Определяющие уравнения модели фильтрации в деформируемой пористой среде

Роменский Е.И., Перепечко Ю.В.

Оглавление

Определяющие уравнения

1.1. Система уравнений в консервативных переменных

Консервативные переменные

$\rho,\ \rho\alpha_2,\ \alpha_2\rho_2,\ w_1^{12},\ w_2^{12},\ \rho u_1,\ \rho u_2,\ \rho F_{11},\ \rho F_{12},\ \rho F_{21},\ \rho F_{22}$.

Система уравнений в изоэнтропийном приближении

Система уравнений двухфазной фильтрации жидкости в упругой пористой среде в двумерном случае :

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F\left(U\right)}{\partial x}+\frac{\partial G\left(U\right)}{\partial y}=S\left(U\right).$$

Здесь U - вектор консервативных переменных, $F\left(U\right)$, $G\left(U\right)$ - векторы потоков, $S\left(U\right)$ - вектор правых частей.

Вектор U

$U\left(1\right)=\rho$, $U\left(2\right)=\rho\alpha_2$, $U\left(3\right)=\rho_2\alpha_2$, $U\left(4\right)=w_1^{12}$, $U\left(5\right)=w_2^{12}$,

$U\left(6\right)=\rho u_1$, $U\left(7\right)=\rho u_2$, $U\left(8\right)=\rho F_{11}$, $U\left(9\right)=\rho F_{12}$, $U\left(10\right)=\rho F_{21}$, $U\left(11\right)=\rho F_{22}$.

Вектор F

$F\left(1\right)=\rho u_1$, $F\left(2\right)=\rho\alpha_2 u_1$, $F\left(3\right)=\rho_2\alpha_2 u_1^2$, $F\left(4\right)=\frac{1}{2}u_i^1u_i^1-\frac{1}{2}u_i^2u_i^2+e^1+\frac{p_1}{\rho_1}-e^2-\frac{p_2}{\rho_2}$, $F\left(5\right)=0$,

$F\left(6\right)=\alpha_1\rho_1u_1^1u_1^1+\alpha_2\rho_2u_1^2u_1^2+\left(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2\right)-\alpha_1\sigma_{11}$, $F\left(7\right)=\alpha_1\rho_1u_1^1u_2^1+\alpha_2\rho_2u_1^2u_2^2-\alpha_1\sigma_{21}$,

$F\left(8\right)=0$, $F\left(9\right)=0$, $F\left(10\right)=\rho F_{21}u_1-\rho F_{11}u_2$, $F\left(11\right)=\rho F_{22}u_1-\rho F_{12}u_2$

Вектор G

$G\left(1\right)=\rho u_2$, $G\left(2\right)=\rho\alpha_2 u_2$, $G\left(3\right)=\rho_2\alpha_2 u_2^2$, $G\left(4\right)=0$, $G\left(5\right)=\frac{1}{2}u_i^1u_i^1-\frac{1}{2}u_i^2u_i^2+e^1+\frac{p_1}{\rho_1}-e^2-\frac{p_2}{\rho_2}$,

$$G(6)=\alpha_1\rho_1 u_1^1 u_2^1+\alpha_2\rho_2 u_1^2 u_2^2-\alpha_1\sigma_{12}, \qquad G(7)=\alpha_1\rho_1 u_2^1 u_2^1+\alpha_2\rho_2 u_2^2 u_2^2+(\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2)-\alpha_1\sigma_{22},$$

$$G(8)=\rho F_{11}u_2-\rho F_{21}u_1, \qquad G(9)=\rho F_{12}u_2-\rho F_{22}u_1, \qquad G(10)=0, \qquad G(11)=0.$$

Вектор S

$$S(1)=0, \qquad S(2)=-\lambda_{11}(p_1-p_2), \qquad S(3)=0, \qquad S(4)=u_2\partial_1 w_2^{12}-u_2\partial_2 w_1^{12}-\chi_{11}c_2\left(u_1-u_1^2\right),$$

$$S(5)=u_1\partial_2 w_1^{12}-u_1\partial_1 w_2^{12}-\chi_{11}c_2\left(u_2-u_2^2\right), \quad S(6)=0, \quad S(7)=0, \quad S(8)=0, \quad S(9)=0, \quad S(10)=0, \quad S(11)=0.$$

По повторяющимся i везде проводится суммирование, причем $i=1,2$. Здесь

$$\alpha_1=1-\alpha_2, \qquad \rho=\alpha_1\rho_1+\alpha_2\rho_2, \qquad w_i^{12}=u_i^1-u_i^2, \qquad \rho u_i=\alpha_1\rho_1 u_i^1+\alpha_2\rho_2 u_i^2,$$

$$c_2=\frac{\alpha_2\rho_2}{\rho}, \qquad e_{ikj}\omega_j^{12}=\partial_i w_k^{12}-\partial_k w_i^{12},$$ (e_{ikj} - символ Леви-Чивиты).

2. Уравнение состояния трехфазной среды

Трехфазная среда характеризуется следующими параметрами: полная плотность среды ρ, относительные скорости фаз w_i^{12}, объемные и массовые содержания жидких фаз α_2, c_2, тензор градиента деформации F_{ij} и принимается аддитивной по фазам

$$E=c_1 e^1+c_2 e^2+\frac{1}{2}(1-c_2)c_2 w_k^{12}w_k^{12}.$$

Внутренние энергии упругого пористого скелета и жидких фаз $e^1=e^1(\rho_1,F_{ik},s)$, $e^2=e^2(\rho_2,s)$, имеют вид

$$e^1=\frac{1}{(\rho_{10})^2}p_{10}\delta\rho_1+\frac{1}{2(\rho_{10})^3}K_1\delta\rho_1\delta\rho_1+\frac{1}{\rho_{10}}\mu\left(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\varepsilon_{ll}\right), \qquad e^2=\frac{1}{(\rho_{20})^2}p_{20}\delta\rho_2+\frac{1}{2(\rho_{20})^3}K_2\delta\rho_2\delta\rho_2.$$

Здесь $\delta\rho_1=\rho_1-\rho_{10}$, $\delta\rho_2=\rho_2-\rho_{20}$ - отклонения параметров от равновесных начальных значений.

Выражение для тензора напряжений в упругой фазе через тензор деформации Альманси

$$\sigma_{11}=\frac{\rho_1}{\rho_{10}}2\mu\left(\left(1-2\varepsilon_{11}\right)\left(\varepsilon_{11}-\frac{1}{3}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\right)-2\varepsilon_{12}\varepsilon_{12}\right),\qquad \sigma_{12}=\frac{\rho_1}{\rho_{10}}2\mu\varepsilon_{12}\left(1-\frac{4}{3}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\right),$$

$$\sigma_{21}=\frac{\rho_1}{\rho_{10}}2\mu\varepsilon_{12}\left(1-\frac{4}{3}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\right),\qquad \sigma_{22}=\frac{\rho_1}{\rho_{10}}2\mu\left(\left(1-2\varepsilon_{22}\right)\left(\varepsilon_{22}-\frac{1}{3}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\right)-2\varepsilon_{12}\varepsilon_{12}\right).$$

Здесь ($\det F=F_{11}F_{22}-F_{12}F_{21}$)

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{F_{22}F_{22}+F_{21}F_{21}}{\left(\det F\right)^2}\right),\qquad \varepsilon_{12}=\frac{F_{22}F_{12}+F_{21}F_{11}}{2\left(\det F\right)^2},\qquad \varepsilon_{21}=\frac{F_{22}F_{12}+F_{11}F_{21}}{2\left(\det F\right)^2},\qquad \varepsilon_{22}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{F_{12}F_{12}+F_{11}F_{11}}{\left(\det F\right)^2}\right),$$

Давления в фазах выражаются соотношениями

$$p_1=\frac{\left(\rho_1\right)^2}{\left(\rho_{10}\right)^2}\left(p_{10}+\frac{1}{\rho_{10}}K_1\delta\rho_1\right),\qquad p_2=\frac{\left(\rho_2\right)^2}{\left(\rho_{20}\right)^2}\left(p_{20}+\frac{1}{\rho_{20}}K_2\delta\rho_2\right).$$

В формулах μ - модуль сдвига, K_1 - объемный модуль упругости (коэффициент объемного расширения) твердой пористой фазы, K_2 - коэффициенты объемного расширения жидкости.

3. Значения физических параметров модели

3.1. Физические параметры

Плотности пористой матрицы и воды

$$\rho_{10}=2.5\cdot10^3\ кг/м^3,\qquad \rho_{20}=1.0\cdot10^3\ кг/м^3.$$

Объемные содержания фаз

Объемное содержание фаз в формации (во всей области, кроме скважин) $\alpha_{20}=0.1$, $\alpha_{10}=0.9$.

Объемное содержание фаз в скважинах $\alpha_{20}=0.99$, $\alpha_{10}=0.01$.

Давление

$$p_{10} = 10^5 \ Па, \qquad p_{20} = 10^5 \ Па.$$

3.2. Термодинамические коэффициенты

Модуль сдвига твердой фазы $\mu = 8.9 \cdot 10^9 \ кг/м\,с^2 = 8.9 \cdot 10^9 \ Па$.

Коэффициенты объемного расширения $K_1 = 3.7 \cdot 10^{10} \ кг/м\,с^2 = 37 \cdot 10^9 \ Па$, $K_2 = 2.25 \cdot 10^9 \ кг/м\,с^2 = 2.25 \cdot 10^9 \ Па$.

3.3. Кинетически коэффициенты

Кинетические коэффициенты λ_{ij}

Коэффициент λ_{11}, характеризующие релаксацию давлений в фазах, можно определить как произведения коэффициента объемного сжатия ϑ_n (для воды $\vartheta_2 = 0.11 \cdot 10^{-9} \ Па^{-1}$) и плотности двухфазной среды:

$$\lambda_{11} = 0.11 \cdot 10^{-6} \ с/м^2.$$

Кинетический коэффициент межфазного трения χ_{11}

Кинетический коэффициент χ_{11} связан с относительной проницаемостью фаз k_{22} и динамической вязкостью η_2

$$\chi_{11} = \frac{\eta_2}{\rho_{20} k_{22}}.$$

Динамическая вязкость воды η_2=$0.93 \cdot 10^{-3} \ кг/м\,с = 0.93 \cdot 10^{-3}$ Па с.

Относительная проницаемость $k_{22} = 0.2 \cdot 10^{-12}$ м^2.

3.4. Источник

Источник типа Рикера

$$F_i^R(t) = A\,\alpha_i \left(1 - 2\pi^2 f^2 \left(t - t_{in}\right)^2\right) e^{-\pi^2 f^2 \left(t - t_{in}\right)^2}$$