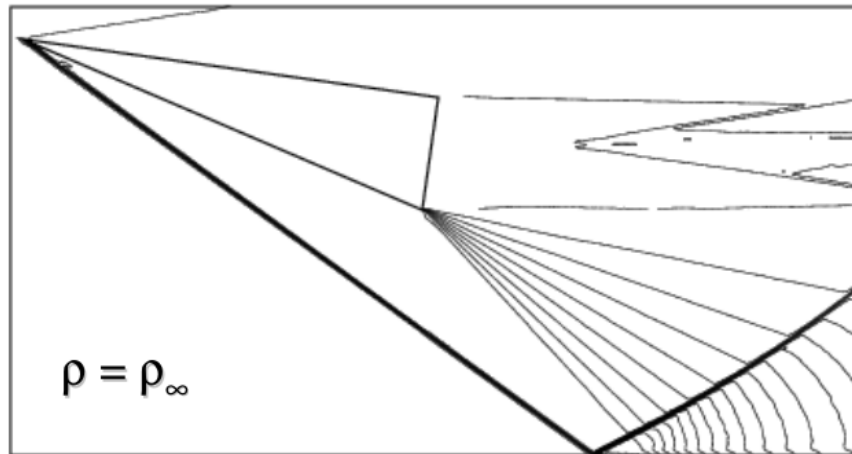
RS - refracted shock

EF - expansion fan

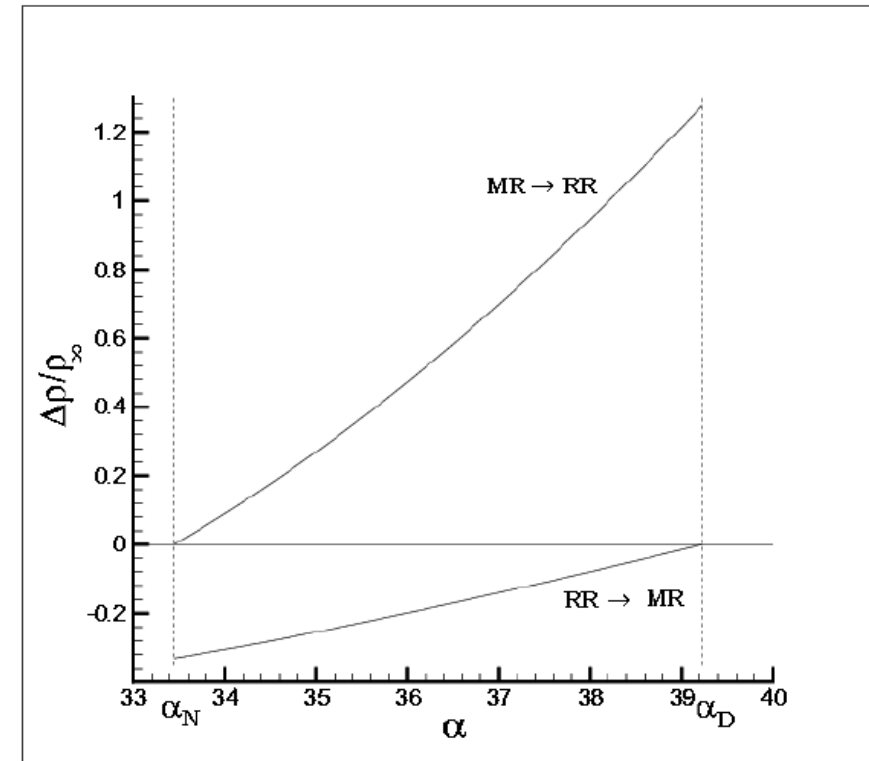
SS - slipstream

При взаимодействии контактного разрыва, отделяющего возмущенный газ от невозмущенного, с падающей волной последняя отклоняется на некоторый угол.

Переход от регулярного отражения к маховскому

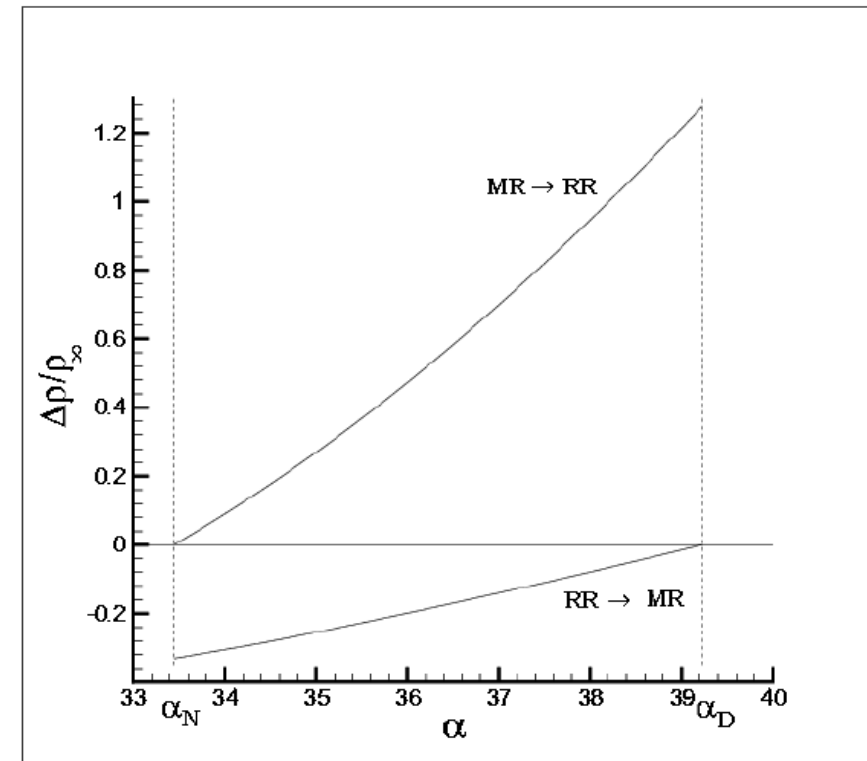
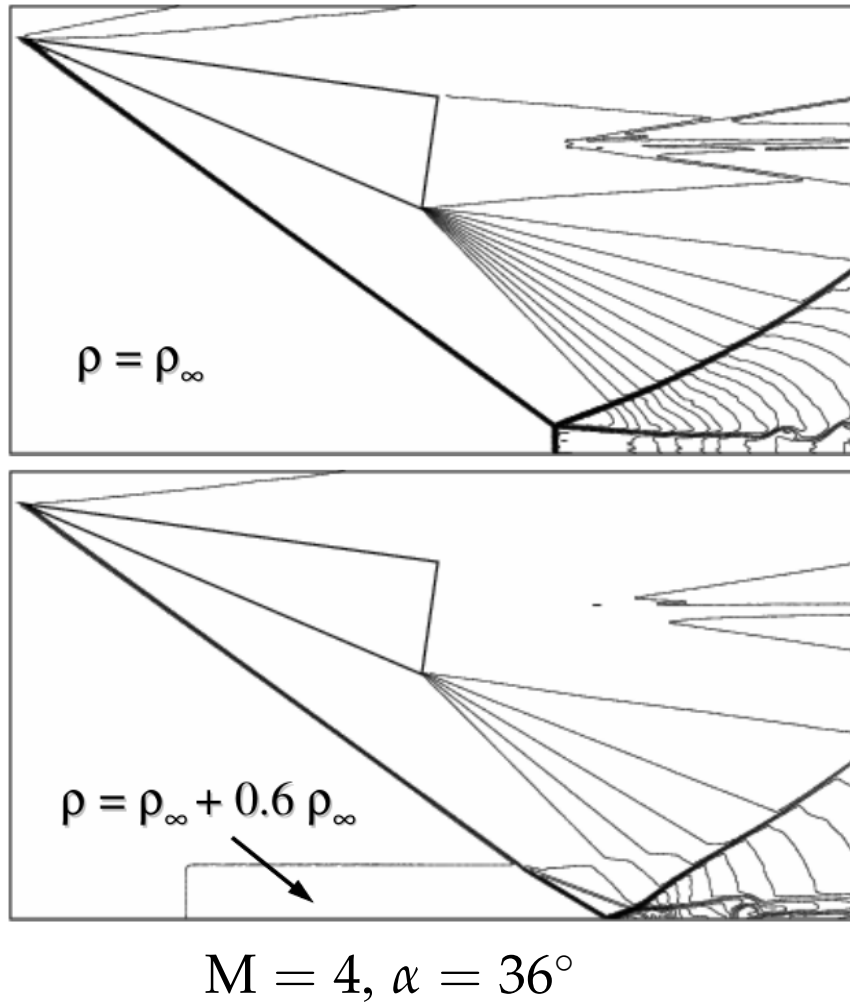


$$M = 4, \alpha = 36^\circ$$



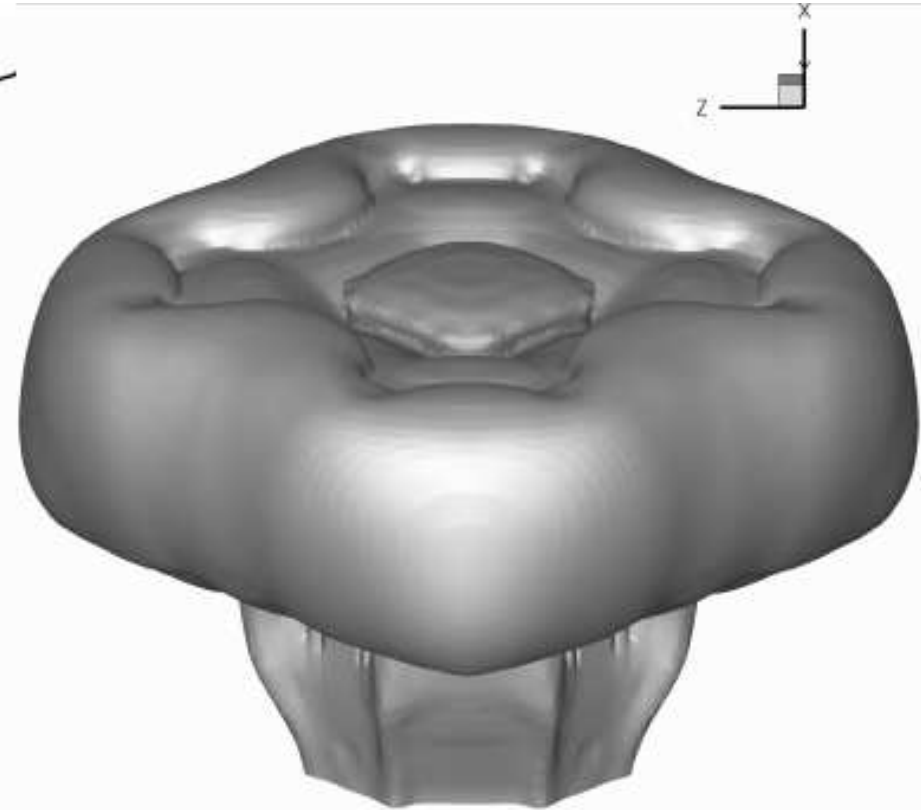
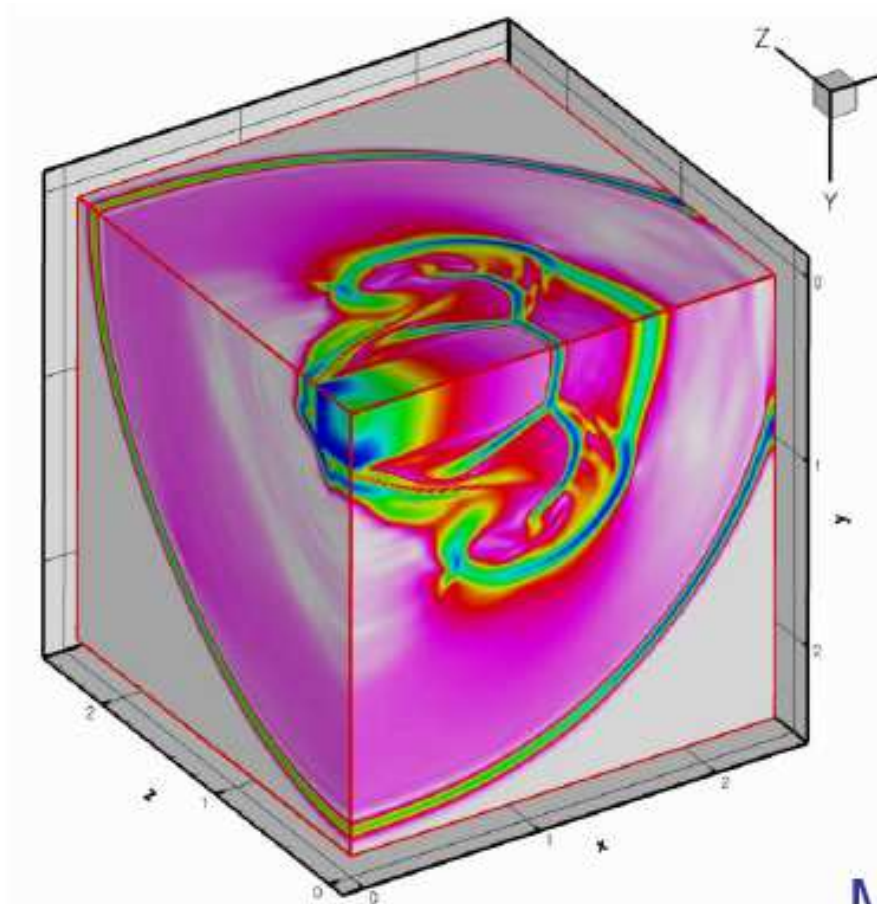
Теоретические амплитуды возмущений, необходимые для перехода.

Переход от маховского отражения к регулярному



Теоретические амплитуды возмущений, необходимые для перехода.

Ударная волна, выходящая из квадратного канала



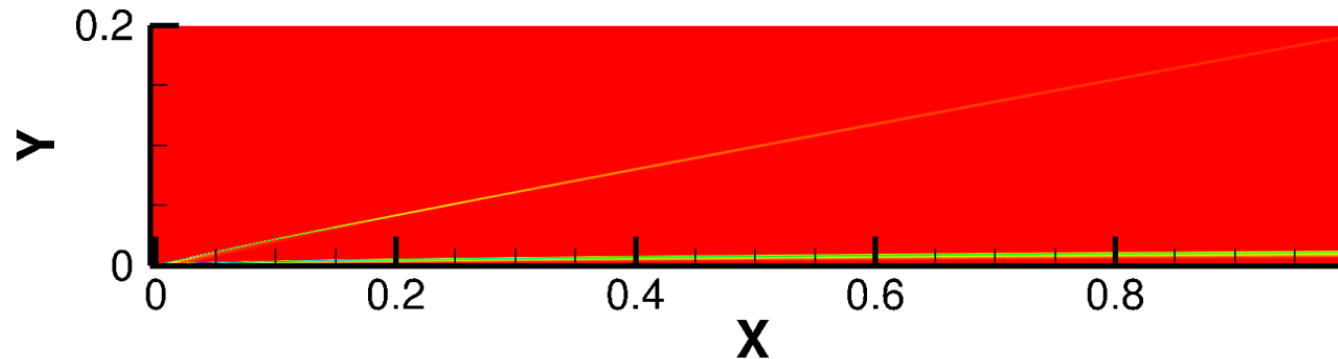
$$M_s = 2.2$$

Поле плотности

Форма контактной поверхности

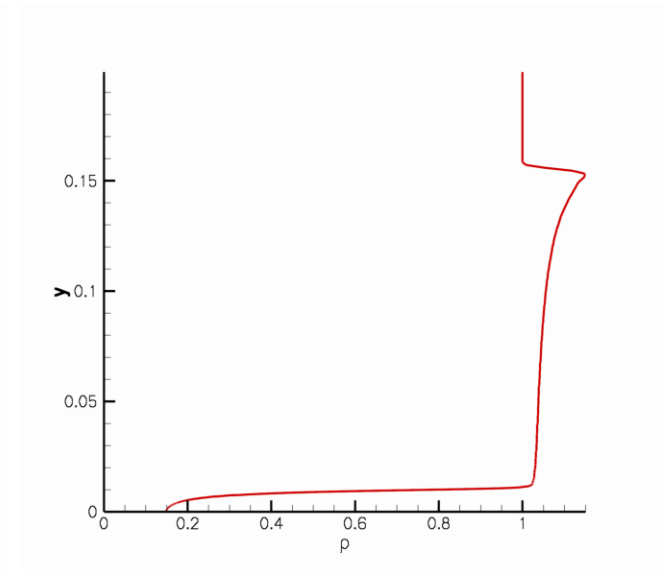
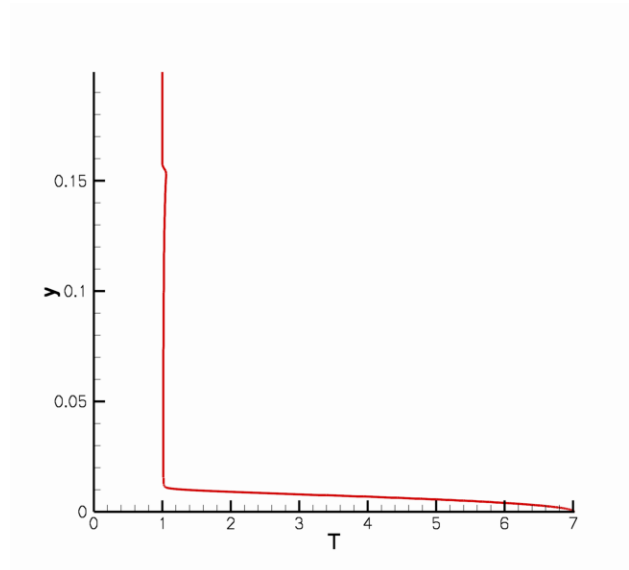
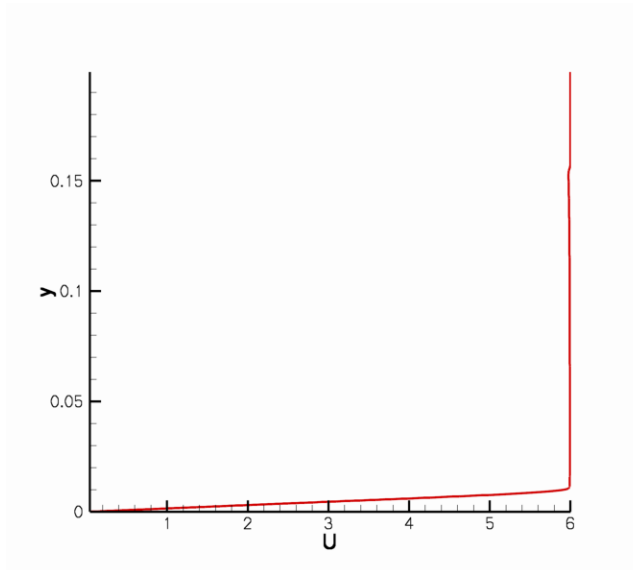
Сверхзвуковой пограничный слой на плоской пластине

Градиент плотности



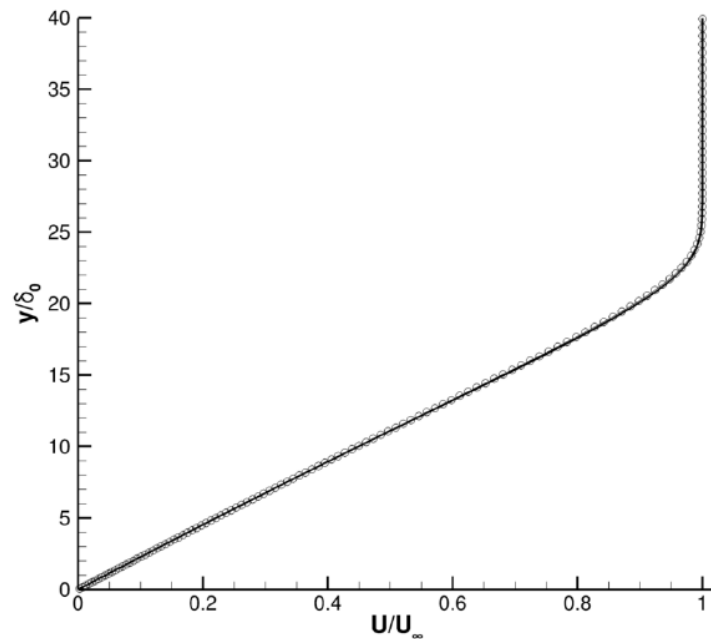
$$M = 6$$

$$Re = 2 \cdot 10^6$$

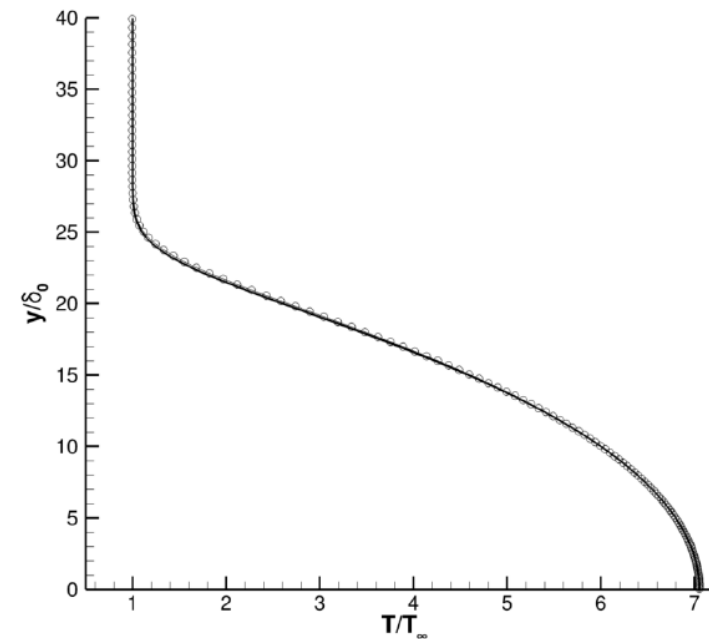


Профили скорости, плотности и температуры при $x/L = 0.8$

Профили скорости и температуры



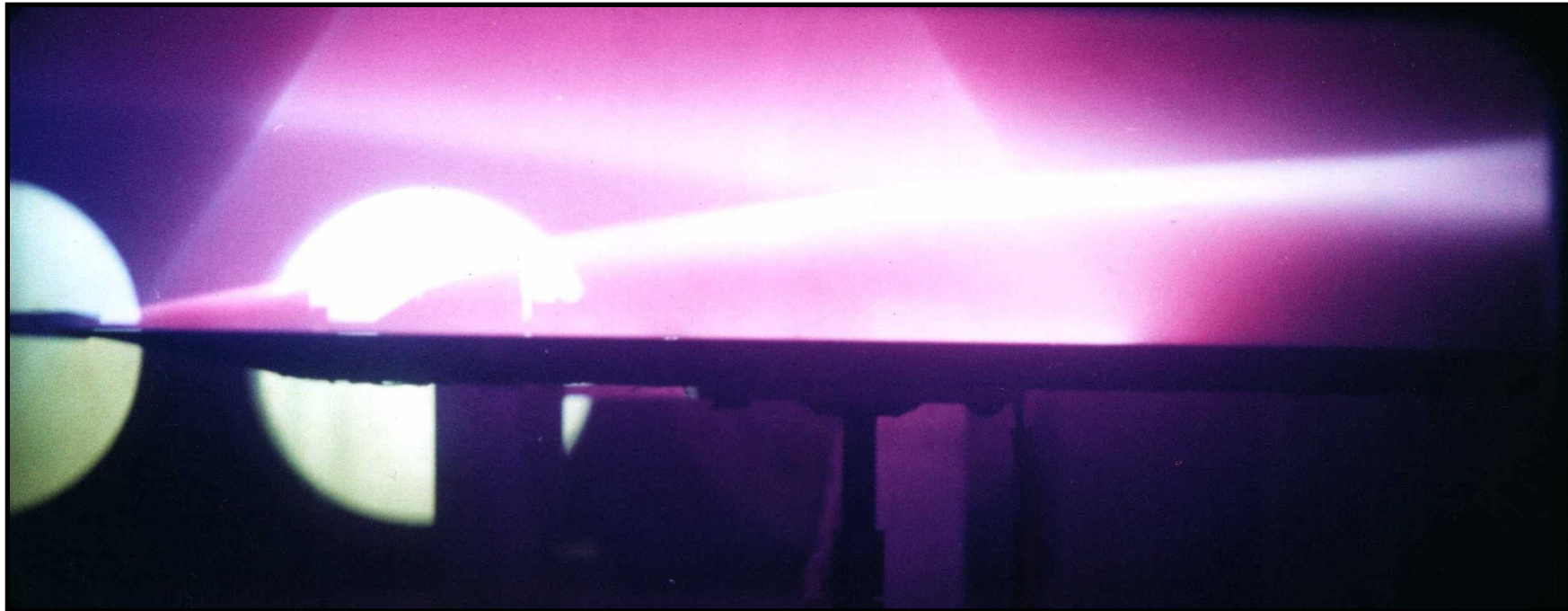
Скорость



Температура

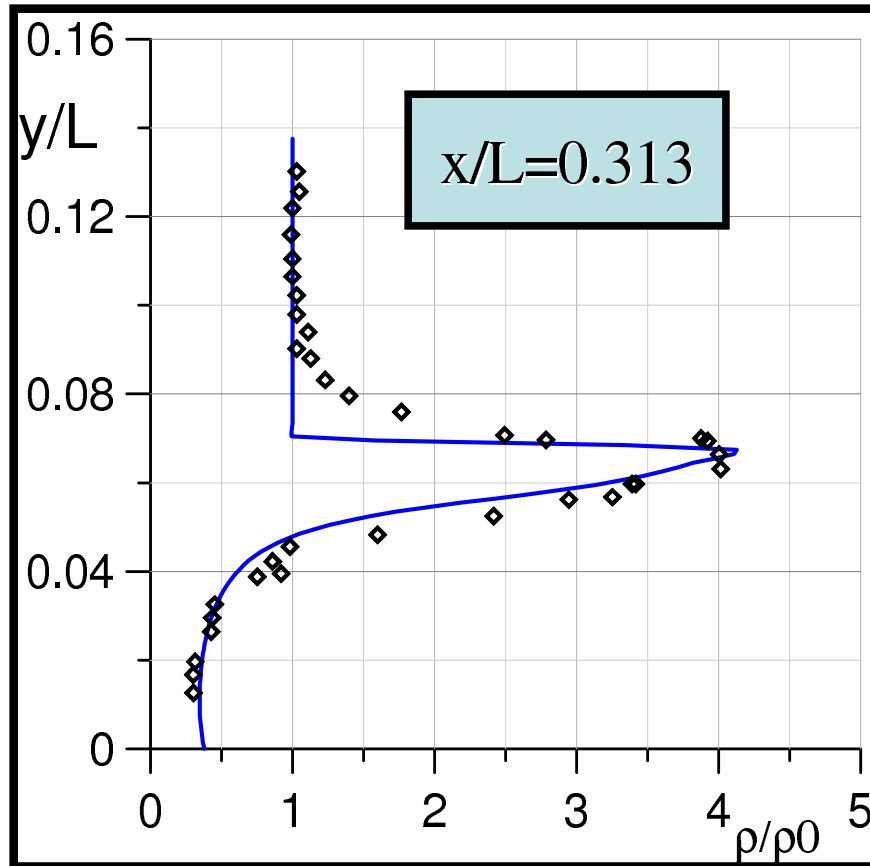
$M = 6$, $Re_x = 2 \cdot 10^6$. Сплошные линии соответствуют автомодельному решению, символы — решению уравнений Навье—Стокса.

Гиперзвуковой вязкий ударный слой

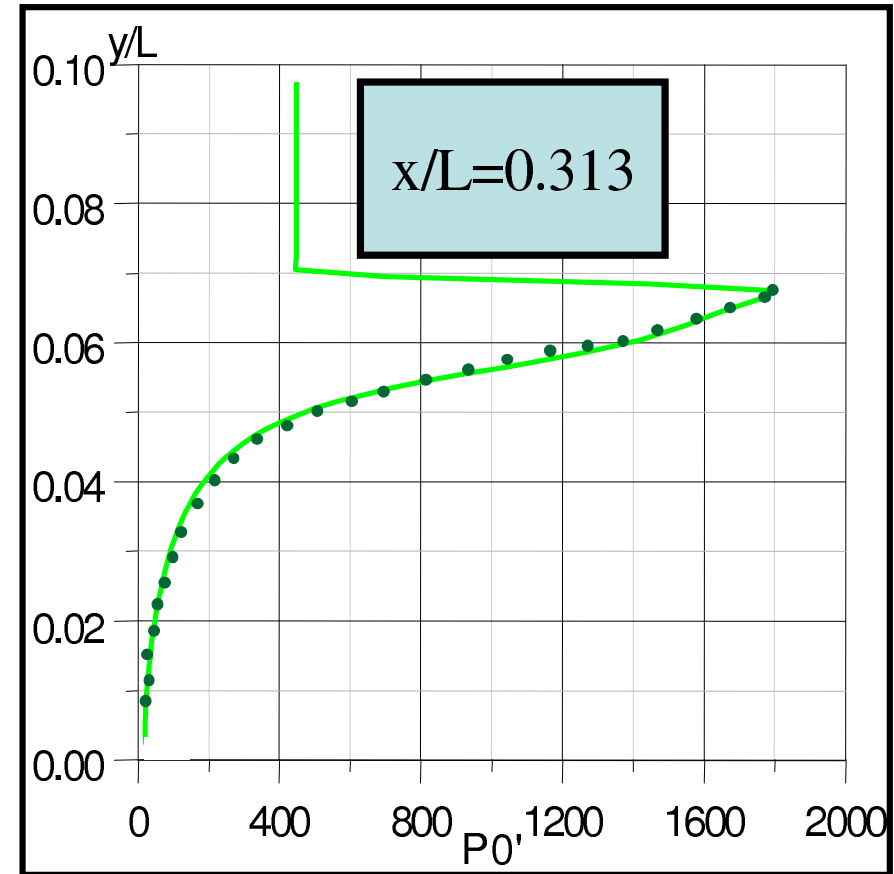


Экспериментальная фотография вязкого ударного слоя на плоской пластине при $M_\infty = 21$ и $Re_1 = 6 \cdot 10^5$ (гиперзвуковая азотная труба Т-327А).

Профили среднего течения



Профиль средней плотности



Профиль полного давления

Сверхзвуковое обтекание клина

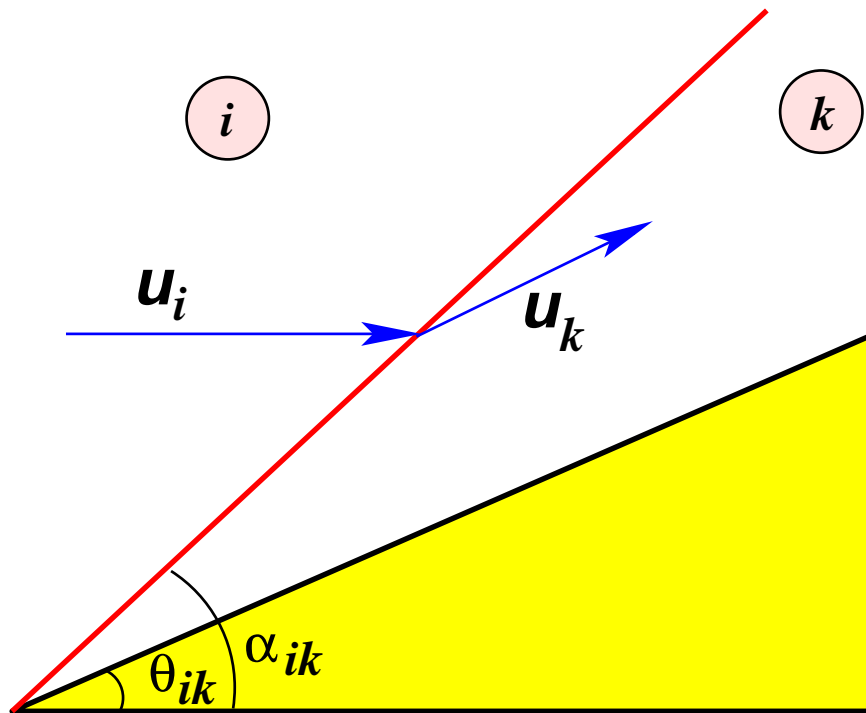
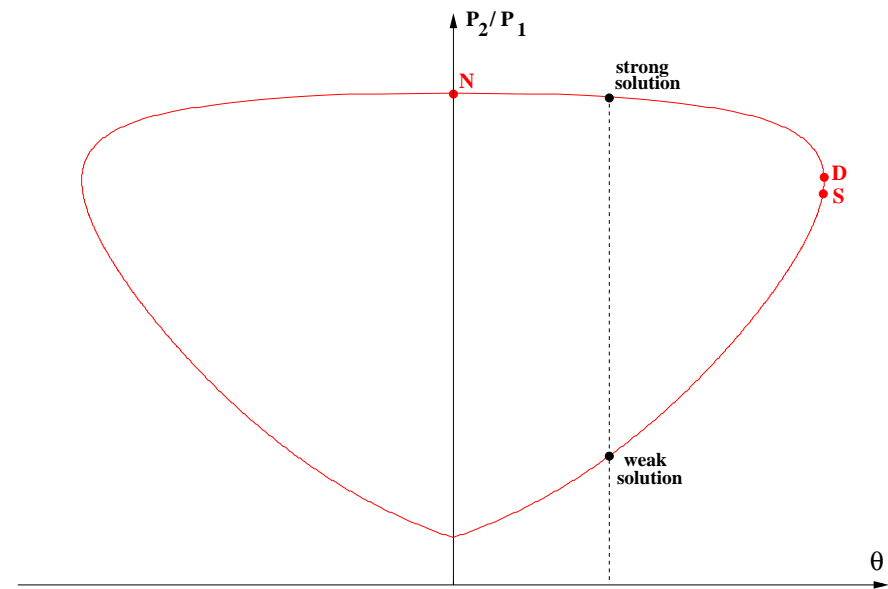


Схема течения над клином



Ударная поляра

Сверхзвуковое обтекание конуса

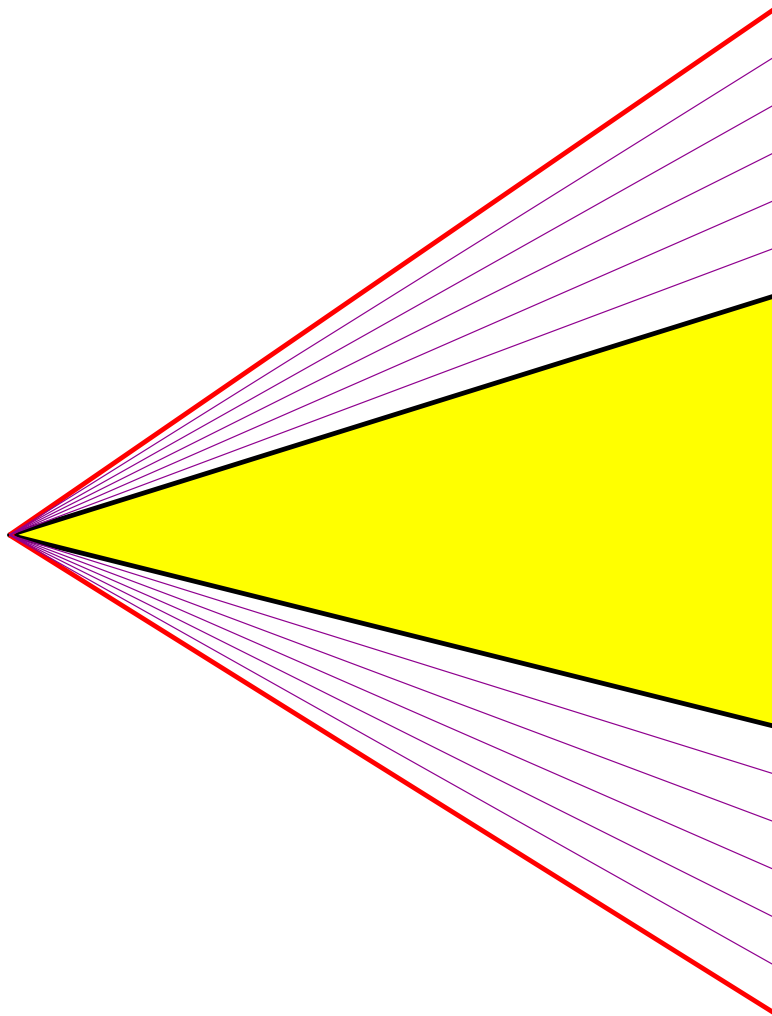
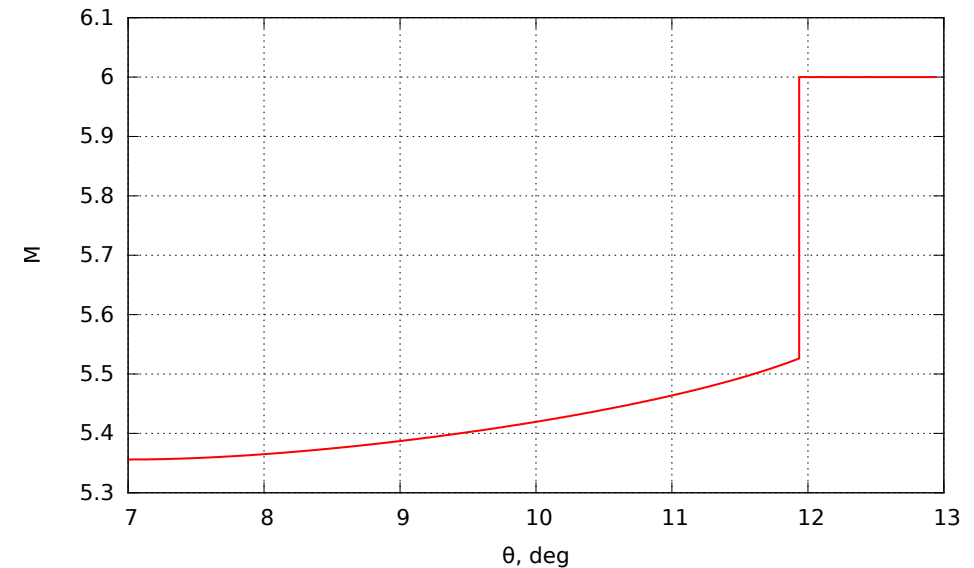


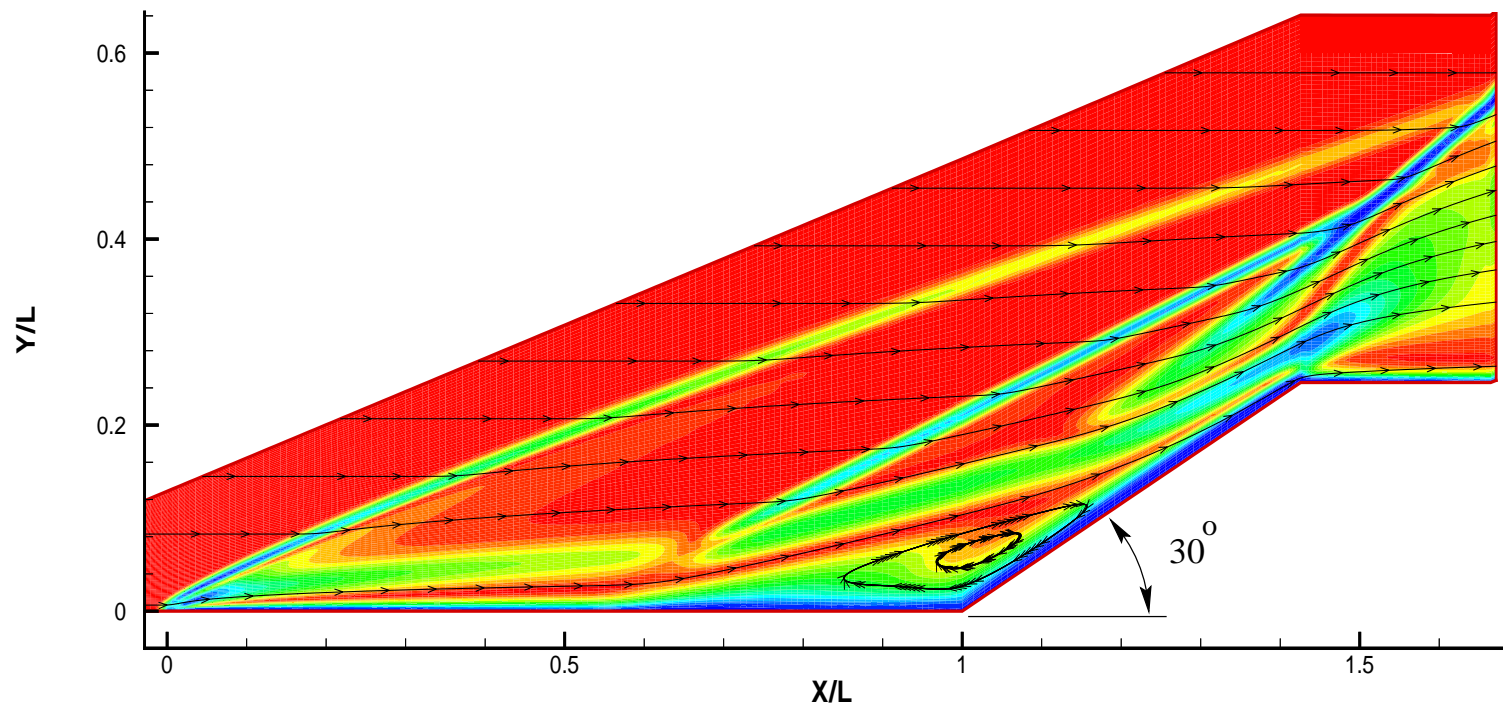
Схема течения над конусом



Распределение числа Маха в невязком коническом сечении над конусом с углом полураствора $\beta = 7^\circ$. $M_\infty = 6$.

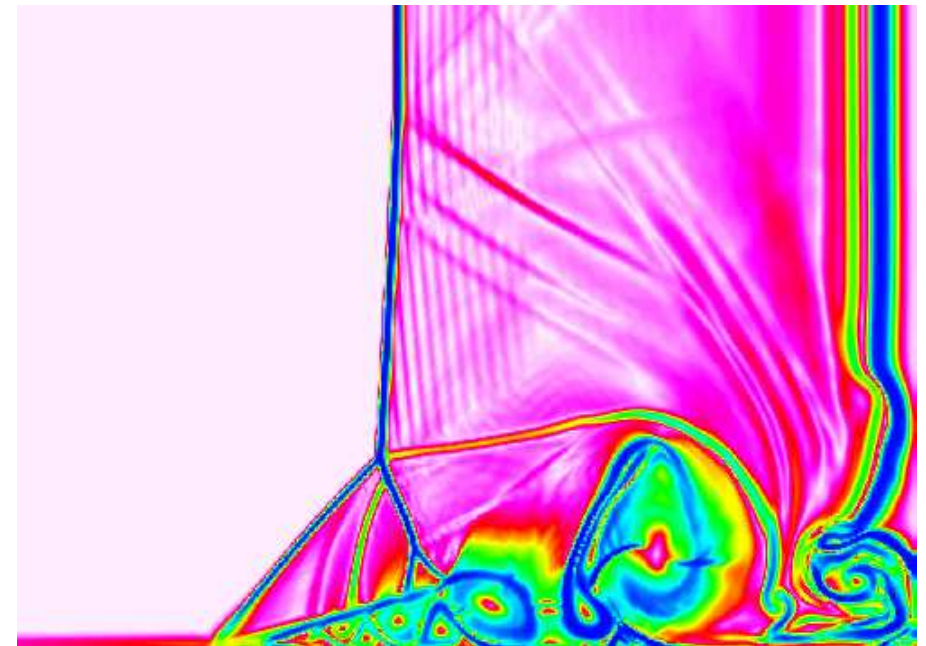
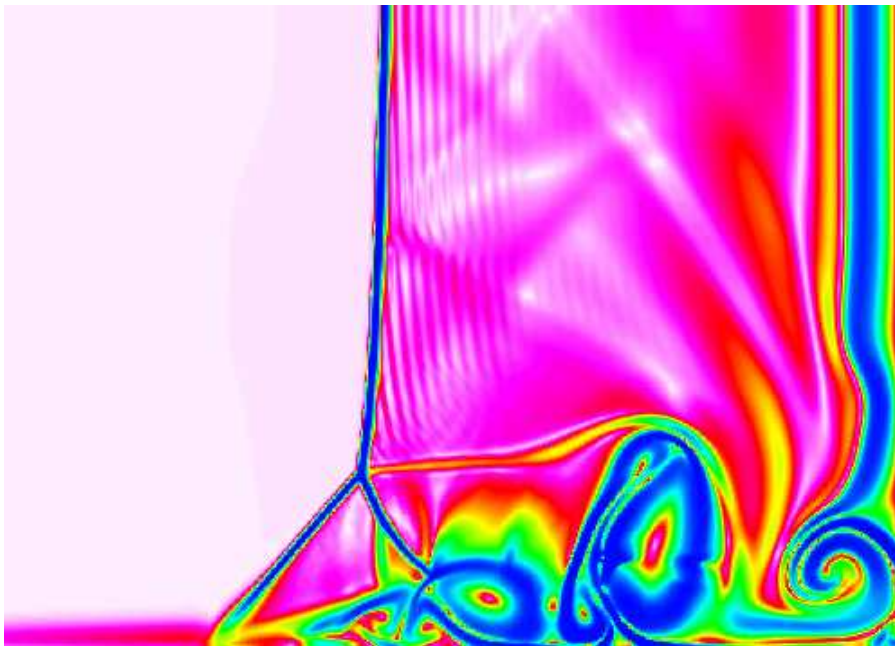
Уравнения пограничного слоя на конусе могут быть простым преобразованием связаны с уравнениями для плоской пластины: при том же расстоянии от носика он тоньше в $\sqrt{3}$ раза.

Ламинарное отрывное течений над полым цилиндром с юбкой



$M = 9.91$, $Re_L = 18916$, цветная шлирен-визуализация

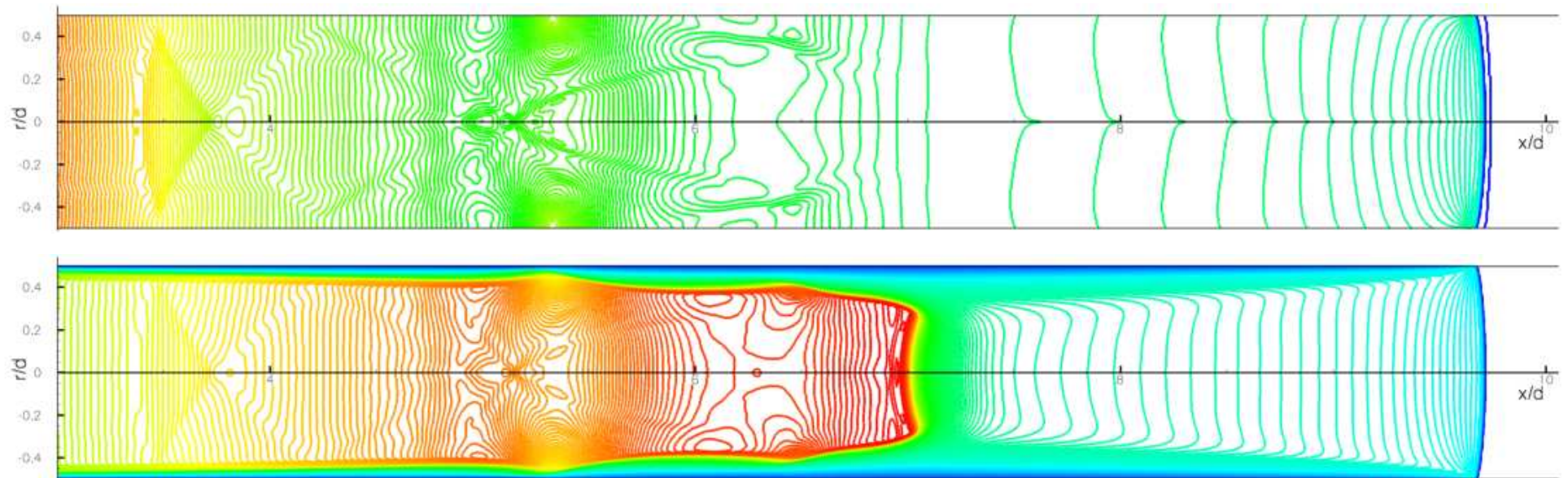
Взаимодействие отраженной ударной волны с пограничным слоем



Цветная шлирен-визуализация, $Re = 200$

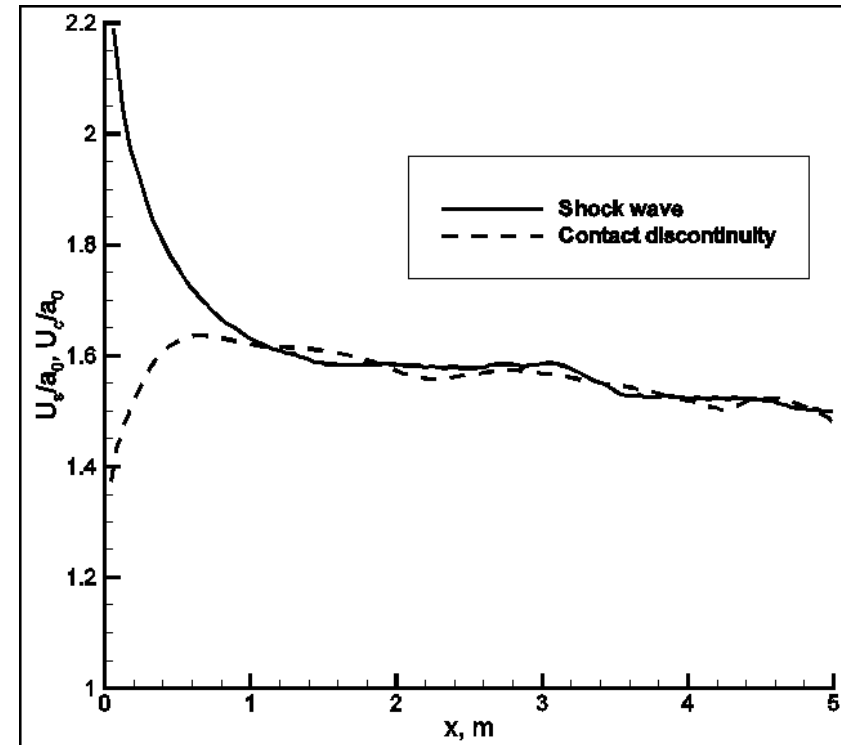
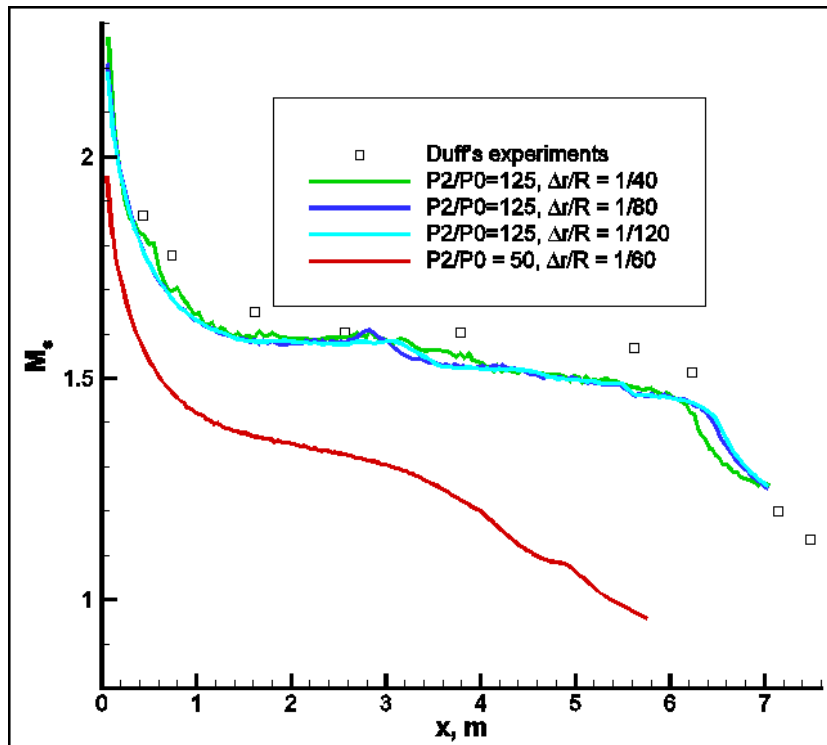
Цветная шлирен-визуализация, $Re = 1000$

Численное моделирование эксперимента Даффа



Поле давления (вверху) и поле чисел Маха (внизу). $H = 28.575$ мм, $L = 7,5$ м, $p_1 = 66.66$ Па, $p_4/p_1 = 100$.

Численное моделирование эксперимента Даффа



Изменение числа Маха ударной волны (слева), сравнение скоростей ударной волны и контактной поверхности (справа).

Турбулентное течение. Осредненные уравнения

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad \bar{\rho} = \frac{1}{\Delta_T} \int_t^{t+\Delta_T} \rho(s) ds, \quad \overline{\rho'} = 0, \quad \text{Осреднение по Рейнольдсу}$$

$$u_i = \tilde{u}_i + u_i'', \quad \bar{\rho}\tilde{u}_i = \frac{1}{\Delta_T} \int_t^{t+\Delta_T} \rho u_i ds, \quad \overline{\rho u_i''} = 0, \quad \text{Осреднение по Фавру}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho}\tilde{u}_i) &= 0, & \bar{p} &= \bar{\rho} R \tilde{T} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} + \sigma_{ij}), & \sigma_{ij} &= -\overline{\rho u_i'' u_j''} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\mathcal{E}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}\tilde{u}_j\mathcal{H}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-\bar{q}_j - q_j^T + \overline{\tau_{ij} u_i''} - \overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''} / 2 \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} [\tilde{u}_i (\bar{\tau}_{ij} + \sigma_{ij})], \\ \mathcal{E} &= \tilde{e} + \tilde{u}_i \tilde{u}_i / 2 + \widetilde{u_i'' u_i''} / 2, & \mathcal{H} &= \mathcal{E} + \bar{p} / \bar{\rho}, & q_j^T &= \overline{\rho u_j'' h''} \end{aligned}$$

Модели турбулентности

- Существует большое количество моделей турбулентности различной сложности, используемых для замыкания осредненных усреднений:
 - алгебраические модели (*Cebeci & Smith, Baldwin & Lomax*)
 - дифференциальные модели с одним уравнением (*Секундов, Baldwin & Barth, Spalart & Allmaras*)
 - дифференциальные модели с двумя уравнениями (*k- ω , k- ϵ , Menter*)
 - модели переноса рейнольдсовых напряжений
- Практически все модели первоначально были сформулированы для несжимаемых течений и, при применении к сверхзвуковым течениям, требуют введения специальных коррекций

D. C. Wilcox. Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries, Anaheim, 1993, 1998, 2006

Прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation, DNS)

- При прямом численном моделировании переходное или турбулентное течение рассчитывается прямо из нестационарных уравнений Навье-Стокса, не вводя каких-либо дополнительных моделей. Для этого должны быть разрешены все пространственные масштабы, от характерного размера самого течения L до колмогоровского масштаба η . Количество степеней свободы, необходимых для его, чтобы представить весь этот диапазон масштабов, возрастает с числом Рейнольдса как $Re^{9/4}$. С разумными затратами машинного времени, прямое численное моделирование может быть использовано для моделирования ламинарного-турбулентного перехода, а также турбулентных течений при сравнительно небольших числах Рейнольдса. Для большей части турбулентных течений, встречающихся на практике, прямое моделирование не может быть выполнено ни в настоящее время, ни в сколь-нибудь обозримом будущем.
- Несмотря на это, важность данного подхода в исследованиях турбулентности трудно переоценить. Во-первых, применение прямого численного моделирования позволило существенно улучшить наше понимание механизмов ламинарно-турбулентного перехода, особенно на его поздних стадиях. Во-вторых, давая полное описание турбулентного течения, данные прямого численного моделирования позволяют проводить надежную верификацию различных полуэмпирических моделей турбулентности, что существенно способствует прогрессу в развитии таких моделей.

Моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES)

- Основная идея этого подхода к моделированию турбулентности состоит в том, что движение крупных вихрей рассчитывается прямо из нестационарных уравнений Навье-Стокса, в то время как вклад меломасштабной турбулентности (с размерами, меньшими шага расчетной сетки) учитывается с помощью подсеточной модели.
- Выделение крупномасштабных движений производится с помощью процедуры фильтрации, применяемой к уравнениям Навье-Стокса:

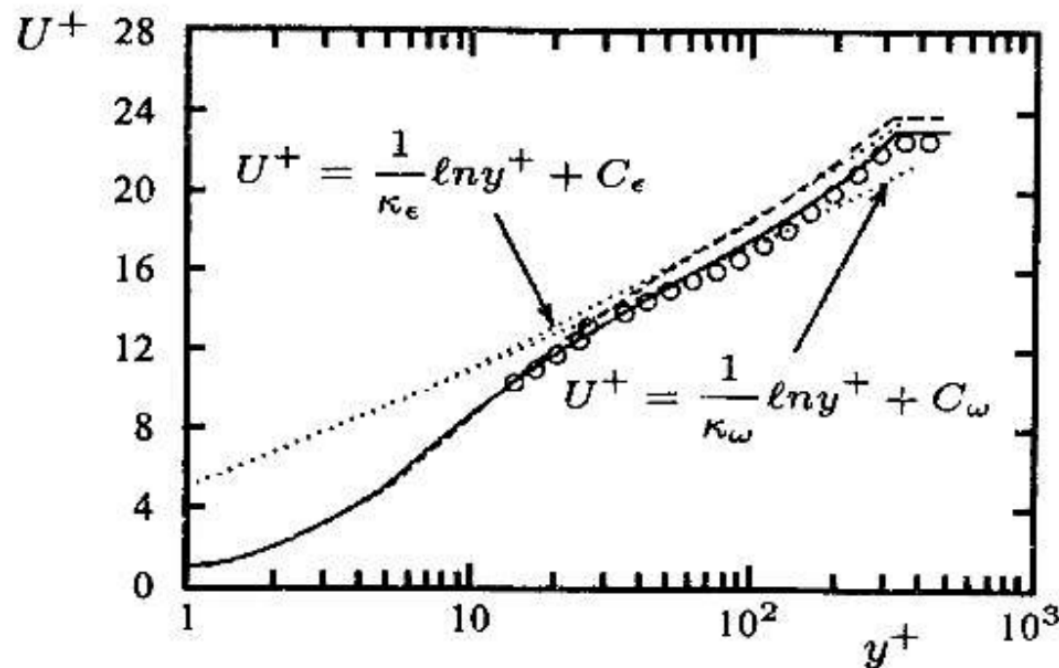
$$\bar{u}(x, t) = \int G(x - x') u(x') dx'$$

Примеры фильтров:

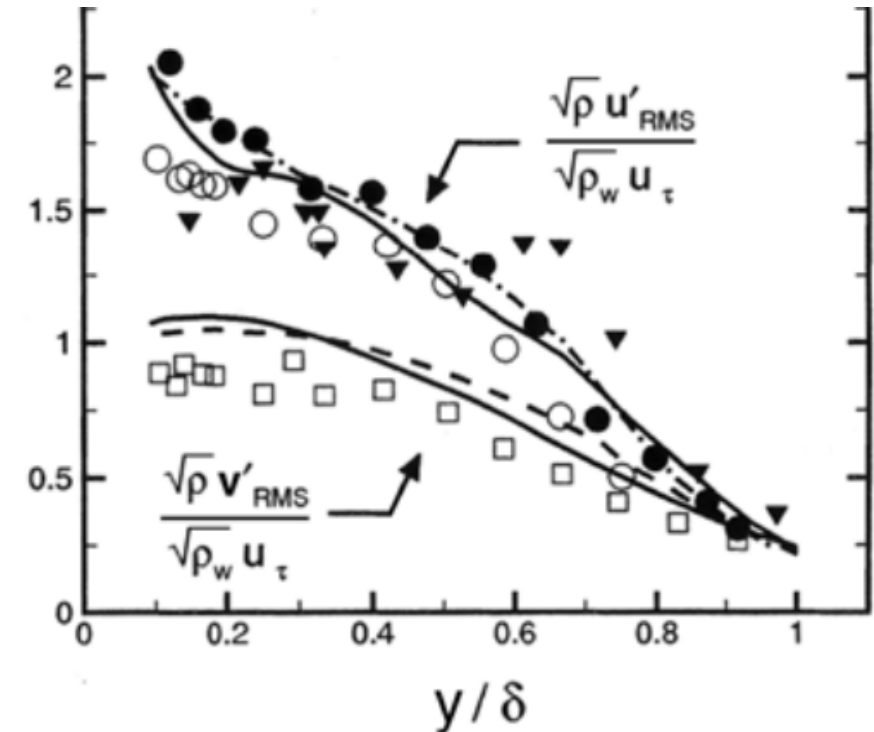
$$G_G = \sqrt{6/\pi\Delta^2} \exp(-6x^2/\Delta^2), \quad G_B = \begin{cases} 1/\Delta, & \text{при } |x| \leq \Delta/2, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- После фильтрации в уравнениях появляются новые неизвестные члены. Для замыкания используются подсеточные модели.

Турбулентный пограничный слой

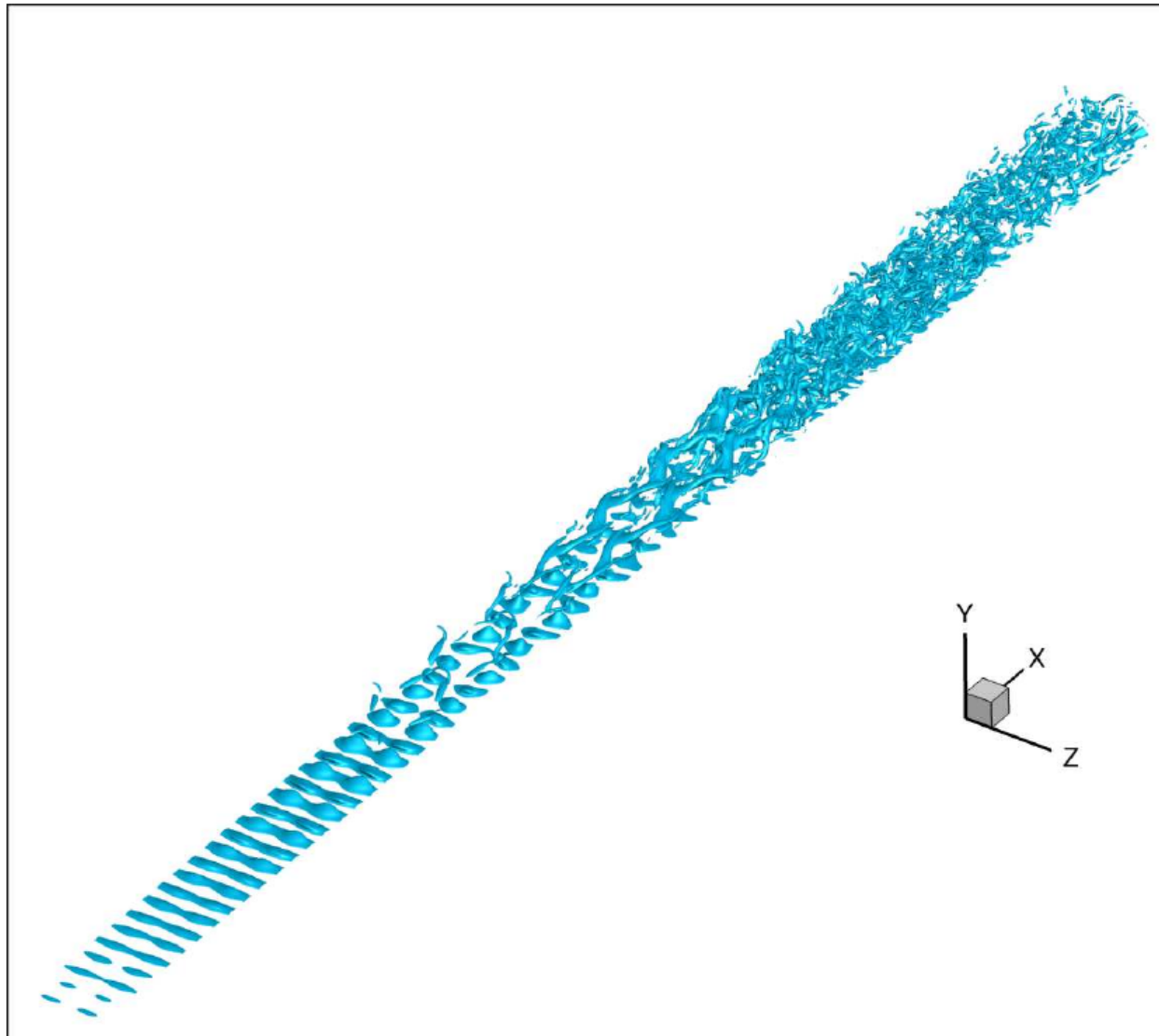


Профиль средней скорости в пограничном слое при $M = 4.5$: Wilcox (2006), $k-\omega$ (сплошная линия), Chien, $k-\epsilon$ (пунктирная линия), эксперимент Coles (символы)



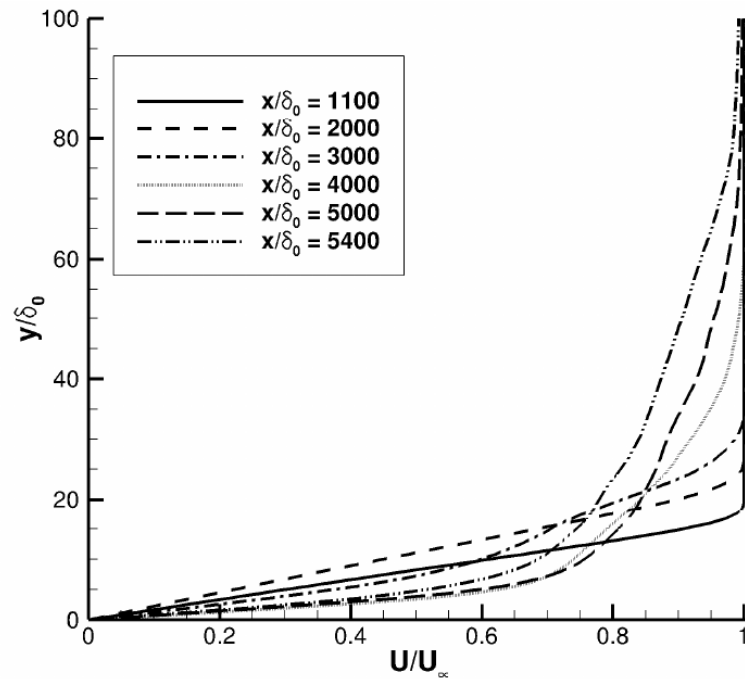
Профили среднеквадратичных пульсаций компонент скорости в пограничном слое при $M=2.3$. Экспериментальные данные Eléna & Lacarme, 1988, ЛДИС (символы), DNS Pino Martin, 2004 (сплошные линии), дозвуковые данные Klebanoff, 1955 (пунктирная линия)

Нелинейное развитие возмущений и переход. $M=6$

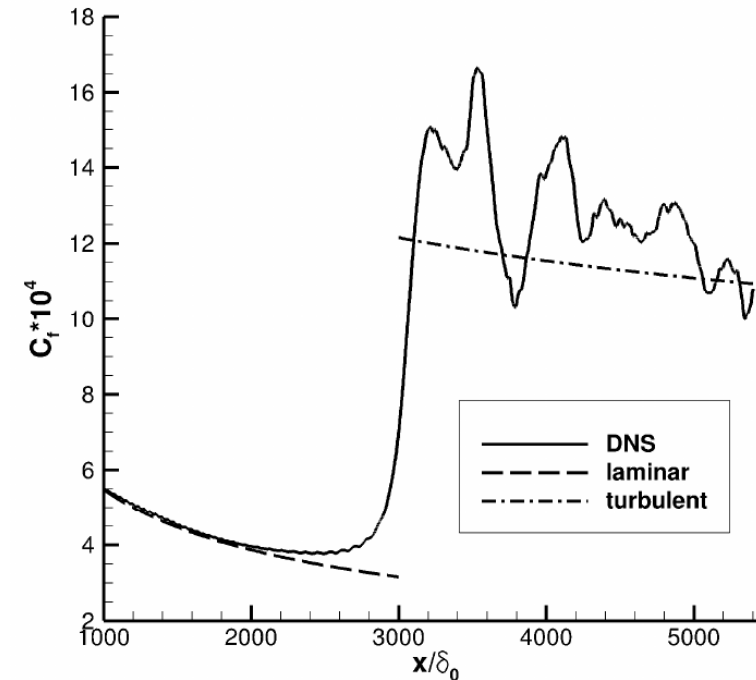


Изоповерхность
Q-критерия

Профили средней скорости и напряжения трения. $M=6$

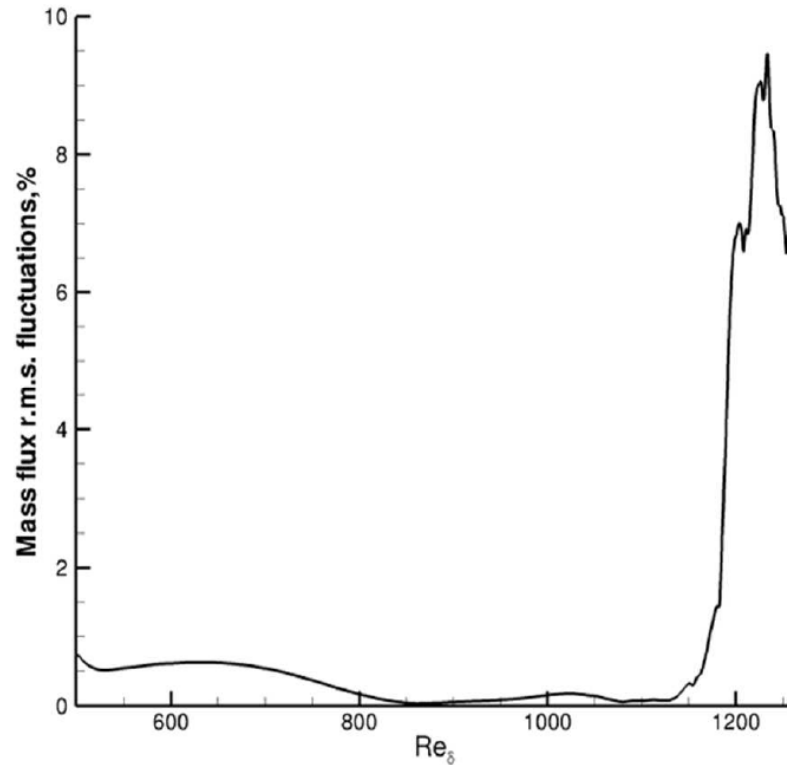


Профили средней скорости в различных сечениях

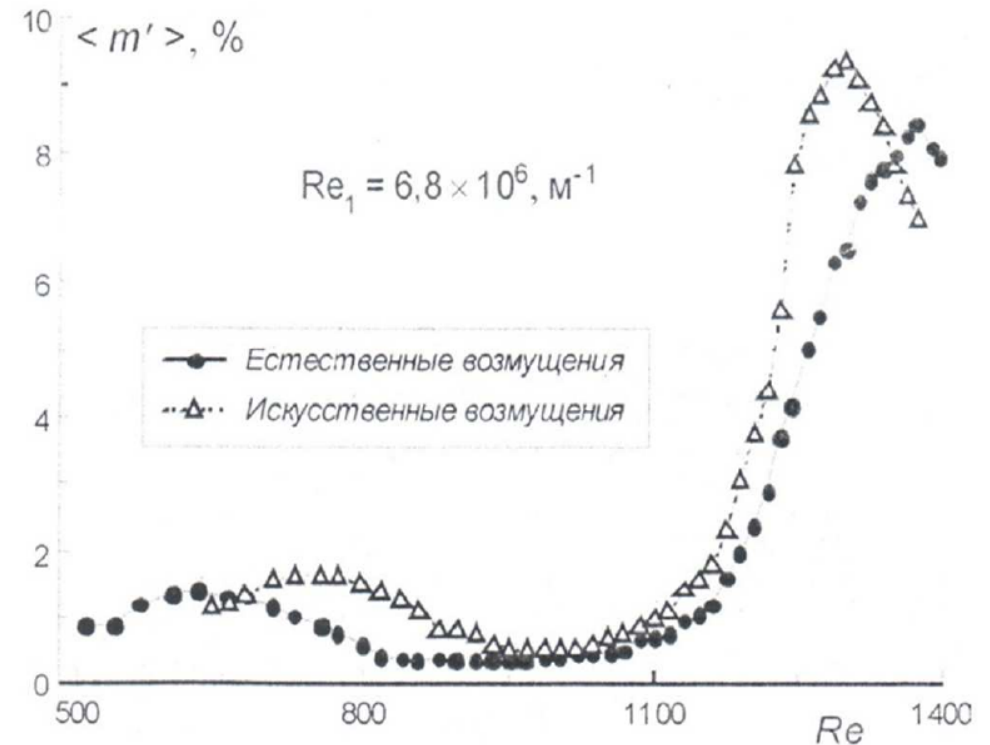


Коэффициент трения вдоль пластины

Среднеквадратичные пульсации массового расхода. $M=2$



Прямое численное моделирование

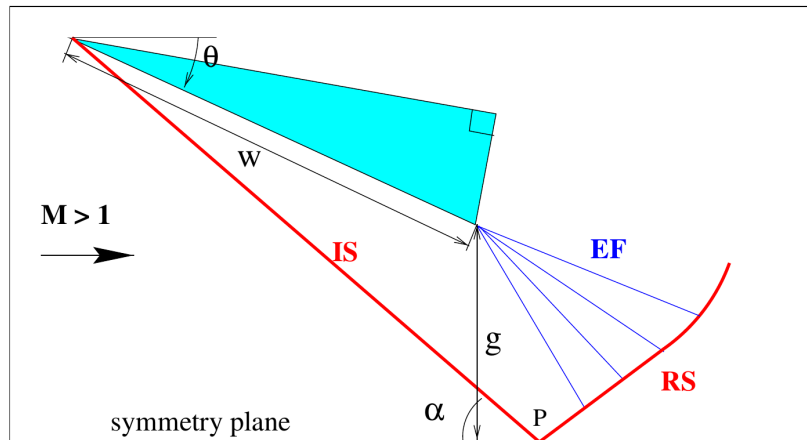


Эксперимент

(Ермолаев, Косинов, Семёнов, 2008)

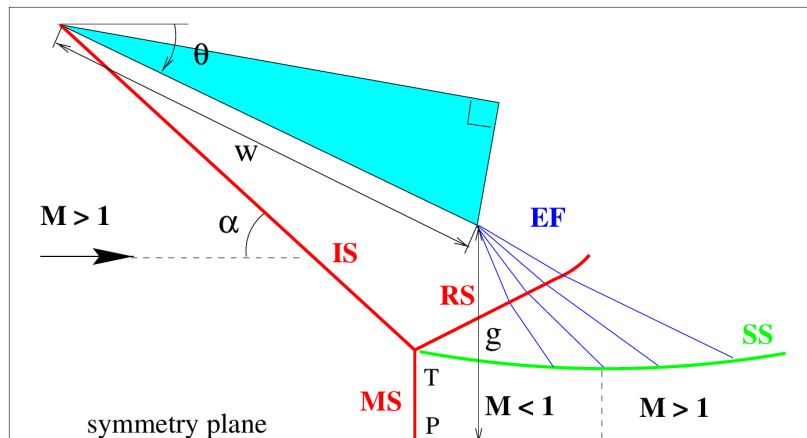
Тестовый случай 1.

Переход между регулярным и маховским отражениями ударных волн



Невязкое течение совершенного газа.
 $M = 4$, $\gamma = 1.4$, $g/w = 0.42$

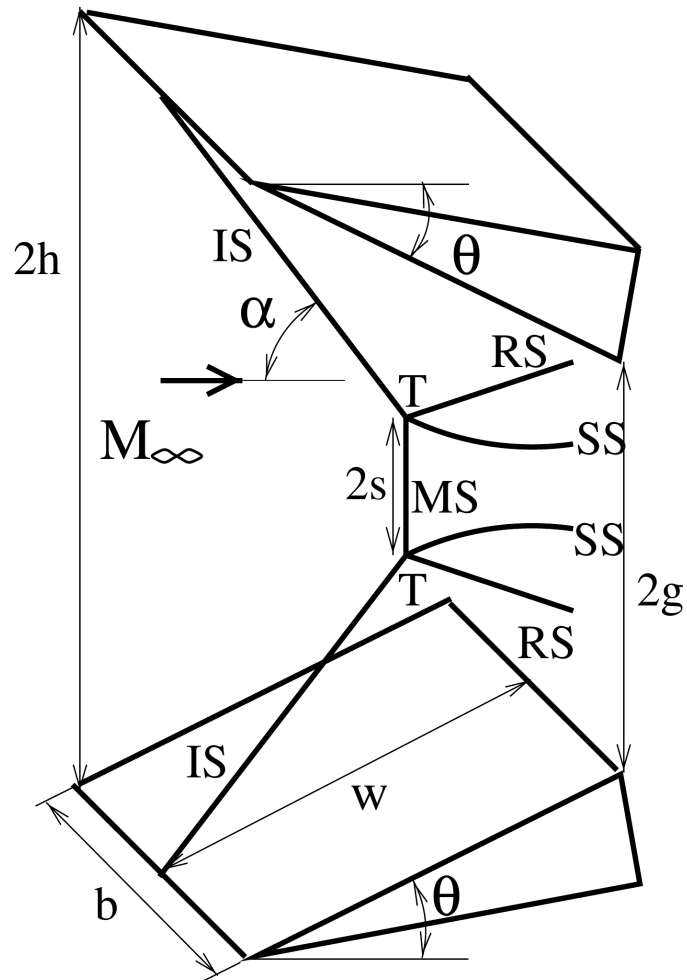
Регулярное отражение,
 угол клина $\theta = 22^\circ$



Маховское отражение,
 угол клина $\theta = 27^\circ$

Нижняя граница — линия симметрии
 Начальные данные — равномерный поток

Тестовый случай 2. Трехмерные ударно-волновые конфигурации



Невязкое течение совершенного газа.
 $M = 4$, $\gamma = 1.4$, $g/w = 0.42$, $b/w = 2$

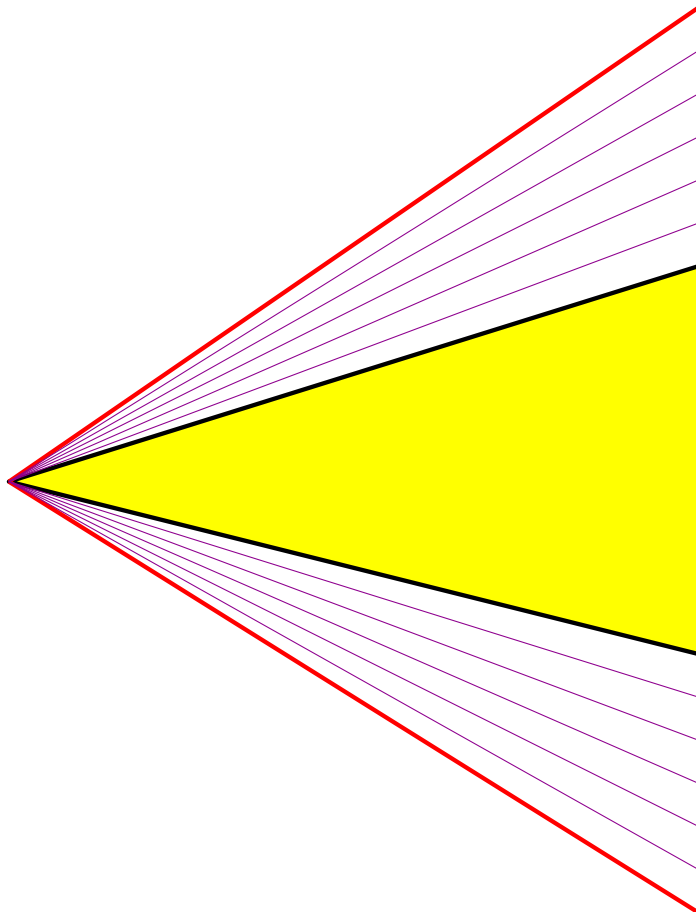
Регулярное отражение,
 угол клина $\theta = 22^\circ$

Маховское отражение,
 угол клина $\theta = 27^\circ$

Нижняя граница — линия симметрии
 Начальные данные — равномерный поток

Тестовый случай 3.

Сверхзвуковой пограничный слой на простых телах



Обтекание плоской пластины, клина, конуса

Вязкое течение совершенного газа

Угол полураствора конуса (клина) $\beta = 10^\circ$

$M = 2$, $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.72$

Температура торможения потока $T_0 = 293$ К

Адиабатические температурные граничные условия на стенке

Закон Сазерленда для зависимости вязкости от температуры

Для ламинарного обтекания $Re_L = 10^5$

Для турбулентного обтекания $Re_L = 10^7$