Определяющие уравнения модели двухфазной фильтрации в деформируемой пористой среде

Роменский Е.И., Перепечко Ю.В.

Оглавление

Определяющие уравнения

1.1. Система уравнений в консервативных переменных

Консервативные переменные

$\rho,\ \rho\alpha_2,\ \rho\alpha_3,\ \alpha_2\rho_2,\ \alpha_3\rho_3,\ w_1^{12},\ w_2^{12},\ w_1^{13},\ w_2^{13},\ \rho u_1,\ \rho u_2,\ \rho F_{11},\ \rho F_{12},\ \rho F_{21},\ \rho F_{22}$.

Система уравнений в изоэнтропийном приближении

Система уравнений двухфазной фильтрации жидкости в упругой пористой среде в двумерном случае :

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}+\frac{\partial G(U)}{\partial y}=S(U).$$

Здесь U - вектор консервативных переменных, $F(U)$, $G(U)$ - векторы потоков, $S(U)$ - вектор правых частей.

Вектор U

$U(1)=\rho$, $U(2)=\rho\alpha_2$, $U(3)=\rho\alpha_3$, $U(4)=\rho_2\alpha_2$, $U(5)=\rho_3\alpha_3$,

$U(6)=w_1^{12}$, $U(7)=w_2^{12}$, $U(8)=w_1^{13}$, $U(9)=w_2^{13}$, $U(10)=\rho u_1$, $U(11)=\rho u_2$,

$U(12)=\rho F_{11}$, $U(13)=\rho F_{12}$, $U(14)=\rho F_{21}$, $U(15)=\rho F_{22}$.

Вектор F

$F(1)=\rho u_1$, $F(2)=\rho\alpha_2 u_1$, $F(3)=\rho\alpha_3 u_1$, $F(4)=\rho_2\alpha_2 u_1^2$, $F(5)=\rho_3\alpha_3 u_1^3$,

$F(6)=\frac{1}{2}u_i^1u_i^1-\frac{1}{2}u_i^2u_i^2+e^1+\frac{p_1}{\rho_1}-e^2-\frac{p_2}{\rho_2}$, $F(7)=0$,

$F(8)=\frac{1}{2}u_i^1u_i^1-\frac{1}{2}u_i^3u_i^3+e^1+\frac{p_1}{\rho_1}-e^3-\frac{p_3}{\rho_3}$, $F(9)=0$,

$F(10)=\alpha_1\rho_1u_1^1u_1^1+\alpha_2\rho_2u_1^2u_1^2+\alpha_3\rho_3u_1^3u_1^3+(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\alpha_3p_3)-\alpha_1\sigma_{11}$,

$F(11)=\alpha_1\rho_1u_1^1u_2^1+\alpha_2\rho_2u_1^2u_2^2+\alpha_3\rho_3u_1^3u_2^3-\alpha_1\sigma_{21}$, $F(12)=0$, $F(13)=0$,

$F(14)=\rho F_{21}u_1-\rho F_{11}u_2$, $F(15)=\rho F_{22}u_1-\rho F_{12}u_2$

Вектор G

$G(1)=\rho u_2$, $G(2)=\rho\alpha_2u_2$, $G(3)=\rho\alpha_3u_2$, $G(4)=\rho_2\alpha_2u_2^2$, $G(5)=\rho_3\alpha_3u_2^3$,

$G(6)=0$, $G(7)=\frac{1}{2}u_i^1u_i^1-\frac{1}{2}u_i^2u_i^2+e^1+\frac{p_1}{\rho_1}-e^2-\frac{p_2}{\rho_2}$, $G(8)=0$, $G(9)=\frac{1}{2}u_i^1u_i^1-\frac{1}{2}u_i^3u_i^3+e^1+\frac{p_1}{\rho_1}-e^3-\frac{p_3}{\rho_3}$,

$G(10)=\alpha_1\rho_1u_1^1u_2^1+\alpha_2\rho_2u_1^2u_2^2+\alpha_3\rho_3u_1^3u_2^3-\alpha_1\sigma_{12}$,

$G(11)=\alpha_1\rho_1u_2^1u_2^1+\alpha_2\rho_2u_2^2u_2^2+\alpha_3\rho_3u_2^3u_2^3+(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\alpha_3p_3)-\alpha_1\sigma_{22}$,

$G(12)=\rho F_{11}u_2-\rho F_{21}u_1$, $G(13)=\rho F_{12}u_2-\rho F_{22}u_1$, $G(14)=0$, $G(15)=0$.

Вектор S

$S(1)=0$, $S(2)=-\lambda_{11}(p_1-p_2)-\lambda_{12}(p_1-p_3)$, $S(3)=-\lambda_{12}(p_1-p_2)-\lambda_{22}(p_1-p_3)$, $S(4)=0$, $S(5)=0$,

$S(6)=u_2\partial_1w_2^{12}-u_2\partial_2w_1^{12}-\chi_{11}c_2(u_1-u_1^2)-\chi_{12}c_3(u_1-u_1^3)$, $S(7)=u_1\partial_2w_1^{12}-u_1\partial_1w_2^{12}-\chi_{11}c_2(u_2-u_2^2)-\chi_{12}c_3(u_2-u_2^3)$,

$S(8)=u_2\partial_1w_2^{13}-u_2\partial_2w_1^{13}-\chi_{12}c_2(u_1-u_1^2)-\chi_{22}c_3(u_1-u_1^3)$, $S(9)=u_1\partial_2w_1^{13}-u_1\partial_1w_2^{13}-\chi_{12}c_2(u_2-u_2^2)-\chi_{22}c_3(u_2-u_2^3)$,

$S(10)=0$, $S(11)=0$, $S(12)=0$, $S(13)=0$,

$S(14)=0$, $S(15)=0$.

По повторяющимся i везде проводится суммирование, причем $i=1,2$. Здесь

$\alpha_1=1-\alpha_2-\alpha_3$, $\rho=\alpha_1\rho_1+\alpha_2\rho_2+\alpha_3\rho_3$, $w_i^{12}=u_i^1-u_i^2$, $w_i^{13}=u_i^1-u_i^3$, $\rho u_i=\alpha_1\rho_1u_i^1+\alpha_2\rho_2u_i^2+\alpha_3\rho_3u_i^3$,

$c_2=\frac{\alpha_2\rho_2}{\rho}$, $c_3=\frac{\alpha_3\rho_3}{\rho}$, $e_{ikj}\omega_j^{12}=\partial_iw_k^{12}-\partial_kw_i^{12}$, $e_{ikj}\omega_j^{13}=\partial_iw_k^{13}-\partial_kw_i^{13}$, ($e_{ikj}$ - символ Леви-Чивиты).

2. Уравнение состояния трехфазной среды

Трехфазная среда характеризуется следующими параметрами: полная плотность среды ρ, относительные скорости фаз w_i^{12}, w_i^{13}, объемные и массовые содержания жидких фаз $\alpha_2,\alpha_3,c_2,c_3$, тензор градиента деформации F_{ij} и принимается аддитивной по фазам

$$E = c_1 e^1 + c_2 e^2 + c_3 e^3 + \frac{1}{2}\left(1-c_2\right)c_2 w_k^{12} w_k^{12} + \frac{1}{2}\left(1-c_3\right)c_3 w_k^{13} w_k^{13} - c_2 c_3 w_k^{12} w_k^{13}.$$

Внутренние энергии упругого пористого скелета и жидких фаз $e^1 = e^1\left(\rho_1, F_{ik}, s\right)$, $e^2 = e^2\left(\rho_2, s\right)$, $e^3 = e^3\left(\rho_3, s\right)$ имеют вид

$$e^1 = \frac{1}{\left(\rho_{10}\right)^2} p_{10}\delta\rho_1 + \frac{1}{2\left(\rho_{10}\right)^3} K_1 \delta\rho_1 \delta\rho_1 + \frac{1}{\rho_{10}}\mu\left(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\varepsilon_{ll}\right), \qquad e^2 = \frac{1}{\left(\rho_{20}\right)^2} p_{20}\delta\rho_2 + \frac{1}{2\left(\rho_{20}\right)^3} K_2 \delta\rho_2 \delta\rho_2,$$

$$e^3 = \frac{1}{\left(\rho_{30}\right)^2} p_{30}\delta\rho_3 + \frac{1}{2\left(\rho_{30}\right)^3} K_3 \delta\rho_3 \delta\rho_3.$$

Здесь $\delta\rho_1 = \rho_1 - \rho_{10}$, $\delta\rho_2 = \rho_2 - \rho_{20}$, $\delta\rho_3 = \rho_3 - \rho_{30}$ - отклонения параметров от равновесных начальных значений.

Выражение для тензора напряжений в упругой фазе через тензор деформации Альманси

$$\sigma_{11} = \frac{\rho_1}{\rho_{10}} 2\mu\left(\left(1-2\varepsilon_{11}\right)\left(\varepsilon_{11} - \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\right) - 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{12}\right), \qquad \sigma_{12} = \frac{\rho_1}{\rho_{10}} 2\mu\varepsilon_{12}\left(1 - \frac{4}{3}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\right),$$

$$\sigma_{21} = \frac{\rho_1}{\rho_{10}} 2\mu\varepsilon_{12}\left(1 - \frac{4}{3}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\right), \qquad \sigma_{22} = \frac{\rho_1}{\rho_{10}} 2\mu\left(\left(1-2\varepsilon_{22}\right)\left(\varepsilon_{22} - \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\right) - 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{12}\right).$$

Здесь ($\det F = F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}$)

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{F_{22}F_{22} + F_{21}F_{21}}{\left(\det F\right)^2}\right), \qquad \varepsilon_{12} = \frac{F_{22}F_{12} + F_{21}F_{11}}{2\left(\det F\right)^2}, \qquad \varepsilon_{21} = \frac{F_{22}F_{12} + F_{11}F_{21}}{2\left(\det F\right)^2}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{F_{12}F_{12} + F_{11}F_{11}}{\left(\det F\right)^2}\right),$$

Давления в фазах выражаются соотношениями

$$p_1 = \frac{(\rho_1)^2}{(\rho_{10})^2}\left(p_{10} + \frac{1}{\rho_{10}} K_1 \delta\rho_1\right), \qquad p_2 = \frac{(\rho_2)^2}{(\rho_{20})^2}\left(p_{20} + \frac{1}{\rho_{20}} K_2 \delta\rho_2\right), \qquad p_3 = \frac{(\rho_3)^2}{(\rho_{30})^2}\left(p_{30} + \pi_3 \delta s + \frac{1}{\rho_{30}} K_3 \delta\rho_3\right).$$

В формулах μ - модуль сдвига, K_1 - объемный модуль упругости (коэффициент объемного расширения) твердой пористой фазы, K_2, K_3 - коэффициенты объемного расширения.

3. Значения физических параметров модели

3.1. Физические параметры

Плотности

$\rho_{10} = 2.5 \cdot 10^3 \, кг/м^3$, $\rho_{20} = 1.0 \cdot 10^3 \, кг/м^3$, $\rho_{30} = 0.9 \cdot 10^3 \, кг/м^3$.

Объемные содержания жидких фаз

Объемное содержание фаз в формации (во всей области, кроме скважин)

$\alpha_{20} = 0.1$, $\alpha_{30} = 0.1$. Следовательно, $\alpha_{10} = 0.8$.

Объемное содержание фаз в скважинах

$\alpha_{20} = 0.9$, $\alpha_{30} = 0.099$. Следовательно, $\alpha_{10} = 0.001$.

Давление

$p_{10} = 10^5 \, Па$, $p_{20} = 10^5 \, Па$, $p_{30} = 10^5 \, Па$. ($1 \, Па = 1 \, кг/м\,с^2$).

3.2. Термодинамические коэффициенты

Модуль сдвига твердой фазы $\mu = 8.9 \cdot 10^9 \, кг/м\,с^2 = 8.9 \cdot 10^9 \, Па$.

Коэффициенты объемного расширения $K_1 = 3.7 \cdot 10^{10} \, кг/м\,с^2 = 37 \cdot 10^9 \, Па$, $K_2 = 2.25 \cdot 10^9 \, кг/м\,с^2 = 2.25 \cdot 10^9 \, Па$, $K_3 = 1.3 \cdot 10^9 \, кг/м\,с^2 = 1.3 \cdot 10^9 \, Па$.

3.3. Кинетически коэффициенты

Кинетические коэффициенты λ_{ij}

Коэффициенты λ_{ij}, характеризующие релаксацию давлений в фазах, можно определить как произведения коэффициента объемного сжатия ϑ_n (для воды $\vartheta_2 = 0.11 \cdot 10^{-9} \, Па^{-1}$, для нефти $\vartheta_3 = 0.77 \cdot 10^{-9} \, Па^{-1}$) и плотности трехфазной среды:

$$\lambda_{11} = 0.11 \cdot 10^{-6} \ c/м^2, \qquad \lambda_{22} = 0.69 \cdot 10^{-6} \ c/м^2, \qquad \lambda_{12} = 0.4 \cdot 10^{-8} \ c/м^2 .$$

Кинетические коэффициенты межфазного трения χ_{ik}

Кинетические коэффициенты χ_{ik} связаны с относительной проницаемостью фаз k_{nm} и динамической вязкостью η_n

$$\chi_{11} = \frac{\eta_2}{\rho_{20} k_{22}}, \quad \chi_{12} = \frac{\eta_2}{\rho_{20} k_{23}}, \quad \chi_{21} = \frac{\eta_3}{\rho_{30} k_{32}}, \quad \chi_{22} = \frac{\eta_3}{\rho_{30} k_{33}} .$$

Динамические вязкости фаз

$$\eta_2 = 0.93 \cdot 10^{-3} \ кг/м\,с = 0.93 \cdot 10^{-3} \ \text{Па с}, \qquad \eta_3 = 2.0 \cdot 10^{-3} \ кг/м\,с = 2.0 \cdot 10^{-3} \ \text{Па с}.$$

Относительные проницаемости фаз

$$k_{22} = 0.2 \cdot 10^{-12} \ \text{м}^2, \qquad k_{33} = 0.2 \cdot 10^{-12} \ \text{м}^2, \qquad k_{23} = 1.0 \cdot 10^{-8} \ \text{м}^2, \qquad \text{причем } k_{32} = k_{23} \frac{\rho_{20} \eta_3}{\rho_{30} \eta_2} .$$

3.4. Источник

Источник типа Рикера

$$F_i^R(t) = A \alpha_i \left(1 - 2\pi^2 f^2 \left(t - t_{in}\right)^2\right) e^{-\pi^2 f^2 \left(t - t_{in}\right)^2},$$