

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
Институт информационных и вычислительных технологий МОН РК
Новосибирский государственный университет
R8 IEEE Russia (Siberia) Section

ТРУДЫ

**XV Международной Азиатской школы-семинара
«ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ»**

26–30 августа 2019 г.

Российская Федерация, Новосибирск

Новосибирск
2019

УДК 51
ББК 22.1
П78

П78 Проблемы оптимизации сложных систем : Труды XV Международной Азиатской школы-семинара "Проблемы оптимизации сложных систем" / Ин-т вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. Новосибирск, 26–30 августа 2019 г. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2019. 83 стр.

ISBN 978-5-901548-43-1

В сборнике представлены материалы XV Международной Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем» (русскоязычные доклады).

В сборнике опубликованы доклады, представленные учеными от Республики Казахстан, Российской Федерации, Кыргызской Республики, Республики Узбекистан и др.

Рассмотрены актуальные вопросы в области математики, информатики и управления: математического моделирования сложных систем и бизнес-процессов, исследования и разработки защищенных и интеллектуальных информационных и телекоммуникационных технологий, математической теории управления, технологий искусственного интеллекта.

Материалы сборника предназначены для научных работников, докторантов и магистрантов, а также студентов старших курсов.

Главный редактор:

ген. директор ИИВТ акад. НАН РК, д-р физ.-мат. наук, профессор
М. Н. Калимолдаев, (Республика Казахстан, Алматы)

Ответственные редакторы:

гл. научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН д-р техн. наук **А. С. Родионов** (Россия, Новосибирск)
науч. сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН **Г. Ы. Токтошов** (Россия, Новосибирск)

ISBN 978-5-901548-43-1

© Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН, 2019

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ ВОЗДУШНО-СТРУЙНОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ УМЕРЕННЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

З. К. Абдимуталипова, А. Ы. Курбаналиев

*Ошский государственный университет
723500, г. Ош, Кыргызстан*

УДК 532.529

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10001

В данной статье приведены численные результаты моделирования методом крупных вихрей процесса натекания воздушной круглой струи на плоскую гладкую поверхность при умеренных числах Рейнольдса (4400, 10000 и 23000). Расстояние H от выходного среза круглой струи диаметра D до плоской пластины было равно $H/D = 5$. Полученные с использованием программного пакета OpenFOAM численные результаты сравниваются с соответствующими экспериментальными данными базы данных ERCOFTAC.

Ключевые слова: Моделирование, метод крупных вихрей, натекание струи, теплообмен, модель Смагоринского, Open FOAM

Введение

Процесс интенсификации теплообмена при натекании струи на пластину является интересной актуальной задачей в силу того, что он имеет большое промышленное и фундаментальное значение [1-4]. В связи с растущей потребностью в улучшении теплообмена во многих промышленных применениях, струйные удары широко используются и изучаются. Эти методы используются везде, где требуется эффективное охлаждение, нагрев или сушка поверхности. Некоторыми важными промышленными применениями являются охлаждение или нагрев электрического оборудования, требования к сушке, связанные с текстильной и бумажной промышленностью, охлаждение турбинных лопаток и наружных стенок камеры сгорания, замораживание тканей в криохирургии, отжиг стекла, быстрое охлаждение или нагрев, связанные с производством стекла, цемента [5] и самолеты вертикальной посадки или взлета. Ударные струи предлагают эффективный и гибкий подход для передачи энергии или массы во многих промышленных применениях путем изменения расхода и геометрических параметров, таких как число Рейнольдса Re струи, геометрия и форма сопла, из которого вытекает струя, расстояние между соплом и мишенью, угол столкновения струи, турбулентные свойства струи на выходе из сопла, шероховатость поверхности мишени и пульсация потока и т. д.

Рассматриваемый класс задачи исследован экспериментально в некоторых работах базы данных ERCOFTAC [6, case 25, case 38, case 55], а численное моделирование проведено в [8, 9]. При численном моделировании с использованием различных моделей турбулентности, основанных на усредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье – Стокса обнаружено, что все рассмотренные модели турбулентности дают лишь приблизительные предсказания для процесса теплопереноса. Однако некоторые модели обеспечивают неплохое описание экспериментальных особенностей, таких как появление вторичного пика и нескольких выбросов числа Нуссельта для шероховатой поверхности с точным вычислением

числа Нуссельта в точке торможения струи [8]. В работе [9] проведено численное исследование струи в неподвижный поток при невысоких числах $Re=23000$ и при безразмерном расстоянии от среза сопла до пластины равным $H/D = 6$.

Хотя столкновение струи с пластиной является геометрически простым, оно включает ряд интересных сложных конфигураций физического потока, а именно: область свободного сдвига (реализация крупномасштабных вихревых структур), область застоя (с сильной кривизной линии тока) и область пристенной струи.

Целью настоящей работы является численное исследование процесса теплообмена при натекании нормально ударяющейся круглой струи воздуха на плоскую гладкую пластину при умеренных числах $Re=4400, 10000, 23000$. Безразмерное расстояние от среза сопла до пластины равно $H/D=5$. Численные расчеты проведены при помощи открытого программного пакета OpenFOAM[10] с использованием метода крупных вихрей Смагоринского[11]. Распределения профилей средней скорости и температуры, средние числа Нуссельта при различных числах Рейнольдса Re обсуждаются в последующих разделах.

1. Постановка задачи

Схема рассматриваемой задачи струйного теплообмена приведена на рис. 1. Она представляет в себя круглую воздушную струю диаметра D , которая натекает на гладкую плоскую пластину с температурой T_w .

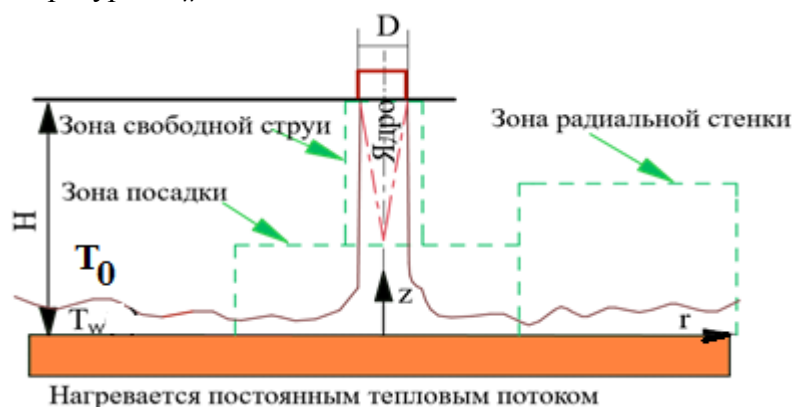


Рисунок 1: Схема нормально падающей на пластину круглой струи

Расстояние между срезом сопла, из которого вытекает струя и пластиной составляет величину $H=5D$. Численные расчеты проведены для трёх чисел Рейнольдса, 4400, 10000 и 23000, рассчитанные через скорость истечения струи W_b , диаметр струи D и вязкость воздуха. Температура воздушной струи была равна температуре окружающей среды T_0 , которая меньше температуры пластины T_w , нагреваемую постоянным тепловым потоком.

Предполагается, что воздушная струя несжимаема, охлаждение нагретой плоской пластины в основном определяется вынужденной конвекцией, считается, что эффектами плавленности, вызванной естественной конвекцией и тепловым излучением пластины можно пренебречь. Используя эти допущения, уравнения сохранения массы, импульса и энергии можно записать в виде [12, с. 277]:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{u}_j \hat{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}^s}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial (c_p \hat{T})}{\partial t} + \frac{\partial (c_p \hat{u}_j \hat{T})}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Gamma c_p \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_j^s}{\partial x_j} \quad (3)$$

где ν , ρ , c_p и Γ - теплофизические параметры воздуха, u_i - составляющая скорости потока в направлении x_i , T - температура воздуха, причем верхняя '^' фильтрация с тестовым фильтром.

Подсеточный тензор напряжений определяется следующим соотношением:

$$\tau_{ij}^s = \rho \left(u_i \hat{u}_j - \hat{u}_i \hat{u}_j \right)$$

Модель замыкания в методе подсеточного моделирования в уравнении для импульса (2) основана на гипотезе градиентной диффузии, которая может быть выражена как отношение между анизотропным напряжением и крупномасштабным тензором скорости деформации следующим образом:

$$\tau_{ij}^s - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}^s = 2\rho \nu_s \left(\hat{s}_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \hat{s}_{kk} \right)$$

где ν_s - подсеточная вязкость, определяемая как

$$\nu_s = (c_s \Delta)^2 \hat{s} = (c_s \Delta)^2 \sqrt{2 \hat{s}_{ij} \hat{s}_{ij}}.$$

Здесь $\hat{s}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right)$ - разрешенная скорость деформации, а Δ - ширина фильтра сетки,

c_s - эмпирическая константа. Подсеточный тепловой поток q_j^s выражается как $q_j^s = \rho c_p (u_j \hat{T} - \hat{u}_j \hat{T})$. В силу гипотезы градиентной диффузии его можно переписать следующим образом:

$$q_j^s = -\rho c_p \alpha_s \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j}$$

где α_s - коэффициент подсеточной теплопроводности.

2. Граничные условия

На открытых границах сверху и по бокам расчетной области задается условия постоянного давления, допускающие возникновение возможного обратного потока. Интенсивность турбулентности круглой воздушной струи принимается на уровне 1%. Тепловой поток подводимый к пластине был равен 1000 Вт/м². Температура окружающего воздуха была фиксированной и равной $T_0 = 300\text{K}$, а теплофизические свойства воздуха при стандартном атмосферном давлении имеют следующие значения: $\rho = 1.1767\text{кг/м}^3$; $c_p = 1.0066\text{кДж/(кг} \cdot \text{K)}$; $\lambda = -0.0262\text{Вт/(м} \cdot \text{K)}$; $\nu = 1.58 \cdot 10^{-5}\text{м}^2/\text{с}$; $P_r = 0.7196$;

Проведенные расчеты показывают, что искусственно предполагаемый тепловой поток почти не влияет на расчетное значение числа Нуссельта, поскольку механизм теплопередачи в основном определяется турбулентной вынужденной конвекцией, вызванной столкновением воздушной круглой струи о плоскую пластину.

3. Дискретизация и алгоритм решения задачи

Моделирование методом крупных вихрей осуществляется на основе метода контрольного объема [13, с. 24] с использованием неструктурированной расчетной сетки. Для дискретизации производных по времени для уравнений (1-3) используется метод Кранка - Николсона второго порядка и для пространственных производных используется центрально-разностная схема второго порядка. Полученные после дискретизации система линейных алгебраических уравнений решаются с помощью алгоритма PISO [11, с. 176, с. 178, с. 195].

Следует отметить что, шаг по времени Δt в пакете OpenFOAM в процессе вычислений самонастраивается. Это достигается путем выполнения условия, чтобы число Куранта было меньше 0,5, то есть $\Delta t |U| / \delta x < 0,5$, где δx относится к размеру ячейки в направлении скорости, а $|U|$ величина скорости в этой ячейке. Общее количество вычислительных ячеек составляет около $1,2 \times 10^6$.

Использованные параметры численного решения систем уравнений приведены в табл. 1.

Таблица 1: Параметры процедуры численного решения

| Re | W_b , м/с | Z^+ | t_0 , с | τ |
|-------|-------------|-------------|-----------------------|--------|
| 4400 | 9.96 | ≤ 1.87 | $7.049 \cdot 10^{-3}$ | 5806 |
| 10000 | 22.57 | ≤ 1.96 | $3.101 \cdot 10^{-3}$ | 3398 |
| 23000 | 51.91 | ≤ 3.59 | $1.348 \cdot 10^{-3}$ | 2789 |

Как показано в третьем столбце табл. 1, безразмерное расстояние между первым узлом расчетной сетки и пластины ($z^+ = z u_\tau / \nu$, u_τ - скорость трения) меньше или равно 1,87, 1,96 или 3,59 для числа Рейнольдса струи 4400, 10000 и 23000, соответственно. А это в свою очередь приводит к необходимости уменьшения временного шага до нескольких миллисекунд. Проведенные расчеты показывают, что для задач теплопередачи безразмерное расстояние от твердой стенки $z^+ \leq 5$ может быть относительно подходящим выбором.

Более подробную информацию о методах дискретизации основных уравнений, о граничных условиях и о методах решения полученных систем линейных алгебраических уравнений можно найти в [10].

4. Результаты численных расчетов

В представленных ниже результатах численных расчетов диаметр струйного сопла D и скорость струи W_b приняты в качестве масштабов длины и скорости, а масштаб времени t_0 равен D/W_b . Поскольку при моделировании диаметр струйного сопла выбран равным 0,007м, соответствующие значения шкалы времени t_0 , скорости струи W_b и периода времени для статистического анализа τ показаны в табл. 1.

Структура потока при натекании круглой струи на плоскую пластину при различных числах Рейнольдса приведена на рис. 2, 3. Видно, что места образования первичных вихрей и их формы не только изменяются во времени и пространстве, но также зависят от числа Рейнольдса турбулентной струи Re .

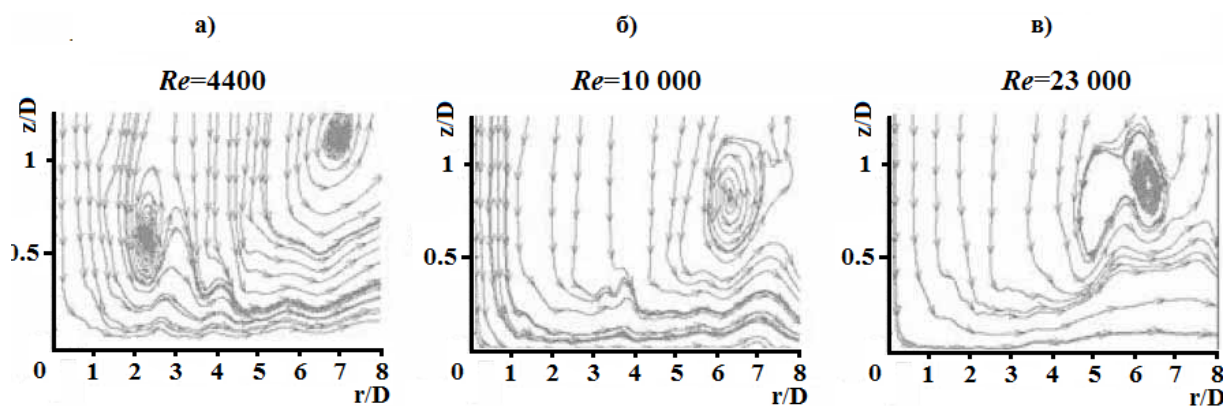


Рисунок 2: Мгновенные линии тока вектора скорости при различных Re

Поскольку плоская гладкая пластина подогревается при постоянном тепловом потоке, температура воздуха в области пластины имеет тесную зависимость от Re , а именно при увеличении числа Re температура в определенной точке плоскости $r - z$ уменьшается.

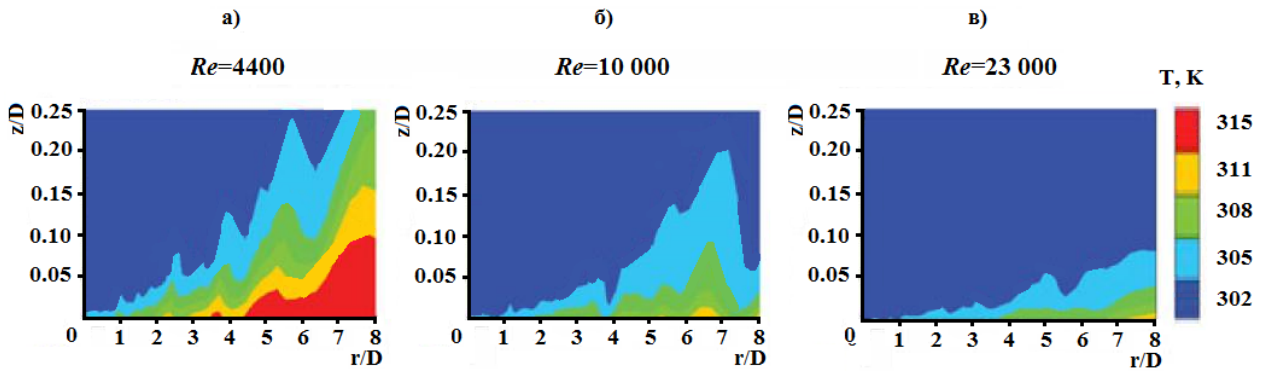


Рисунок 3: Мгновенные контуры температуры около пластины

Как видно из рис. 3, поле температуры потока также зависит от числа Re , что приводит к зависимости скорости теплопередачи от пластины к потоку от Re . Другими словами, с ростом числа Re , время нахождения частиц воздуха над нагретой пластиной уменьшается, что приводит к уменьшению теплообмена между нагретой пластиной и более холодным потоком.

Сравнение вертикальных профилей составляющих скорости в направлении в двух радиальных положениях $r/D = 0$, рис. 4а и $r/D=0.5$, рис. 4б показано на рис. 4 а,б, где экспериментальные данные [6] обозначены кружком для безразмерной составляющей скорости U/W_b вдоль оси Ox и ромбом безразмерной составляющей скорости W/W_b вдоль оси Oz . Экспериментальные данные получены при $Re = 2,3 \times 10^4$ и при более коротком расстоянии от среза сопла до плоской пластины, равным $H/D=2$. Можно заметить, удовлетворительное соответствие между расчетом и экспериментом.

Описывая поверхность стенки мишени в полярных координатах, усредняя коэффициент теплопередачи при столкновении струи в направлении θ от нуля до 2π , коэффициент теплопередачи h можно выразить как одну функцию от r . Далее, усредняя локальное число Нуссельта в направлении r , среднее число Нуссельта можно записать в виде, где η обозначает промежуточную переменную интегрирования:

$$Nu_u = \frac{hD}{\lambda}; N_{u_{avg}} = \frac{2}{r^2} \int_0^r Nu_u \cdot \eta d\eta$$

Как показано на рис. 5, на основе LES моделирование с использованием OpenFOAM, предсказанное среднее число Нуссельта хорошо согласуется с данными, приведенными в

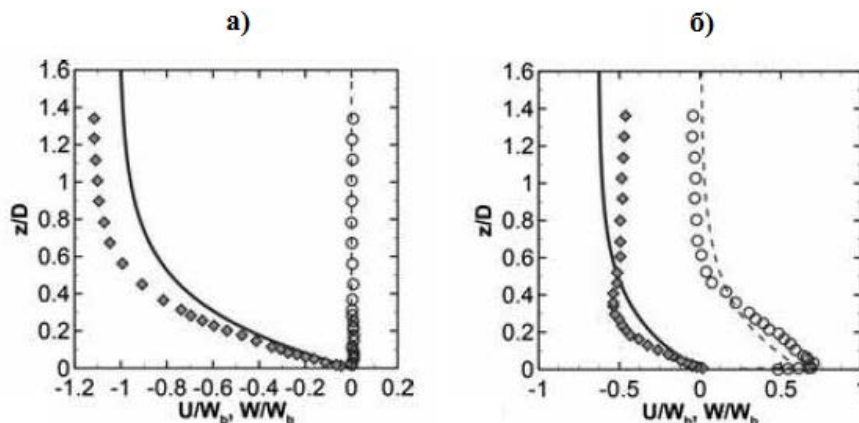


Рисунок 4: Сравнение вертикальных профилей составляющих скорости

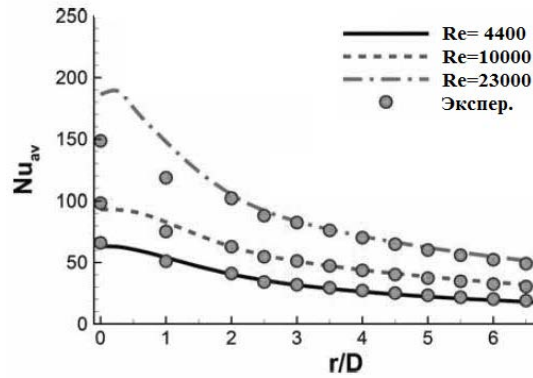


Рисунок 5: Распределения среднего числа Нуссельта при разных числах Рейнольдса

работе. [14]. На рис. 5 маркеры соответствуют экспериментальным данным работы [14]. Видно, что для $r/D \geq 2,5$ данные рассчитываются непосредственно следующим эмпирическим выражением [14].

$$N_{u_{a,9,exp}} = F \cdot [1.36 Re^{0.574} Pr^{0.42}]; F = [D/r(1 - 1.1D/r)] / [1 + 0.1D/r(H/D - 6)];$$

где множитель F является функцией D/r и H/D . Для эмпирического уравнения, доступный диапазон числа Рейнольдса составляет $2\,000 \leq Re \leq 30\,000$.

Отмечено, что для $r/D < 2,5$ в области, близкой к точке застоя, экспериментальные данные получены относительно некоторых измеренных кривых в работе [14], подразумевая, что в области также существуют некоторые неопределенности для эмпирически полученных данных. В целом, удовлетворительное сравнение теплопередачи показывает, что путем моделирования методом крупных вихрей с использованием пакета OpenFOAM может получить удовлетворительные численные результаты теплопередачи для нормально падающих круглых воздушных струй при умеренных числах Рейнольдса.

Заключение

Основываясь на динамической модели Смагоринского проведено моделирование методом крупных вихрей процесса теплопередачи от нагретой пластины к более холодному потоку при натекании нормально падающей круглой воздушной струи на пластине при умеренных числах Рейнольдса 4400, 10000 и 23000 и на расстоянии от отверстия до пластины $H/D = 5$. Проведенные расчеты с использованием пакета OpenFOAM показывают, что процесс теплопередачи и соответствующие структуры отраженного от плоской пластины турбулентного потока при нормально падающей воздушной струи сильно зависят от условий воздушной струи. Кроме того, обнаружено, что среднее число Нуссельта, полученное при моделировании, согласуется удовлетворительно с измеренными экспериментальными данными, что указывает на то, что OpenFOAM имеет потенциал для численного моделирования рассматриваемого класса задач теплофизики.

Список литературы

1. Dewan A., Dutta R., Srinivasan B. Recent trends in computation of turbulent jet impingement heat transfer, Heat Transfer Engineering, Vol. 33, No. 4-5, pp. 447-460, 2003. DOI: 10.1080/01457632.2012.614154.
2. Jambunathan, K., Lai, E., Moss, M. A., and Button, B. L., A Review of Heat Transfer Data for Single Circular Jet Impingement, International Journal of Heat and Fluid Flow, vol. 13, pp. 106-115, 1992.

3. Viskanta, R., Heat Transfer to Impinging Isothermal Gas and Flame Jets, *Experimental Thermal Fluid Science*, vol. 6, pp. 111–134, 1993.
4. Baughn, J. W., and Shimizu, S., Heat Transfer Measurements From a Surface With Uniform Heat Flux and an Impinging Jet, *ASME Journal of Heat Transfer*, vol. 111, no. 4, pp. 1096–1098, 1989.
5. Акунов В.И. Струйные мельницы. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1967. -257 с.
6. ERCOFTAC "Classic Collection" Database. Case C.25. Normally Impinging Jet from a Circular Nozzle. Available at: <http://cfd.mace.manchester.ac.uk/ercoftac/>.
7. ERCOFTAC "Classic Collection" Database. Case C.38. Circular Air-Air Jet. Available at: <http://cfd.mace.manchester.ac.uk/ercoftac/>.
8. A. K. Shukla and A. Dewan. Convective Heat Transfer Enhancement using Slot Jet Impingement on a Detached Rib Surface. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, Vol. 10, No. 6, pp. 1615-1627, 2017. DOI: 10.18869/acadpub.jafm.73.243.2768. Available online at www.jafmonline.net.
9. Uddin, N., Neumann, S. O., Weigand B., Younis, B. A., Large-Eddy Simulations and Heat-Flux Modeling in a Turbulent Impinging Jet, *Numerical Heat Transfer, Part A*, vol. 55, pp. 906–930, 2009.
10. OpenFOAM Foundation. 2018. [Electron. resource]. <https://openfoam.org/> [Accessed: 2019-01-16].
11. Ferziger J. H., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: SpringerVerlag, 2002. –423p.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. 3-е изд., перераб.-М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. -736 с.
13. Патанкар С.В. *Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости*: Пер. с англ. –М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152с.
14. Martin, H., *Heat and Mass Transfer Between Impinging Gas Jets and Solid Surfaces*, in *Advances in Heat Transfer*, ed. P. H. James, pp.1–60, Elsevier, New York, 1977.

Абдимуталипова Зейнура Каныбековна – аспирант Ошского государственного университета; email: zeinura@gmail.com
Курбаналиев Абдикерим Брысбаевич – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой Ошского государственного университета; email: kurbanaliev@rambler.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ Z-ЧИСЕЛ

Т. Ф. Бекмуратов, Д. Т. Мухамедиева

*Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий при ТУИТ
100124, Ташкент, Узбекистан*

УДК 316.51

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10002

В статье рассматриваются подходы к получению Z-решений многокритериальной задачи для получения устойчивого решения. При этом желательно иметь дополнительную априорную информацию о степени предпочтения конкретной цели, которая задается различными нечеткими операторами. Определен набор нечетких множеств, соответствующих различным свойствам объекта исследования, в частности качественной (лингвистической) и количественной информации о характеристиках объекта. Предложил подход Z-чисел к решению задач прогнозирования как многокритериальной задаче оптимизации.

Ключевые слова: Оптимизация, многокритериальная задача, неопределенность, Z-число, Z-оценка, Z-решение.

Введение

В зависимости от структуры доступной информации, существует большое количество методов оптимизации. Одним из известных методов является метод ожидаемой полезности, предложенный фон Нейманом и Моргенштерном [1], и субъективная ожидаемая полезность Сэвиджа [2]. Теория ожидаемой полезности утверждает, что лицо, принимающее решения, выбирает между рискованными или неопределенными перспективами, сравнивая их ожидаемые значения полезности, то есть взвешенные суммы, полученные путем сложения значений полезности результатов, умноженных на их соответствующие вероятности [3]. Существуют две хорошо принятые версии теории: теория субъективной ожидаемой полезности в случае неопределенности и теория фон Неймана-Моргенштерна в случае риска [3]. Эти подходы требуют, чтобы объективные или субъективные вероятности и полезные значения были точно известны. Но в реальных условиях во многих случаях становится невозможно определить значения объективных вероятностей [4]. Более вероятно определить значения субъективных вероятностей, отражающих убеждения лица, принимающего решение. Неточность и неопределенность могут быть в аспектах измерения, вероятности или описания [5]. Неточность в описании - это тип неточности, к которому обращается нечеткая логика [5]. Это двусмысленность, неопределенность, качественность или субъективность в естественном языке [5]. Во всех существующих классических теориях принятия решений вероятностные меры считаются описанными точным образом, чего во многих реальных случаях достичь невозможно. В реальных проблемах принятия решений такие вероятности субъективны и обычно неточны. Существует множество подходов для описания неточности информации, относящейся к вероятности. Одним из подходов является использование иерархических неточных моделей. Эти модели отражают неопределенность второго порядка, присущую реальным задачам. Согласно этому подходу мнение эксперта об оценке вероятности обычно является неточным [6,7,8].

В [9] Заде ввел понятие Z-чисел для описания неопределенной информации, которая является более обобщенным понятием. Z-число - это упорядоченная пара нечетких чисел.

Значение переменной представляет идею определенности или другого тесно связанного понятия, такого как уверенность, надежность, сила правды или вероятность [10]. Следует отметить, что при повседневном принятии решений большинство решений принимает форму Z- чисел. Заде предлагает некоторые операции для вычисления с Z-числами, используя принцип расширения. Эта тема была расширена в [10]. Было показано, как использовать эти Z-числа для предоставления информации о неопределенной переменной в форме Z-оценок, предполагая, что эта неопределенная переменная является случайной. В [11] автор предлагает иллюстрацию Z-оценки, показывающую, как принимать решения и отвечать на вопросы. Также альтернативная формулировка используется для информации, содержащейся в Z-оценках, в терминах структуры убеждения Демпстера-Шафера, в которой используются нечеткие множества типа 2. Упрощенный вариант решения задач Z-оценки рассмотрен в [11]. В [12] авторы рассмотрели многокритериальную задачу оптимизации и принятия решения с использованием Z-чисел. Для этого Z-числа преобразуются в классические нечеткие числа, и определяется приоритетный вес каждой альтернативы.

В этом исследовании мы предлагаем обобщение теории ожидаемой полезности для среды, описываемой Z-оценкой неопределенной информации.

1. Постановка задачи

Исследования процессов и явлений, динамика которых во многом зависит от человека, принимаемых им решений и которые сами влияют на жизнь человеческого общества дали новое понятие – сложная система [9].

Исследуем решение задачи многокритериальной оптимизации

$$\begin{aligned} f_i(x) &\rightarrow \min, \\ f_i(x) &\geq 0 \quad \forall x \in X; i = 1, 2 \end{aligned}$$

X – пространство решения оптимизационной задачи.

Z-решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= \exp(-f_1(x))/\sqrt{k}, \\ \mu_2(x) &= \exp(-f_2(x))/\sqrt{k}, \\ \mu(x) &= \mu_1^*(x) * \mu_2^*(x). \end{aligned}$$

Здесь $u \in U = F_1 \times F_2$,

$$Qu = \left\{ x : x = \arg \inf_{x \in X} f_1(x) \text{ и } x = \arg \inf_{x \in X} f_2(x) \right\},$$

Z-информация с функцией принадлежности $\mu(x) = \mu_1(x)\mu_2(x)$ является Z-решением.

$$\forall \alpha \in (0,1], A_\alpha = \left\{ x : \mu(x) \geq \frac{\alpha}{\sqrt{k}} \right\} = \left\{ x : f_1(x) + f_2(x) \leq -\ln \alpha \right\}$$

$$\begin{aligned} Qu &= \left\{ x : x = \arg \inf_{x \in X} f_1(x) \text{ и } x = \arg \inf_{x \in X} f_2(x) \right\} = \\ &= \left\{ x : f_1(x) = \beta_1 = \inf_{x \in X} f_1(x) \text{ и } f_2(x) = \beta_2 = \inf_{x \in X} f_2(x) \right\} = \\ &= \left\{ x : f_1(x) + f_2(x) = \beta_1 + \beta_2 \right\} = A_{\exp(-(\beta_1 + \beta_2))/\sqrt{k}} = A_c \end{aligned}$$

$$A_\alpha = \left\{ x : \mu(x) \geq \frac{\alpha}{\sqrt{k}} \right\} = \left\{ x : f_1(x) + f_2(x) \leq -\ln \alpha \right\},$$

В силу того, что

$$\limsup_{\alpha \rightarrow c} \sup_{v \in A_\alpha} (Q(u), A_\alpha) = \limsup_{\alpha \rightarrow c} (A_c, A_\alpha) = 0.$$

$\mu(x) = \mu_1(x)\mu_2(x)$ является Z -решением.

2. Подходы Z -чисел к задаче прогнозирования

Результаты последующего математического анализа в значительной степени зависят от того, насколько адекватно использована исходная информация о предмете исследования при моделировании, т.е. какова степень адекватности модели. В связи с этим, основными задачами разработки моделей слабоформализуемых процессов являются:

- анализ методов решений некорректных задач, формализуемых в процессе построения модели оценки и прогнозирования интеллектуальных систем при нечеткой информации;
- обоснование, что можно получить нечеткие решения и устойчивые нечеткие решения некорректных задач в процессе построения моделей интеллектуальных систем с помощью различных функций принадлежности;
- создание алгоритмов решения неустойчивых задач, формируемых в процессе построения моделей и принятия решений на основе теории нечетких множеств и Z -чисел;
- разработка алгоритмов решения неустойчивых задач многокритериальной оптимизации при нечеткой информации.

Прогнозирование представляет собой научно-обоснованное оценивание будущих состояний интересующего нас объекта.

Прогнозы могут быть как количественные, так и качественные («завтра будет теплее»), где логично применять теорию Z -чисел.

Различные подходы к решению задачи прогнозирования отличаются по объему необходимой для прогноза априорной информации об исследуемом объекте, об изменяемых и неизменяемых характеристиках, о состоянии и изменении его окружения [10-12].

В детерминированном и стохастических подходах предполагается наличие полного информационного базиса, все значимые факторы должны быть учтены. Точность измеряемых факторов должна быть достаточно высокой.

Нечеткий подход позволяет опираться на любую априорную информацию и давать Z -решение, соответствующее по уровню точности и наличию исходных данных.

Построим Z -решение задачи прогнозирования.

Пусть понятию «точность прогноза» отвечает нечеткое множество с функцией принадлежности вида

$$\mu_A(y) = \lambda(\{y_i\}, \{x_i\}, y), i = 1, \dots, n,$$

где $\{y_i\}, \{x_i\}$ – известные точки, $y(x)$ – искомая функция. Аналогично, строится функция принадлежности понятия «качество прогноза математической модели» $\mu_B(y)$.

Как обычно, Z -решение есть некоторая комбинация исходных Z -информаций

$$\mu(y) = \mu_A^*(y) * \mu_B^*(y)$$

Вид функций принадлежности и способ их связывания зависит от априорной информации.

Ставится задача прогноза известной последовательности $\{x_i\}, i = 1, \dots, n$, т.е. создания дополнительной последовательности $\{x_i\}, i = n+1, \dots, n+m$. Необходимо найти дискретную функцию $y(i)$, которая продолжает данный ряд значений.

Наиболее простой априорной информацией будет знание о том, что вид функции и ее качество можно определять на разных интервалах – интервал обучения и интервал экзамена.

Таким образом, понятию «вид функции» («точность модели») отвечает нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_A(y) = \exp\left(-\sum_{i=1}^k \left(x_i - \inf_y y(i)\right)^2\right)$$

Понятию «качество прогноза» отвечает нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) = \exp\left(-\sum_{i=k+1}^n (x_i - y(i))^2\right)$$

Z -решение есть комбинация исходных Z -информаций

$$\mu(y) = \sqrt{k_1 k_2} \mu_A(y) \mu_B^\eta(y),$$

где η – параметр уверенности в качестве прогноза.

Если A – непрерывный оператор, и u задано с помощью следующей формулы, то ставится задача поиска v :

$$Av = u, \quad u \in U, \quad v \in V.$$

Решение, полученное на основе Z -чисел, является устойчивым, если выполняются следующие условия:

$$* \quad \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \sup \\ x \in X}} \mu\left(\frac{x}{k}\right) \varepsilon(\alpha) = 0;$$

* при $\forall \alpha \in (0, 1]$ A оператор на $D(A_\alpha)$ является непрерывным.

Рассмотрим, является ли решение, полученной на основе Z -чисел функцией принадлежности $\mu(v) = \exp\left(-\left(\frac{Av - u}{k}\right)^2\right)$, устойчивым.

Показано, что $\varepsilon(\alpha) = k\sqrt{-\ln \alpha} < \infty$, и первое условие выполнено, т.е. $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \varepsilon(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} (k\sqrt{-\ln \alpha}) = 0$. Непрерывность оператора A на $D(A_\alpha)$ следует из условий постановки задачи. Таким образом, показано, что решение, полученное на основе Z -чисел, является устойчивым.

Исследование устойчивости получаемого Z -решения можно проводить на основе выше описанного подхода.

3. Заключение

Таким образом, построен метод получения математической модели оптимальной сложности, основанный на аппарате Z -чисел, использующий простые предположения о качественном характере критерия сложности, формализующий нечеткое пожелание «точность выше, сложность меньше». Предложен подход Z -чисел к задаче прогнозирования как многокритериальной задаче, сводящийся к некоторой комбинации нечетких критериев выбора, и к исследованию сложных систем как иерархической структуре, с представлением элементов системы и ее качественных свойств как нечетких математических моделей (комбинации Z -информаций), комбинация которых даст математическую модель всей системы.

Список литературы

1. Aliev R.A, Guirimov B G (2014) Type-fuzzy neural networks and their applications. Springer.
2. Бекмуратов Т.Ф., Мухамедиева Д.Т. Методы и алгоритмы синтеза нечетко-нейронных моделей принятия решений. Издательство «Palmarium Academic Publishing». AV Akademikerverlag GmbH&Co.KG Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Germany. 2013. 164 с.
3. Bingyi Kang, Daijun Wei, Ya Li, Yong Deng, "A method of converting Z-number to classical fuzzy number," Journal of Information & Computational Science, 9(3): 703-709, 2012.
4. Bingyi Kang, Daijun Wei, Ya Li, Yong Deng, "Decision Making Using Z-numbers under Uncertain Environment," Journal of Information & Computational Science, 8(7):2807-2814, 2012.
5. R.A.Aliev, B.Fazlollahi, R.R.Aliev, "Soft Computing and its applications in business and economics", Springer, Berlin, Heidelberg, New York , 2004.
6. P.Walley, "Statistical inferences based on a second-order possibility distribution" International Journal of General Systems 9(1997) pp.337-383.
7. R.A.Aliev, W.Pedrycz, O.H.Huseynov, L.M.Zeinalova, "Decision making with second order information granules". In: Granular computing and intelligent systems, Springer-Verlag, pp.327-374, 2011.
8. G. De Cooman, "Precision-imprecision equivalence in a broad class of imprecise hierarchical uncertainty models," Journal of Statistical Planning and Inference 105(1) (2000) pp. 175-198.
9. Lotfi A.Zadeh, "A note on a Z-number," Information Sciences, 181: 2923-2932, 2011.
10. Ronald R.Yager, "On Z-valuations using Zadeh`s Z-numbers," International Journal of Intelligent Systems, 27: 259-278, 2012.
11. Bingyi Kang, Daijun Wei, Ya Li, Yong Deng, "A method of converting Z-number to classical fuzzy number," Journal of Information & Computational Science, 9(3): 703-709, 2012.
12. Bingyi Kang, Daijun Wei, Ya Li, Yong Deng, "Decision Making Using Z-numbers under Uncertain Environment," Journal of Information & Computational Science, 8(7):2807-2814, 2012.

Бекмуратов Тулкун Файзиевич – гл. науч. сотр. Научно-инновационного центра информационно-коммуникационных технологий; email: bek.tulkun@yandex.ru;
Мухамедиева Дилноз Тулкуновна – гл. науч. сотр. Научно-инновационного центра информационно-коммуникационных технологий; email: dilnoz134@rambler.ru

КРИТЕРИИ ОПТИМИЗАЦИИ «ЯДЕРНОГО» АЛГОРИТМА ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ

Т. Е. Булгакова¹, А. В. Войтишек^{1,2}

¹Новосибирский государственный университет,

²Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
630090, Новосибирск

УДК 519.676

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10003

Предложен конструктивный «ядерный» алгоритм приближения вероятностной плотности по заданным выборочным значениям, использующий подходы численной аппроксимации функций. Проведен критический анализ критерия оптимизации «ядерных» оценок плотностей, основанного на уменьшении верхней границы среднеквадратической погрешности. Показано, что построенный «ядерный» алгоритм эквивалентен рандомизированному проекционно-сеточному функциональному алгоритму приближения решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В связи с этим предложено использовать критерий условной оптимизации функциональных алгоритмов, основанный на минимизации затрат при фиксированном уровне погрешности, для «ядерного» алгоритма приближения вероятностной плотности.

Ключевые слова: «ядерная» оценка плотности, теория численной аппроксимации функций, оптимизация вычислительного алгоритма по верхней границе погрешности, условная оптимизация рандомизированных функциональных алгоритмов.

1. Конструктивный «ядерный» алгоритм приближения вероятностной плотности

В классической работе [1] рассматривается непараметрическая оценка вероятностной плотности распределения $P_{\hat{\xi}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^d$ случайного вектора $\hat{\xi}$ по выборочным значениям $\{\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n\}$ из этого распределения вида

$$P_{\hat{\xi}}(\mathbf{x}) \approx Z_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \kappa^{(\mathbf{x})}(\hat{\xi}_j), \quad (1.1)$$

где $\kappa^{(\mathbf{x})}(\mathbf{y})$ – некоторая финитная параметрическая, одинаковая по форме для всех значений параметра \mathbf{x} «ядерная» функция. Приближение (1.1) называется «ядерной» оценкой плотности $P_{\hat{\xi}}(\mathbf{x})$.

При исследовании свойств приближения (1.1) существенно используется то обстоятельство, что, согласно закону больших чисел, для достаточно больших n выполнено

$$Z_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \kappa^{(\mathbf{x})}(\hat{\xi}_j) \approx \mathbf{E} \kappa^{(\mathbf{x})}(\hat{\xi}) = \int_X \kappa^{(\mathbf{x})}(\mathbf{y}) P_{\hat{\xi}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.2)$$

Определенным конструктивным недостатком теории «ядерных» оценок плотности и ее приложений (см., в частности, работу [1]) является отсутствие обсуждения алгоритма практического (в первую очередь, численного, компьютерного) приближения функции $P_{\hat{\xi}}(\mathbf{x})$ в целом, основанного на теории сеточной аппроксимации функций (см., например, [2]). Такой алгоритм мог бы выглядеть следующим образом.

Предположим, что область $X \subset \mathbb{R}^d$ распределения случайного вектора является ограниченной, и в этой области построена сетка

$$X^{(M)} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \quad (1.3)$$

и рассматривается сеточное приближение функции $P_{\xi}(\mathbf{x})$ вида

$$P_{\xi}(\mathbf{x}) \approx L^{(M)} P_{\xi}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M w^{(i)} [P_{\xi}(\mathbf{x}_1), \dots, P_{\xi}(\mathbf{x}_M)] \chi^{(i)}(\mathbf{x}). \quad (1.4)$$

Здесь

$$\Xi^{(M)} = \{\chi^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, \chi^{(M)}(\mathbf{x})\} \quad (1.5)$$

является набором заданных базисных функций, как правило, связанных с сеткой (1.3) (при этом вид функций (1.5) определяет тип аппроксимации (1.4)), а величины

$$W^{(M)} = \{w^{(1)} [P_{\xi}(\mathbf{x}_1), \dots, P_{\xi}(\mathbf{x}_M)], \dots, w^{(M)} [P_{\xi}(\mathbf{x}_1), \dots, P_{\xi}(\mathbf{x}_M)]\} \quad (1.6)$$

представляют собой коэффициенты, являющиеся комбинациями значений приближаемой функции $P_{\xi}(\mathbf{x})$ в узлах сетки (1.3); чаще всего

$$w^{(i)} [P_{\xi}(\mathbf{x}_1), \dots, P_{\xi}(\mathbf{x}_M)] = P_{\xi}(\mathbf{x}_i). \quad (1.7)$$

Для простоты изложения в дальнейшем будем полагать, что область X является прямоугольным параллелепипедом, а сетка (1.3) является равномерной прямоугольной с шагом h :

$$\mathbf{x}_i = (j_i^{(1)} h, \dots, j_i^{(d)} h); j_i^{(k)} - \text{целые числа}; k = 1, \dots, d; i = 1, \dots, M. \quad (1.8)$$

АЛГОРИТМ 1. Вычисляем значения $\tilde{P}_{\xi}^{(x_i)}(n) = Z_n(\mathbf{x}_i); i = 1, \dots, M$ по формулам вида (1.1) и приближаем функцию $P_{\xi}(\mathbf{x})$ по формуле вида (1.4):

$$P_{\xi}(\mathbf{x}) \approx L^{(M)} \tilde{P}_{\xi}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M w^{(i)} [\tilde{P}_{\xi}^{(x_1)}(n), \dots, \tilde{P}_{\xi}^{(x_M)}(n)] \chi^{(i)}(\mathbf{x}). \quad (1.9)$$

Алгоритм 1 основан на соотношениях

$$\int_X \kappa^{(x_i)}(\mathbf{y}) P_{\xi}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \approx P_{\xi}(\mathbf{x}_i), i = 1, \dots, M, \quad (1.10)$$

которые, в свою очередь, следуют из соотношений (1.1) и (1.2).

2. Оптимизация по асимптотической верхней границе погрешности: выбор «ядерной» функции и «коэффициента размытости»

В работе [1] проводится следующая оптимизация приближения (1.1). Предлагается рассматривать «ядерную» функцию $\kappa^{(x)}(\mathbf{y})$ в виде

$$\kappa^{(x)}(\mathbf{y}) = \prod_{s=1}^d \frac{1}{h^{(s)}(n)} \hat{\kappa}^{(s)}\left(\frac{x^{(s)} - y^{(s)}}{h^{(s)}(n)}\right); \mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}), \mathbf{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(d)}), \quad (2.1)$$

где положительные (вообще говоря, зависящие от величины выборки n) числа $h^{(s)}(n); s = 1, \dots, d$ определяют носитель («коэффициенты размытости») «ядерной» функции $\kappa^{(x)}(\mathbf{y})$, а ограниченные четные ($\hat{\kappa}^{(s)}(y) = \hat{\kappa}^{(s)}(-y)$) функции $\hat{\kappa}^{(s)}(y)$ имеют единичный «второй момент» и конечные « m -е моменты»:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \hat{\kappa}^{(s)}(y) dy = 1; \int_{-\infty}^{+\infty} y^m \hat{\kappa}^{(s)}(y) dy < \infty, m > 2. \quad (2.2)$$

Содержательные результаты по оптимизации приближения (1.1) с «ядерной» функцией (2.1) получаются лишь для случая

$$h^{(1)}(n) = \dots = h^{(d)}(n) \equiv \hat{h}(n), \hat{\kappa}^{(1)}(y) = \dots = \hat{\kappa}^{(d)}(y) \equiv \hat{\kappa}(y)$$

(см., в частности, [1]); случай различных $h^{(s)}(n), \hat{\kappa}^{(s)}(y); s = 1, \dots, d$ практически не изучен.

В работе [1] в рамках асимптотического (при $n \rightarrow \infty$) подхода с помощью разложения функции $P_{\xi}(x^{(1)} + \hat{h}(n)y^{(1)}, \dots, x^{(d)} + \hat{h}(n)y^{(d)})$ по всем переменным $\mathbf{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(d)})$ в точке $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$ в ряд Тейлора и минимизации относительной глобальной среднеквадратической ошибки

$$[\hat{\delta}^{(\mathbb{L}_2(x))}(n)]^2 = \frac{\mathbf{E} \int_X [P_{\hat{\xi}}(x) - Z_n(x)]^2 dx}{Q}; \quad Q = \int_X P_{\hat{\xi}}^2(x) dx, \quad (2.3)$$

получено асимптотическое приближение

$$[\hat{\delta}^{(\mathbb{L}_2(x))}(n)]^2 \sim \frac{n^{-1} \times \hat{h}^{-d}(n) \times I^d + (1/4) \times \hat{h}^4(n) \times J}{Q}; \quad (2.4)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\kappa}^2(y) dy, \quad J = \int_X \dots \int_X \sum_{l=1}^d \left[\frac{\partial^2 P_{\hat{\xi}}(x^{(1)}, \dots, x^{(d)})}{\partial (x^{(l)})^2} \right]^2 dx^{(1)} \dots dx^{(d)}. \quad (2.5)$$

Минимизация полученного приближения (2.4) величины (2.3) и выбор функции $\hat{\kappa}(y)$ из соображений минимизации величины I из (2.5) с соблюдением условий (2.2) дают оптимальное значение «коэффициента размытости» и оптимальную форму функции $\hat{\kappa}(y)$:

$$\hat{h}_{opt}(n) = \left(\frac{d \times I^d}{n \times J} \right)^{1/(d+4)}; \quad \hat{\kappa}_{opt}(y) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}} - \frac{3y^2}{20\sqrt{5}} & \text{при } |y| \leq \sqrt{5}, \\ 0 & \text{при } |y| > \sqrt{5}. \end{cases} \quad (2.6)$$

По поводу проведенной в [1] оптимизации приближения (1.1) плотности $P_{\hat{\xi}}(x)$ можно сделать следующие критические замечания. Во-первых, оптимизируется «непрерывное» приближение, а более конструктивной, как отмечалось выше, является сеточная численная аппроксимация функции $P_{\hat{\xi}}(x)$, представленная в алгоритме 1. Во-вторых, выражение (2.6) для $\hat{h}_{opt}(n)$ содержит неопределенную константу J из (2.5), приближение которой представляет собой отдельную (и весьма непростую) задачу. В-третьих, представленная здесь оптимизация приближения (1.1) связана с минимизацией асимптотического приближения верхней границы погрешности, а более объективным является следующий критерий оптимизации.

КРИТЕРИЙ 1. *То приближение функции $P_{\hat{\xi}}(x)$ лучше (оптимальнее), которое дает заданный уровень погрешности за меньшее время (с меньшими компьютерными затратами).*

Вопрос о том, насколько использование параметров (2.6) в алгоритме 1 (в сочетании с выбором шага h сетки (1.8)) соответствует критерию 1, требует отдельного подробного исследования.

Возможности конструктивного применения критерия 1 для оптимизации алгоритма 1 дают рассуждения разделов 3 и 4 данной работы, основанные на установлении соответствия между алгоритмом 1 и рандомизированным проекционно-сеточным функциональным алгоритмом (см. далее алгоритм 2), для которого разработана т.н. *теория условной оптимизации*, основанная на критерии 1.

3. Рандомизированный проекционно-сеточный функциональный алгоритм для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

В последние годы (главным образом в новосибирской школе методов Монте-Карло) развивается теория рандомизированных функциональных алгоритмов (см., например, [3–7]). Наиболее содержательные примеры применения этих алгоритмов связаны с приближением неизвестного решения $\varphi(x)$; $x \in \mathbb{R}^d$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = \int k(x', x) \varphi(x') dx' + f(x) \quad \text{или} \quad \varphi = K\varphi + f \quad (3.1)$$

на ограниченной области $X \subset \mathbb{R}^d$; здесь $k(x', x)$ (ядро интегрального оператора K) и $f(x)$ (свободный член уравнения) – заданные функции.

По аналогии с рассуждениями раздела 1 данной работы (см., в частности, соотношение (1.4)) для приближения функции $\varphi(\mathbf{x})$ используем представления классической теории численной аппроксимации функций (см., например, [2]), имеющих общий вид

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx L^{(M)}\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M w^{(i)} \chi^{(i)}(\mathbf{x})$$

для некоторого специально выбранного набора базисных функций (1.5) и коэффициентов

$$W^{(M)} = \{w^{(1)}, \dots, w^{(M)}\}, \quad (3.2)$$

определяемых как функционалы от неизвестной приближаемой функции $\varphi(\mathbf{x})$.

В рандомизированных функциональных алгоритмах коэффициенты (3.2) вычисляются приближенно методом Монте-Карло с числами испытаний n_i , т.е. $w^{(i)} \approx \tilde{w}^{(i)}(n_i)$ (в данной работе будет изучаться случай $n_1 = \dots = n_M \equiv n$) и рассматривается приближение

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx L^{(M)}\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \tilde{w}^{(i)}(n) \chi^{(i)}(\mathbf{x}).$$

В работах [8, 9] предложена новая (по сравнению с [3–7]) классификация рандомизированных функциональных алгоритмов для приближения решения уравнения (3.1): выделены *сеточные, проекционные и проекционно-сеточные алгоритмы* (тип метода определяется выбором базисных функций (1.5) и коэффициентов (3.2)). В этих же работах приведены соображения о том, почему сеточные и проекционные рандомизированные функциональные алгоритмы могут быть неэффективными (и даже нереализуемыми) при решении практически значимых задач, связанных с решением уравнений вида (3.1). Так, для теоретически привлекательного *сеточного метода зависимых испытаний* требуется гладкость ядра $k(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ интегрального оператора K , а подавляющее большинство ядер из прикладных задач содержат интегрируемые особенности (вплоть до дельта-функций) и даже не могут быть явно вычислены. *Сеточный метод сопряженных блужданий* является крайне трудоемким из-за необходимости моделирования индивидуального набора траекторий соответствующих прикладных цепей Маркова для каждого узла \mathbf{x}_i вводимой сетки (1.3) в области X . *Проекционные методы* обладают достаточно очевидной численной неустойчивостью.

Проекционно-сеточные рандомизированные функциональные алгоритмы не обладают перечисленными недостатками. Для этих алгоритмов (как и для сеточных методов) коэффициенты $w^{(i)} = w^{(i)}(\varphi^{(M)})$ из (3.2) представляют собой комбинации значений

$$\varphi^{(M)} = \{\varphi(\mathbf{x}_1), \dots, \varphi(\mathbf{x}_M)\} \quad (3.3)$$

в узлах сетки (1.3). «Проекционная» часть алгоритмов связана с особым способом приближенного вычисления значений (3.3). Выбираются финитные, одинаковые по форме для всех $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$ функции

$$K^{(M)} = \{k^{(x_1)}(\mathbf{y}), \dots, k^{(x_M)}(\mathbf{y})\} \quad (3.4)$$

(по сути это версии «ядерной» функции $k^{(x)}(\mathbf{y})$ из (1.1) для различных значений параметра \mathbf{x}) так же, как и базисные функции (1.5), связанные с сеткой (1.3), и такие, что

$$\int_X k^{(x_i)}(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \approx \varphi(\mathbf{x}_i); \quad i = 1, \dots, M \quad (3.5)$$

(это аналоги соотношений (1.10)). Далее используется то обстоятельство, что приближения (3.5) значений (3.3) представляют собой линейные функционалы от решения $\varphi(\mathbf{x})$ уравнения (3.1). Для таких функционалов строятся *основные оценщики* (или *монте-карловские оценки по столкновениям* – см., например, главу 4 учебника [5]), основанные на моделировании траекторий

$$\xi_j^{(0)}, \xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(N_j)}; \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

прикладной цепи Маркова

$$\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N)} \quad (3.7)$$

т.е. однородной цепи Маркова, обрывающейся с вероятностью единица, с начальной плотностью $\pi(\mathbf{x})$ и переходной функцией $p(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = r(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \times [1 - p^{(a)}(\mathbf{x}')]$ (здесь $r(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ – вероятностная переходная плотность, а $0 \leq p^{(a)}(\mathbf{x}') < 1$ обозначает вероятность обрыва траектории; соответственно, N – это случайный номер обрыва траектории).

АЛГОРИТМ 2 [8, 9]. Моделируя n траекторий (3.6) прикладной цепи Маркова (3.7), получаем значения

$$\tilde{\varphi}^{(x_i)}(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{N_j} Q_j^{(m)} \kappa^{(x_i)}(\xi_j^{(m)});$$

здесь случайные веса $\{Q_j^{(m)}\}$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$Q_j^{(m)} = \frac{f(\xi_j^{(0)})}{\pi(\xi_j^{(0)})}, Q_j^{(m)} = Q_j^{(m-1)} \frac{k(\xi_j^{(m-1)}, \xi_j^{(m)})}{p(\xi_j^{(m-1)}, \xi_j^{(m)})}.$$

Затем приближаем функцию $\varphi(\mathbf{x})$ по формуле вида (1.9):

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx L^{(M)} \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M w^{(i)} [\tilde{\varphi}^{(x_1)}(n), \dots, \tilde{\varphi}^{(x_M)}(n)] \chi^{(i)}(\mathbf{x}).$$

Сравнение алгоритмов 1 и 2 приводит к следующему важному выводу.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Основанный на подходах численной сеточной аппроксимации функций «ядерный» алгоритм 1 приближения вероятностной плотности $P_{\xi}(\mathbf{x})$ конструктивно совпадает с рандомизированным проекционно-сеточным функциональным алгоритмом 2 приближения решения $\varphi(\mathbf{x})$ уравнения Фредгольма второго рода (3.1).

Отличие алгоритмов 1 и 2 состоит только в разности форм монте-карловских оценок для приближенного вычисления функционалов вида (1.10) и (3.5) (что, в свою очередь, связано с определенным различием приближаемых функций $P_{\xi}(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$). Отличие также состоит в том, что в задаче приближения плотности $P_{\xi}(\mathbf{x})$ выборка $\{\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n\}$ считается заданной (при этом число выборочных значений n , как правило, фиксировано и не может быть увеличено), а для функции $\varphi(\mathbf{x})$ число n моделируемых траекторий (3.6) прикладной цепи Маркова (3.7) может варьироваться.

В связи с основным выводом замечания 1 можно сформулировать следующее соображение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для развития теории конструирования и условной оптимизации проекционно-сеточного функционального алгоритма 2 можно использовать соображения из теории «ядерных» оценок вероятностных плотностей из работы [1] (см. также раздел 2 данной работы).

В частности, для алгоритма 2 вполне целесообразно применять новое название рандомизированный «ядерный» функциональный алгоритм для приближения решения уравнения (3.1), как это сделано, например, в работах [10, 11].

Более существенными являются следующие соображения, связанные с замечанием 2.

Алгоритм 2 подробно изучен в работах [4, 7] лишь для частного случая, когда в качестве базисных функций (1.5) используются «абсолютно устойчивые» финитные функции мультилинейной аппроксимации (или аппроксимации Стренга – Фикса [12] с производящей функцией $\beta^{(1)}(u)$, являющейся сплайном первого порядка) на регулярной сетке (1.8):

$$\begin{aligned} \chi^{(i)}(\mathbf{x}) &= \beta^{(1)}\left(\frac{x^{(1)}}{h} - j_i^{(1)}\right) \times \dots \times \beta^{(1)}\left(\frac{x^{(d)}}{h} - j_i^{(d)}\right); \beta^{(1)}(u) \\ &= \begin{cases} u + 1 & \text{при } -1 \leq u \leq 0, \\ -u + 1 & \text{при } 0 \leq u \leq 1, \\ 0 & \text{при } |u| > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

При этом «ядерная» функция из соотношений (3.4), (3.5) выбирается в виде

$$\kappa^{(x)}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{h^d} & \text{при } \mathbf{y} \in \Delta^{(x)}, \\ 0 & \text{при } \mathbf{y} \notin \Delta^{(x)}, \end{cases} \quad (3.9)$$

где $\Delta^{(x)} = \{\mathbf{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(d)}): x^{(s)} - \frac{h}{2} \leq y^{(s)} \leq x^{(s)} + \frac{h}{2}; s = 1, \dots, d; \mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})\}$, т.е. в этом случае речь идет о представлении (2.1) при

$$\hat{h}(n) = h \text{ и } \hat{\kappa}(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |y| \leq 1/2, \\ 0 & \text{при } |y| > 1/2. \end{cases} \quad (3.10)$$

При этом приближения аппроксимационных коэффициентов (3.2) имеют простейший вид

$$w^{(i)}[\tilde{\varphi}^{(x_1)}(n), \dots, \tilde{\varphi}^{(x_M)}(n)] = \tilde{\varphi}^{(x_i)}(n). \quad (3.11)$$

Алгоритм 2, в котором используются функции (3.8), (3.9) и аппроксимационные коэффициенты (3.11), назван в [4–7] *многомерным аналогом метода полигона частот*.

В связи с рассуждениями раздела 2 данной статьи интересным представляется отдельное исследование алгоритма 2, включающее соображения теории условной оптимизации (см. [4–7], а также раздел 4 данной статьи), в случае, когда в соотношениях вида (3.5) используется «ядерная» функция (2.1) с «коэффициентом размытости» и функцией $\hat{\kappa}(y)$ вида (2.6) (вместо (3.10)).

4. Условная оптимизация «ядерного» алгоритма

В связи с основным выводом замечания 1 можно сформулировать и такое соображение.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для «ядерного» алгоритма 1 приближения вероятностной плотности $P_{\xi}(\mathbf{x})$ можно использовать соображения теории условной оптимизации проекционно-сеточного функционального алгоритма 2.

Общая схема условной оптимизации выглядит следующим образом (см., например, [4–7]). Ставится задача согласованного выбора параметров M и n (число узлов сетки (1.3) и выборочных значений из соотношения (1.1)) для исследуемого функционального алгоритма (например, для алгоритма 1), обеспечивающего заданный уровень $\gamma > 0$ погрешности приближения исследуемой функции (например, приближения (1.9) из алгоритма 1) при минимальных вычислительных затратах $S(M, n)$ (таким образом, предлагаемый подход вполне соответствует «объективному» критерию 1, сформулированному в разделе 2 данной статьи).

Строится верхняя граница $UP^{(\mathbb{B})}(M, n)$ погрешности алгоритма $\delta^{(\mathbb{B})}(M, n)$ для используемого нормированного функционального пространства $\mathbb{B}(X)$, зависящая от параметров M и n :

$$\delta^{(\mathbb{B})}(M, n) = \|P_{\xi} - L^{(M)}\tilde{P}_{\xi}\|_{\mathbb{B}(X)} \leq UP^{(\mathbb{B})}(M, n). \quad (4.1)$$

Эта функция двух переменных приравнивается величине γ . Из уравнения вида

$$UP^{(\mathbb{B})}(M, n) = \gamma \quad (4.2)$$

один из параметров (например, n) выражается через другой: $n = \psi(M)$. Это соотношение подставляется в выражение для затрат $S(M, n)$, которое тоже зависит от параметров M и n .

В результате получается функция $\bar{S}(M)$ одного переменного M , которая исследуется на минимум с помощью известных приемов математического или численного анализа. Найденные значения $M_{min}^{(\mathbb{B})}(\gamma) = M_{opt}^{(\mathbb{B})}(\gamma)$, $n_{opt}^{(\mathbb{B})} = \psi[M_{opt}^{(\mathbb{B})}(\gamma)]$ объявляются *условно-оптимальными параметрами* исследуемого алгоритма.

«Условность» такого способа оптимизации связана с тем, что в левой части уравнения вида (4.2) используется не сама погрешность алгоритма $\delta^{(\mathbb{B})}(M, n)$, а ее верхняя граница $UP^{(\mathbb{B})}(M, n)$. Впрочем, оценка качества того или иного алгоритма по верхней границе погрешности используется – это общее место в вычислительной математике (см., например, [2], а также раздел 2 данной работы).

При изучении погрешности $\delta^{(\mathbb{B})}(M, n)$ необходимо выбрать как соответствующее нормированное функциональное пространство $\mathbb{B}(X)$, так и вероятностный смысл выполнения неравенства вида (4.1) (ведь $\delta^{(\mathbb{B})}(M, n)$ является случайной величиной). Следуя канонам классического численного анализа (см., например, [2]), в качестве пространств $\mathbb{B}(X)$ будем рассматривать $L_2(X)$ и $C(X)$.

Для хорошо разработанного (см., например, [3–7]) L_2 -подхода рассматривается сходимость в среднем погрешности

$$\delta^{(L_2)}(M, n) = \|P_{\hat{\xi}} - L^{(M)}\tilde{P}_{\hat{\xi}}\|_{L_2(X)} = \left(\int_X [P_{\hat{\xi}}(x) - L^{(M)}\tilde{P}_{\hat{\xi}}(x)]^2 \right)^{1/2}$$

к нулю при $M, n \rightarrow \infty$ и строятся оценки сверху $UP^{(L_2)}(M, n)$ такие, что

$$[\mathbf{E}\delta^{(L_2)}(M, n)]^2 \leq UP^{(L_2)}(M, n).$$

Для C -подхода [4–7] величина

$$\delta^{(C)}(M, n) = \|P_{\hat{\xi}} - L^{(M)}\tilde{P}_{\hat{\xi}}\|_{C(X)} = \sup_{x \in X} |P_{\hat{\xi}}(x) - L^{(M)}\tilde{P}_{\hat{\xi}}(x)|$$

ограничивается сверху по вероятности:

$$\mathbf{P}[\delta^{(C)}(M, n) \leq UP^{(C)}(M, n)] > 1 - \varepsilon$$

для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Для этих двух подходов, по аналогии с рассуждениями из работ [4, 6, 7] для алгоритма 2, можно разделить погрешности приближения плотности $P_{\hat{\xi}}(x)$ на три части: детерминированную компоненту $\delta_{det}^{(\mathbb{B})}(M)$, стохастическую компоненту $\delta_{stoch}^{(\mathbb{B})}(M, n)$ и компоненту смещения $\delta_{bias}^{(\mathbb{B})}(M)$.

Можно также показать, что в случае выполнения четырех условий:

1) *используется регулярная сетка* (1.8) с шагом h ,

2) *используется численно устойчивый базис* (1.5), обеспечивающий выполнение неравенства

$$\delta_{bias}^{(C)}(M) = \|L^{(M)}P_{\hat{\xi}} - L^{(M)}\bar{P}_{\hat{\xi}}\|_{C(X)} \leq H_{Leb} \max_{i=1, \dots, M} |P_{\hat{\xi}}(x_i) - \mathbf{E}\kappa^{(x_i)}(\hat{\xi})| \quad (4.3)$$

для *константы Лебега* H_{Leb} , ненамного превосходящей единицу (или равной единице); здесь

$$L^{(M)}\bar{P}_{\hat{\xi}}(x) = \sum_{i=1}^M w^{(i)} [\mathbf{E}\kappa^{(x_1)}(\hat{\xi}), \dots, \mathbf{E}\kappa^{(x_M)}(\hat{\xi})] \chi^{(i)}(x),$$

3) *используются коэффициенты* (1.6) *простейшего вида* (1.7),

4) *используются «коэффициент размытости» и функция* $\hat{\kappa}(y)$ *вида* (3.10) *(т.е. выбирается «ядерная» функция* (3.9))

Верхние границы для компонент смещения $\delta_{bias}^{(C)}(M)$ и $\delta_{bias}^{(L_2)}(M)$ имеют второй порядок по шагу сетки h (этот шаг пропорционален величине $M^{-1/d}$). Значит, второй порядок должны иметь и верхние границы для детерминированных компонент погрешности

$\delta_{det}^{(C)}(M)$ и $\delta_{det}^{(L_2)}(M)$. Такие верхние границы для компоненты смещения и детерминированной компоненты дают базисные функции (3.8) и аппроксимационные коэффициенты (1.7) (здесь, в частности, $H_{Leb} = 1$ [4, 6]).

Заметим, что нарушение каждого из сформулированных четырех условий (в том числе, использование «коэффициента размытости» и функции $\hat{\kappa}(y)$ вида (2.6) вместо (3.10)) может существенно усложнить получение верхних границ для компонент смещения (в частности, для величины $\delta_{bias}^{(C(x))}$ из соотношения (4.3)).

Свойства устойчивости вида (4.3) для базиса (3.8) и использование аппроксимационных коэффициентов (1.7) дают возможность построить оценки сверху для стохастических компонент погрешности $\delta_{stoch}^{(C)}(M, n)$ и $\delta_{stoch}^{(L_2)}(M, n)$.

Затем, по аналогии с рассуждениями из работ [4, 7], для L_2 - и C -подходов можно реализовать описанную выше методику теории условной оптимизации и получить следующие выражения для условно-оптимальных параметров:

$$M_{opt}^{(L_2)}(\gamma) = H_1^{(L_2)} \left(\frac{d+4}{d} \right)^{d/4} \gamma^{-d/2}; \quad n_{opt}^{(L_2)}(\gamma) = H_2^{(L_2)} \left(\frac{d+4}{d} \right)^{d/4} (d+4) \gamma^{-2-d/2}; \quad (4.4)$$

$$M_{opt}^{(C)}(\gamma) = H_1^{(C)} \left[\frac{(2\nu+1)d+4}{(2\nu+1)d} \right]^{d/2} \gamma^{-d/2}; \quad n_{opt}^{(C)}(\gamma) = H_2^{(C)} \frac{[(2\nu+1)d+4]^{2+d/2}}{[(2\nu+1)d]^{d/2}} \times \\ \times \left(2 \ln M_{opt}^{(C)}(\gamma) - \ln \ln M_{opt}^{(C)}(\gamma) + H_3^{(C)} \right) \gamma^{-2-d/2} \quad (4.5)$$

для некоторых положительных констант $H_1^{(L_2)}, H_2^{(L_2)}, H_1^{(C)}, H_2^{(C)}, H_3^{(C)}$ и ν (выбор или приближение этих констант представляет собой отдельную – часто непростую – задачу [4]).

Заключение

В данной работе предложена модификация «ядерной» оценки (1.1) вероятностной плотности $P_{\hat{\xi}}(x)$, основанная на подходах теории численной аппроксимации функций и приводящая к конструктивному алгоритму 1. Проведен критический анализ критерия оптимизации «ядерных» оценок плотностей, основанного на минимизации верхней границы относительной погрешности для L_2 -подхода. Показано, что построенный «ядерный» алгоритм 1 эквивалентен рандомизированному проекционно-сеточному функциональному алгоритму 2 для приближения решения $\varphi(x)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода (3.1). В связи с этим предложено использовать критерий условной оптимизации функциональных алгоритмов, основанный на минимизации затрат $S(M, n)$ при фиксированном уровне погрешности γ , для «ядерного» алгоритма 1 и получен вид условно-оптимальных параметров (для известных L_2 - и C -подходов – см. формулы (4.4), (4.5)) для простейшего случая алгоритма 1, в котором используются базисные функции (3.8), аппроксимационные коэффициенты (1.7) и «ядерная» функция (3.9) (т.е. для аналога алгоритма метода полигона частот).

Список литературы

1. Епанечников В.А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применения. – 1969. – Т. 14. Вып. 1. – С. 156–161.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975.
3. Михайлов Г.А. Весовые методы Монте-Карло. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
4. Войтишек А.В. Дискретно-стохастические численные методы: Дис ... д-ра физ.-мат. Наук / РАН. Сиб. отд-ние, ИВМиМГ. – Новосибирск, 2001.

5. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. – М.: Изд. центр «Академия», 2006.
6. Войтишек А.В. Функциональные оценки метода Монте-Карло. – Новосибирск: НГУ, 2007.
7. Войтишек А.В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Часть VI. Вычисление значений линейных функционалов от решения интегрального уравнения второго рода. Дискретно-стохастические методы решения интегрального уравнения второго рода. – Новосибирск: НГУ, 2004.
8. Войтишек А.В. Классификация и возможности практического применения рандомизированных функциональных численных алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Математический анализ. Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2018. – Т. 155. С. 3–19.
9. Войтишек А.В. Разработка и оптимизация рандомизированных функциональных численных методов решения практически значимых интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2018. – Т. 21. № 2 (74). – С. 32–45.
10. Михайлов Г.А. Рандомизированные алгоритмы метода Монте-Карло для задач со случайными параметрами (метод «двойной рандомизации») // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2019. – Т. 22, № 2. – С. 187–200.
11. Михайлов Г.А. Улучшение многомерных рандомизированных алгоритмов метода Монте-Карло с «расщеплением» // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59, № 5. – С. 822–828.
12. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981.

*Булгакова Татьяна Евгеньевна – ст. преп. Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета; email: tatyana.bulgakova@gmail.com;
Войтишек Антон Вацлавович – д-р физ.-мат. наук, ведущ. науч. сотр. Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
проф. Новосибирского государственного университета;
email: vav@osmf.ssc.ru*

ЗАДАЧА ВЫПОЛНЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ РАБОТ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

Н. В. Герасименко

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
644099, Омск*

УДК 519.8

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10004

Рассматривается задача минимизации общего времени выполнения технологически взаимосвязанных работ единичной длительности на параллельных машинах. Задача является NP-трудной в сильном смысле. При фиксированном числе машин большим двух вычислительная сложность задачи неизвестна. В работе исследуется задача с тремя машинами. Проведен анализ смежных подзадач, сложность которых известна.

Ключевые слова: теория расписаний, общее время завершения работ, параллельные машины, частичный порядок.

Введение

Задача минимизации общего времени выполнения взаимосвязанных работ является одной из важных задач дискретной оптимизации. Имеется множество параметров: длительности работ, различные виды ресурсов, директивные сроки, частичный порядок выполнения работ и так далее. В работе [1] показано, что если ширину частичного порядка ограничить константой, то при самых общих значениях остальных параметров, задача становится полиномиально или псевдополиномиально разрешимой. С другой стороны, при произвольном частичном порядке, даже в случае единичных длительностей работ и единичных объемах потребления единственного ресурса, задача остается NP-трудной в сильном смысле [2].

Отсюда можно сделать вывод, что основная трудность решения задачи связана с видом частичного порядка. Поэтому, актуальным является исследование задачи при наличии частичного порядка и самых слабых условиях для остальных параметров. Этим условиям удовлетворяет задача $P|prec|C_{max}$, где P означает, что используется система с идентичными параллельными машинами, C_{max} – что минимизируется общее время выполнения работ, а $prec$ – наличие частичного порядка. При этом в процессе выполнения каждая работа занимает только одну машину. Таким образом, в задаче $P|prec|C_{max}$ требуется минимизировать общее время выполнения взаимосвязанных работ на параллельных машинах. Еще проще вариант задачи $P|prec, p_j = 1|C_{max}$, когда длительности работ единичные. Но даже в этом упрощенном варианте, задача NP-трудна в сильном смысле [2].

Особый интерес представляет случай, когда число машин ограничено. Известно [3], что задача $P2|prec, p_j = 1|C_{max}$ полиномиально разрешима. Сложность задачи $Pm|prec, p_j = 1|C_{max}$ неизвестна.

В настоящей работе исследуется задача $P3|prec, p_j = 1|C_{max}$. Одним из способов исследования является поиск взаимосвязей со смежными задачами. Близкой по структуре является задача разбиения на треугольники, которая является NP-трудной в сильном смысле.

В параграфе 1 приведены постановки и анализ сложности смежных задач. В параграфе 2 описана связь задачи разбиения на треугольники, задачи точного покрытия трехэлементными множествами и задачи $P3|prec, p_j = 1|C_{max}$.

1. Постановка задач

Имеется n работ единичной длительности, которые необходимо выполнить на трех параллельных идентичных машинах. Между некоторыми работами имеется отношения предшествования. Если i предшествует j , то работа j не может начать выполняться прежде, чем закончится работа i . Требуется составить расписание выполнения работ при условиях сохранения предшествования, непрерывности выполнения каждой работы, и чтобы каждая машина в любой момент времени выполняла не более одной работы. При этом срок выполнения всех работ должен быть минимальным.

Сформулируем еще две важные задачи. Первая из них – задача разбиения на треугольники. Задан граф $G = (V, U)$, число вершин которого $|V|$ делится на три, то есть $|V| = 3p$ для некоторого числа p . Существует ли такое разбиение V на p непересекающихся подмножеств V_1, V_2, \dots, V_p , содержащих по 3 элемента, что для каждого $V_i = \{v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}\}$ три ребра $\{v_{i1}, v_{i2}\}$, $\{v_{i1}, v_{i3}\}$ и $\{v_{i2}, v_{i3}\}$ принадлежат U ? Будем обозначать эту задачу (Δ).

Второй является задача точного покрытия трехэлементными множествами. Задано конечное множество X , такое, что $|X| = 3q$, и семейство C трехэлементных подмножеств множества X . Верно ли, что семейство C содержит точное покрытие множества X , то есть такое подсемейство $C' \subseteq C$, что каждый элемент из X содержится ровно в одном элементе из C' ? Обозначим эту задачу (ТП-3).

К сожалению, все попытки свести к задаче $P3|prec, p_j = 1|C_{max}$ некоторую NP-трудную задачу не увенчались успехом. В нашей работе опробован подход поиска сложного подкласса задач $P3|prec, p_j = 1|C_{max}$. Схема следующая. Формулируем задачу $P3|prec, p_j = 1|C_{max}$ (P3) в терминах задачи Δ . Сводимость это некоторая функция, которая индивидуальной задаче из P3 ставит в соответствие индивидуальную задачу из Δ . В задаче Δ получаем некоторый образ нашей задачи (рис. 1).

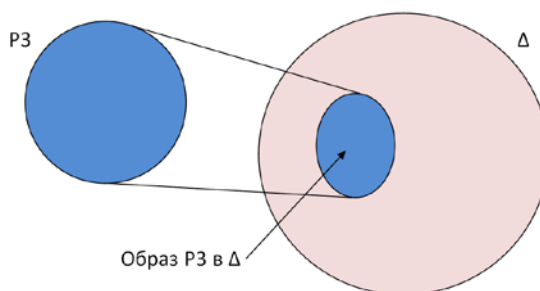
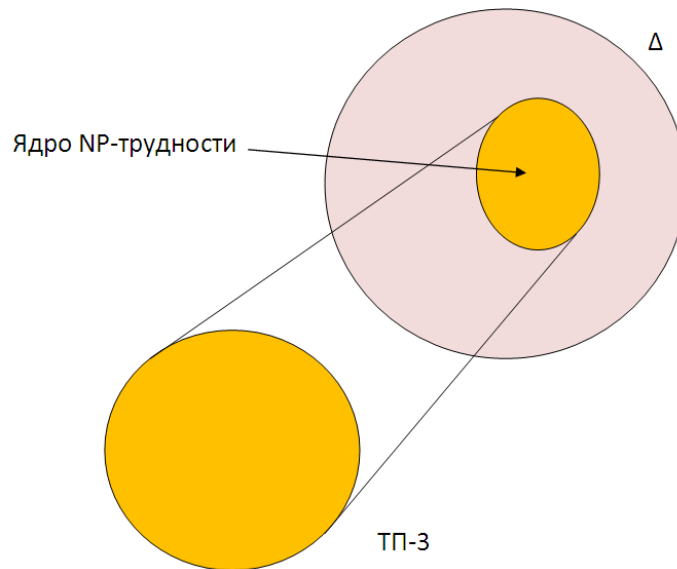


Рисунок 1: Образ задачи P3 в Δ

Теперь рассмотрим NP-трудность задачи Δ . Эта NP-трудность осуществляется сведением задачи ТП-3 к Δ [4]. Соответственно получаем образ задачи ТП-3 в множество индивидуальных задач Δ , которое мы назовем *ядром NP-трудности* (рис. 2).

Рисунок 2: Ядро NP-трудности задачи Δ

NP-трудны не все задачи Δ , но ядро это совокупность наиболее сложных задач. Если образы задачи P3 и ТП-3 в Δ пересекаются, то прообраз их пересечения даст наиболее сложные задачи P3. Это еще не доказывает NP-трудность, но позволяет выделить подкласс перспективных для исследования задач P3. Схема дана на рис. 3.

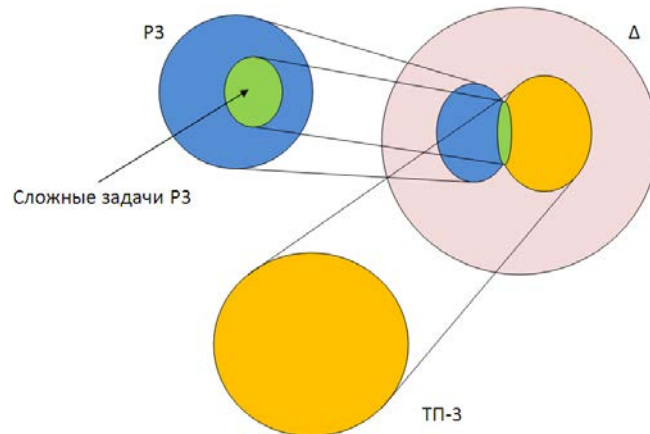


Рисунок 3: Подкласс перспективных для исследования задач P3

Выделим это подмножество индивидуальных задач. Сначала построим образ ТП-3 при сводимости к Δ .

Теорема. *Задача разбиение на треугольники NP-трудна в сильном смысле.*

Доказательство [4]. Сведем NP-трудную задачу ТП-3 к задаче Δ . Пусть множество X ($|X|=3q$) и семейство C его трехэлементных подмножеств образуют условие произвольной индивидуальной задачи из ТП-3. Построим граф $\Gamma = (V, U)$, такой, что $|V|=3p$ и для него существует искомое разбиение тогда и только тогда, когда C содержит точное покрытие.

Основными модулями рассматриваемой индивидуальной задачи из ТП-3 будут трехэлементные подмножества из C . Операция локальной замены "превращает" каждое такое подмножество $C_i = \{x_i, y_i, z_i\} \in C$ в набор E_i , состоящий из 18 ребер, который изображен на рис. 4. Таким образом, $\Gamma = (V, U)$ определяется так:

$$V = X \cup \{a_{ij} : 1 \leq j \leq 9\}, \quad U = \bigcup_{i=1}^{|C|} E_i.$$

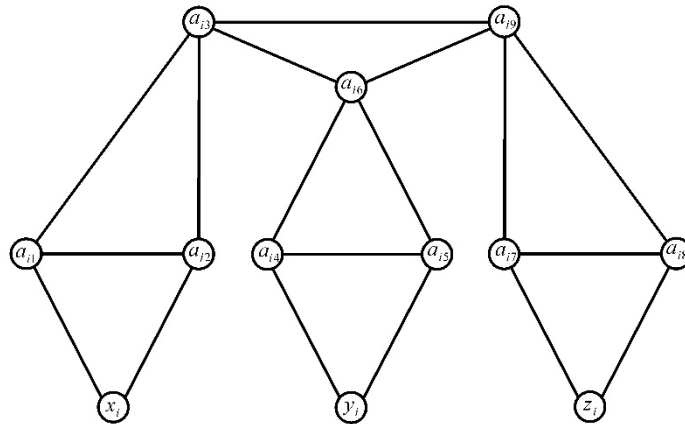


Рисунок 4: Компонента графа при сводимости задачи

Заметим, что только вершины из множества C могут быть инцидентны более чем одному множеству E_i . Отметим также, что $|V| = |X| + 9|C| = 3q + 9|C|$, так что $p = q + 3|C|$. Нетрудно видеть, что эту индивидуальную задачу Δ можно построить, отправляясь от рассматриваемой индивидуальной задачи из ТП-3, за полиномиальное время.

Если c_1, c_2, \dots, c_q трехэлементные подмножества из C , которые образуют точное покрытие X , то соответствующее разбиение $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_p$ множества V определяется следующим образом. Если $c_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ есть элемент точного покрытия, то из множества E_i выбираются следующие подмножества: $\{a_{i1}, a_{i2}, x_i\}$, $\{a_{i4}, a_{i5}, y_i\}$, $\{a_{i7}, a_{i8}, z_i\}$, $\{a_{i3}, a_{i6}, a_{i9}\}$, а если c_i не является элементом точного покрытия, то из E_i выбираются подмножества: $\{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}\}$, $\{a_{i4}, a_{i5}, a_{i6}\}$, $\{a_{i7}, a_{i8}, a_{i9}\}$. Такой выбор подмножеств обеспечивает, что каждый элемент из X содержится ровно в одном трехвершинном подмножестве рассматриваемого разбиения.

Обратно, если $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_p$ произвольное разбиение графа G на треугольники, то соответствующее точное покрытие получается, если выбрать те $c_i \in C$, для которых $\{a_{i3}, a_{i6}, a_{i9}\} = V_j$ при некотором $j, 1 \leq j \leq p$. Непосредственная проверка того, что два построенных разбиения обладают всеми нужными свойствами тривиальна.

2. Связь задачи для трех машин с задачами разбиения на треугольники и точного покрытия трехэлементными множествами

Сформулируем задачу $P3|prec, p_j = 1|C_{max}$ как задачу распознавания. На трех параллельных машинах требуется выполнить n работ единичной длительности, причем $|n| = k$ для некоторого числа k . На множестве работ задано отношение предшествования. Существует ли расписание выполнения работ длины k при условии сохранения отношения предшествования? Заметим, что если существует расписание длины k , то в каждый момент времени выполняются три независимые работы. Таким образом, все работы разбиваются на тройки. Похожие задачи, связанные с выбором троек, рассмотрены в предыдущем параграфе. Важно исследовать связь между этими задачами.

Введем следующее соответствие между множеством всех частичных порядков и множеством неориентированных графов. Частичный порядок будем задавать графом $G = (V, E)$, где V - множество вершин, а E - множество дуг. Причем G не содержит контуров. Сопоставим частичному порядку неориентированный граф $\Gamma = (V, U)$, по следующему правилу. Множества вершин G и Γ совпадают. Если в G вершины i и j зависимы (существует путь из одной вершины в другую), то ребро $(i, j) \notin U$. Если вершины i и j в G независимы, то включаем ребро (i, j) в U . То есть, $(i, j) \in U$ тогда, и только тогда, когда $(i, j) \in U$ независимы в частичном порядке G . Пример такого сведения изображен на рис. 5.

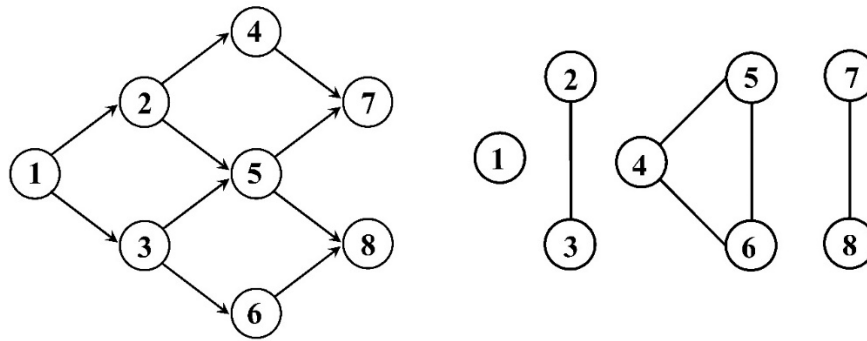


Рисунок 5: Пример частичного порядка $G = (V, E)$ и соответствующего ему графа $\Gamma = (V, U)$

Утверждение 2.1. Если для графа $G = (V, E)$ существует решение задачи $P3|prec, p_j = 1|C_{max}$ со значением целевой функции $C_{max} = k$, то в графе Γ существует разбиение на треугольники.

Доказательство. Действительно, если $C_{max} = k$, то все уровни заполнены и в каждой тройке (на одном уровне) работы независимы. Но для независимых работ в Γ существуют ребра и, значит существует соответствующий треугольник. Следовательно, получаем что при $C_{max} = k$ в Γ существует разбиение на треугольники.

Обратное утверждение, что если в Γ существует разбиение на треугольники, то в задаче $P3|prec, p_j = 1|C_{max}$ существует решение со значением целевой функции $C_{max} = k$ показать или опровергнуть пока не удалось. Если взять разбиение на треугольники, то в графе G соответствующие тройки работ будут независимы и мы можем их уложить на одном уровне. Но требуется дополнительная проверка соблюдения частичного порядка выполнения работ разных троек.

Каждому частичному порядку G сопоставим граф Γ . Тогда множеству всех частичных порядков соответствует некоторое множество неориентированных графов. Очень важным является вопрос, совпадает ли оно с множеством всех неориентированных графов. Если это так, то задача $P3|prec, p_j = 1|C_{max}$ и задача разбиение на треугольники сводятся между собой. К сожалению, это не так. Покажем это.

Утверждение 2.2. К графу $C5$ (рис. 6) не сводится ни один частичный порядок.

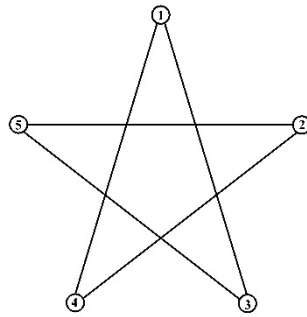


Рисунок 6: Граф C_5 , для которого не существует соответствующего частичного порядка

Доказательство. Вершины графа Γ и работы в G однозначно соответствуют друг другу. Поэтому работы будем называть по номеру вершин в графе Γ . Работы (1) и (2) зависимы. Без ограничения общности, предположим, что раньше выполняется работа под номером (1) (обратный случай симметричен). Работы (3) и (2) также зависимы, но (1) и (3) не являются зависимыми, следовательно, возможен только один случай: работы под номерами (1) и (3) предшествуют работе (2), и между собой не связаны (рис. 7).

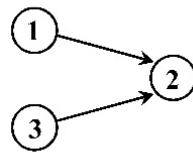


Рисунок 7: Взаимное расположение работ (1), (2) и (3)

Далее, работы (3) и (4) зависимы. Если (4)-я будет предшествовать работе (3), то работы (4) и (2) должны быть также зависимыми, что не так, следовательно возможен только один вариант, (3)-я предшествует (4)-й и независима с работами (1) и (2) (рис. 8).

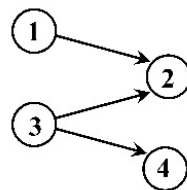


Рисунок 8: Взаимное расположение работ (1), (2), (3) и (4)

Работа (5) зависима с работами (1) и (4), но работы (1) и (4) в свою очередь являются взаимно независимыми. Следовательно, возможны два варианта:

1. Обе работы, (1) и (4), предшествуют (5)-й, тогда (3)-я становится зависимой с работой (5), что не так (рис. 9).

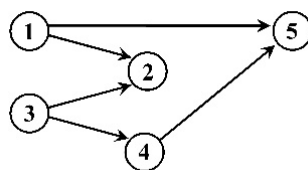


Рисунок 9: Первый вариант расположение работы (5)

2. Работа (5) предшествует и (1)-й, и (4)-й работам, тогда получаем, что (5)-я и (2)-я должны быть зависимыми, что также не является правдой (рис. 10)

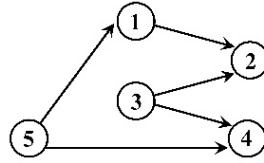


Рисунок 10: Второй вариант расположения работы (5)

Итак, получили, что к графу $C5$ (рис. 6) не сводится ни один частичный порядок.

Важный вопрос: Содержит ли образ множества частичных порядков NP-трудную массовую подзадачу Δ ? Если содержит, то P3 тоже является NP-трудной.

Для ответа на этот вопрос рассмотрим доказательство NP-трудности задачи Δ . Может оказаться, что семейство NP-трудных задач, Δ полученных в результате сведения, пересекается с образом множества частичных порядков. Тогда это влечет NP-трудность нашей задачи.

В данной работе удалось показать, что это не так. Для подграфа, изображенного на рисунке 6 нет соответствующего частичного порядка. Это означает, что подкласс заведомо трудных задач Δ не содержит задачи, к которым сводится частичный порядок. Покажем это.

Утверждение 2.3. Массовая подзадача, возникающая при сведении покрытия трехэлементными множествами к задаче разбиения на треугольники не пересекается с образом множества всех частичных порядков.

Доказательство. Рассмотрим подграф графа, изображенного на рис. 4 (рис. 11).

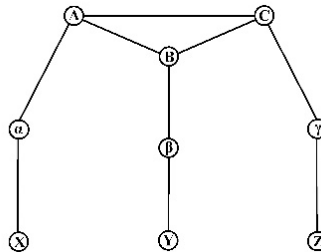


Рисунок 11: Подграф графа G

Работы A , B и C независимы. Без ограничения общности, в силу симметричности, можно считать, что X , Y и Z связаны следующим отношением предшествования (рис. 12).



Рисунок 12. Зависимость работ X , Y и Z

α , β и γ также образуют цепь, но порядок работ в ней не определен. Рассмотрим множества работ $\{X, Y, Z\}$ и $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Необходимо ориентировать дуги в следующем подграфе (рис. 13).

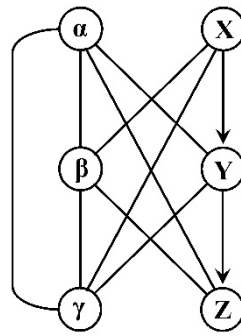


Рисунок 13: Связь работ множества $\{X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma\}$

Пары $\{X, \alpha\}$, $\{Y, \beta\}$ и $\{Z, \gamma\}$ должны быть независимы. При попытке ориентировать дуги, получаем следующее:

- | | |
|---|--|
| $X \rightarrow \gamma$, так как иначе $\gamma \rightarrow Z$; | $Y \rightarrow \gamma$, так как иначе $\gamma \rightarrow Z$; |
| $X \rightarrow \beta$, так как иначе $\beta \rightarrow Y$; | $\alpha \rightarrow Y$, так как иначе $X \rightarrow \alpha$; |
| $\alpha \rightarrow Z$, так как иначе $X \rightarrow \alpha$; | $\beta \rightarrow Z$, так как иначе $Y \rightarrow \beta$; |
| $\beta \rightarrow \gamma$, так как иначе $\gamma \rightarrow Z$; | $\alpha \rightarrow \beta$, так как иначе $\beta \rightarrow Y$. |

При удалении транзитивных дуг, получаем следующий частичный порядок (рис. 14)

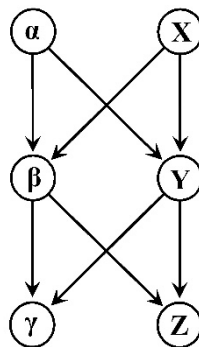
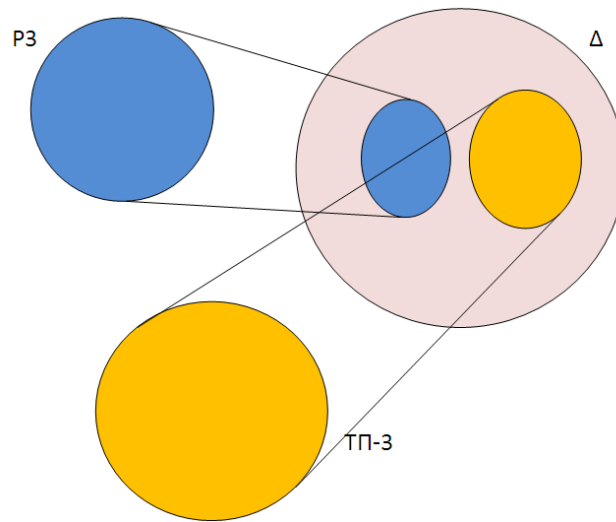


Рисунок 14: Итоговый частичный порядок работ $\{X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma\}$

Теперь рассмотрим работы A , B и C . Они независимы. Работа A связана с работой β . Возможно два случая: если $\beta \rightarrow A$, то из полученного частичного порядка (рис. 14) получим $\alpha \rightarrow A$, что противоречит исходному графу (рис. 11). Значит $A \rightarrow \beta$. С другой стороны, работа C связана с работой β . Здесь так же возможно два случая: если $C \rightarrow \beta$, то из полученного частичного порядка (рис. 14) $C \rightarrow \gamma$, что противоречит исходному графу (рис. 11). Значит $\beta \rightarrow C$, а это в свою очередь противоречит тому, что $A \rightarrow \beta$, так как работы A и C должны быть независимыми. Получили что для подграфа графа, изображенного на рисунке 4, не существует соответствующего частичного порядка. Следовательно, и для всего графа так же не существует частичного порядка. Утверждение доказано.

Итак, образы РЗ и ТП-3 в \mathcal{A} не пересекаются, что проиллюстрировано на рисунке 15. С помощью такого подхода не удалось выделить семейство сложных примеров в РЗ, что косвенно говорит о том, что задача не является NP-трудной.

Рисунок 15: Образ задач P3 и TP-3 в Δ

Заключение

Исследуется задача минимизации общего времени выполнения технологически взаимосвязанных работ единичной длительности на трех идентичных параллельных машинах, вычислительная сложность которой неизвестна. Проведен анализ ее взаимосвязи с близкими по постановке NP-трудными задачами разбиения на треугольники и покрытия трехэлементными множествами. Показано, что подмножество наиболее сложных задач разбиения на треугольники и образ задачи с тремя машинами не пересекаются между собой.

Список литературы

1. Сервах В.В. Эффективно разрешимый случай задачи календарного планирования с возобновимыми ресурсами // Дискретный анализ и исследование операций, Сер.2, 2000. – Т. 7, N. 1. – С. 75-82.
2. Ulman J.D. NP-complete scheduling problems. J.Comput. And Syst.Sci., 1975. – V. 10, N 3 – P. 384-393.
3. Goffman E.G., Graham R.L. Optimal scheduling for two processor systems. Acta Informal. 1972. – 1(3) – P. 200-213.
4. Rinnooy Kan, Lenstra J.K. Complexity of scheduling under precedence constraints // Oper. Res. 1978. – 26. – P. 22-35.

*Герасименко Наталья Вадимовна – аспирант
Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
email: nati@fto.com.ru*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В ВОЗДУШНЫХ ПОЛОСТЯХ

М. Ж. Калбекова¹, А. Ы. Курбаналиев¹, А. Ж. Жайнаков²

¹Ошский государственный университет
723500, г. Ош, Кыргызстан

²Институт горного дела и горных технологий им. У. И. Асаналиева Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова
720044, Бишкек, Кыргызстан

УДК 536.24

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10005

В данной работе представлены результаты численного моделирования естественной конвекции в открытой воздушной полости как для стационарного так и для нестационарного потока в двумерной постановке с использованием открытого пакета OpenFOAM 6. Левая вертикальная стенка полости нагрета до определенной температуры, а правая вертикальная стенка представляет собой открытую границу. Верхняя и нижняя границы теплоизолированы.

Ключевые слова: Естественная конвекция, воздушная полость, числа Рэлея и Прандтля, OpenFOAM

Введение

Естественная конвекция в полостях является важным режимом теплообмена во многих инженерных системах [1-4]. В последние годы этому вопросу уделяется значительное внимание благодаря его практической значимости во многих областях применения, таких как горизонтальная транспортировка в водоемах, термосифонные системы — тепловые насосы, водонагреватели, бойлеры, печи, в которых используется метод пассивного теплообмена, основанный на естественной конвекции, нагревание и охлаждение контейнеров в пищевой промышленности, охлаждение активной зоны реактора при производстве атомной энергии. Понимание основных характеристик течения такого класса инженерных приложений имеет важное значение для инженеров и архитекторов для проектирования систем вентиляции, охлаждения и отопления для различных сооружений с низким уровнем потребления энергии [5]. Большая часть предшествующей работы по конвекции полости была связана с установившимися ситуациями. Тем не менее во многих областях применения, перечисленных выше, конвекционные потоки могут находиться в переходном или неустойчивом состоянии. Признавая этот факт, некоторые из недавних работ в этой области были сосредоточены на природе потока в переходном режиме и на способе, которым этот поток развивается в окончательное устойчивое состояние.

Одной из основных конфигураций потока для теплопередачи и механики жидкости является переход от стационарного к нестационарному течению в дифференциально нагретой вертикальной полости. В работе [6] было исследовано переходные процессы, возникающие, когда температура на противоположных двух вертикальных боковых стенках мгновенно увеличивается и уменьшается. Экспериментальное исследование переходной естественной конвекции в воздушной полости проведено в [7] и было обнаружено, что при определенных режимах потока существует колебательный подход к конечным установившимся условиям.

Естественной конвекции в полости с открытой вертикальной стороной уделялось гораздо меньше внимания, возможно, из-за сложности работы с открытой стороной, хотя она имеет широкий спектр промышленных применений и воплощает большую часть фундаментальной механики жидкости в закрытой полости [8]. Некоторыми областями применения являются солнечные тепловые приемники, пожары в зданиях, электронное охлаждение и энергосберегающие бытовые холодильники. В [9] проведен экспериментальный и численный анализ полости с боковым отверстием с отношением длины к высоте 0,143 для чисел Рэлея в диапазоне от 1×10^6 до 1×10^7 . В результате было обнаружено, что скорость теплопередачи приближалась к скорости для вертикальной нагретой плоской пластины, которая имеет аналогичный поток рядом с нагретой стенкой.

В настоящем исследовании исследуется естественная конвекция в двумерной квадратной открытой полости как для переходного, так и для стационарного потока. Полость имеет одну нагретую вертикальную стенку, обращенную к вертикальному отверстию, с изоляцией сверху и снизу. Численные решения нестационарных уравнений Навье – Стокса на структурированной сетке получены методом контрольных объемов использованием неявной схемы с точностью до времени второго порядка. Для этой цели был использован решатель `buoyantBoussinesqPimpleFoam` пакета `OpenFOAM 6` [10].

При проведении расчетов число Рэлея варьировалось от $Ra = 1 \times 10^5$ до $Ra = 2 \times 10^9$ при постоянном значении числа Прандтля $R\tau$, равным 0,7. Целью данного исследования является изучение процесса перехода от стационарного к нестационарному потоку и влияния числа Рэлея на структуры потока.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Геометрия рассматриваемой задачи и принятая система координат приведены на рис. 1. Левая граница полости нагрета до температуры $T_h = 373$ °С, а температура окружающей среды равна $T_a = 300$ °С. Нижняя и верхняя стенки полости теплоизолированы, а высота квадратной полости равна $H = 1$ м. Коэффициент кинематической вязкости воздуха $\nu = 1.7 \times 10^{-5} \frac{m^2}{c}$, а коэффициент теплового расширения $\beta = 3.665 \times 10^{-3} K^{-1}$.

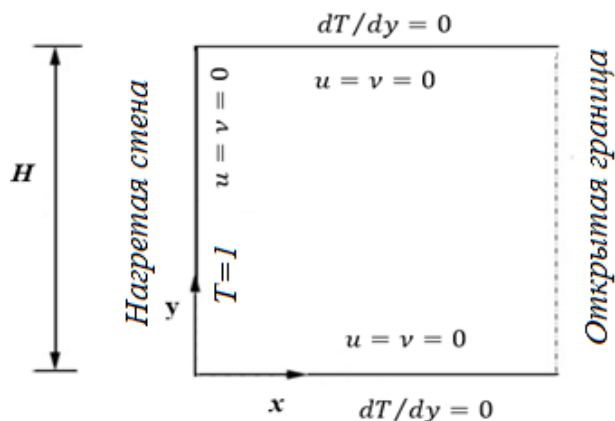


Рисунок 1: Геометрия задачи и граничные условия

Исходя из вышеуказанных данных в качестве масштабов длины L_r , температуры T_r , времени t_r и скорости u_r возьмём следующие величины соответственно:

$$L_r = H; T_r = \Delta T; t_r = \frac{H^2}{\nu}; u_r = \frac{\nu}{H};$$

где $\Delta T = T_h - T_a = 73$ °С.

Тогда систему уравнений описывающую несжимаемый поток воздуха можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{Ra}{Pr} T \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

где t – время, T – температура, u – составляющая скорости в направлении x , а v – составляющая скорости в направлении y . При этом, числа Рэля и Прандтля определяются соответственно следующим образом: $Ra = \frac{g\beta\Delta T H^3}{\nu\kappa}$; $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$; Здесь g – ускорение силы тяжести, β – коэффициент теплового расширения, κ – коэффициент теплопроводности. Число Рэля рассчитывается по высоте нагретой стенки и разности температур между нагретой стенки и окружающей среды.

2. Методы дискретизации основных уравнений

Для получения численного решения систем уравнений (1-4) необходимо произвести процедуру дискретизации, целью которой является преобразование исходных дифференциальных уравнений в частных производных в систему линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы определяет некоторый набор величин, имеющие определенное отношение к решению исходных дифференциальных уравнений в некоторых точках пространства и времени. Общая процедура дискретизации состоит из двух этапов: пространственная дискретизация и дискретизация уравнений.

Пространственная дискретизация осуществляется на основе метода контрольных объемов [11, с. 24]. Согласно основной идее этого метода, пространственная дискретизация задачи получается путем разбиения расчетной области на конечное число не пересекающихся объемов. В центре каждого контрольного объема находится только одна точка «привязки» численного решения. Система дифференциальных уравнений линеаризуется и дискретизируется для каждого контрольного объема. Для вычисления объемных интегралов по контрольному объему использовалась общая процедура Гаусса, согласно которой интеграл по объему представляется через интеграл по поверхности ячейки, а значение функции на поверхности интерполируется из значений функций в центроидах соседних ячеек.

В качестве схемы дискретизации производной по времени использовалась явная схема Эйлера первого порядка с разностями назад.

3. Граничные и начальные условия

Первоначально воздух в полости находится в состоянии покоя и изотермична с $T = T_a$, а в момент времени $t = 0$ стенка с левой стороны мгновенно нагревается до $T = T_h$. Из-за условия прилипания, все компоненты на твердых стенках должны быть равны нулю. На теплоизолированных стенках градиент температуры по нормали должен быть равен нулю. На открытой границе градиент по нормали всех компонент скорости тоже равен нулю. Граничное условие для температуры зависит от значения скорости u : если поток воздуха входит в расчетную область, то значение температуры на открытой границе должен быть

равен T_a . А если поток выходит из расчетной области, то градиент температуры по нормали должен быть равен нулю. Таким образом аналитически приведенные граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u = v = 0, T = T_a \text{ для всех } x \text{ и } y \text{ при } t < 0; \\ u = v = 0 \text{ в при } x = 0; y = 0; y = 1; \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ в } x = 1; \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0; y = 1; \\ T = T_a \text{ когда } u < 0 \text{ в } x = 1; \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ когда } u > 0 \text{ в } x = 1; \\ T = T_h \text{ при } x = 0 \text{ для } t \geq 0. \end{aligned}$$

4. Методы решения основных уравнений

Для решения связанного расчета поля скорости и давления использовалась процедура PIMPLE с числом корректоров 3 [12, стр.178]. Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений использовались итерационные решатели PCG [12, стр.107] и PBiCG метод (би-)сопряженных градиентов с предобуславливанием [12, стр.110]. В качестве предобуславливателя были выбраны процедуры DIC предобуславливатель основанный на упрощенной схеме неполной факторизации Холецкого и DILU предобуславливатель основанный на упрощенной неполной LU факторизации. Более детальную информацию о граничных и начальных условиях, методах дискретизации и решения систем алгебраических уравнений можно найти в [11].

5. Результаты численных расчетов

Ниже представлены результаты численных расчетов для двух значений числа Рэлея: 1×10^5 и 2×10^9 . Во всех расчетах число Прандтля было равно 0,7. Образование пограничного слоя вблизи нагретой вертикальной стенки можно видеть из рис. 2, где представлены поля распределения сектора скорости и температуры для стационарного случая при $Ra = 1 \times 10^5$.

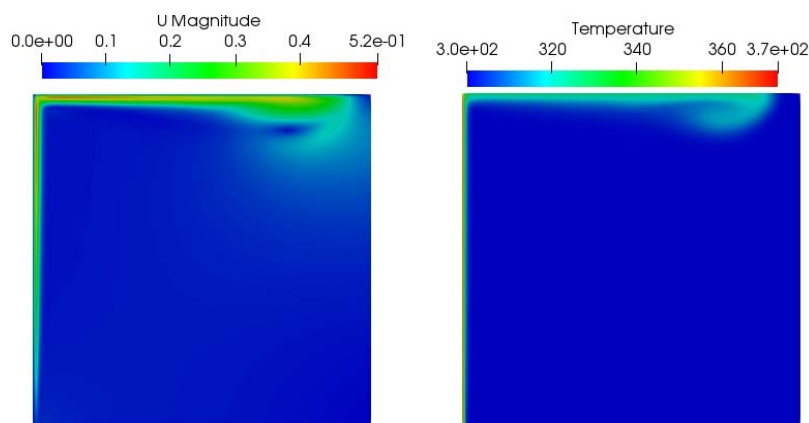


Рисунок 2: Поля скорости и температуры для $Ra = 1 \times 10^5$

Изолинии скорости и температуры потока воздуха для чисел Рэлея $Ra = 1 \times 10^5$ и $Ra = 2 \times 10^9$ представлены на рис. 3. и рис. 4 соответственно. Вблизи нагретой стенки, как сказано выше, образуется тонкий пограничный слой, куда вовлекается более холодный воздух из нижней части полости, а также воздух поступающий в полость через открытую правую

границу. По мере движения вверх вовлечённый холодный воздух нагревается. По достижению верхней границы нагретый воздух двигается в сторону открытой границы, через которую выходит в окружающую среду.

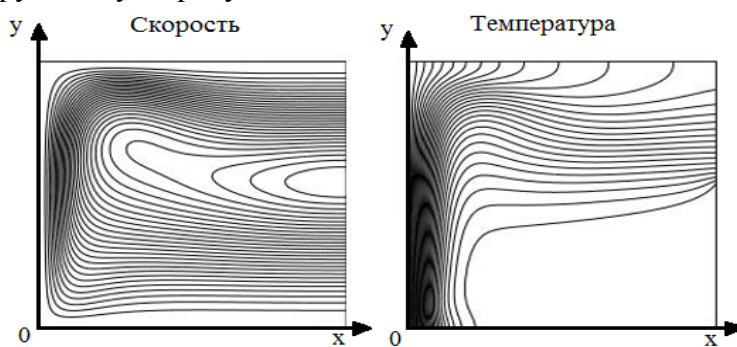


Рисунок 3: Изолинии скорости и температуры для $Ra = 1 \times 10^5$

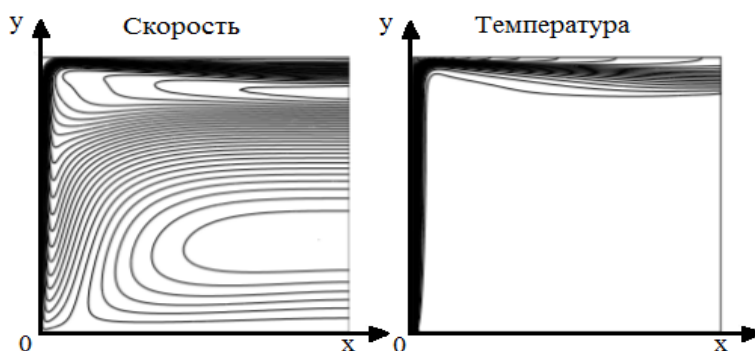


Рисунок 4: Изолинии скорости и температуры для $Ra = 2 \times 10^8$

На рис. 5 представлены изолинии скорости для нестационарного потока при различных моментах времени для числа Рэлея равным 1×10^8 .

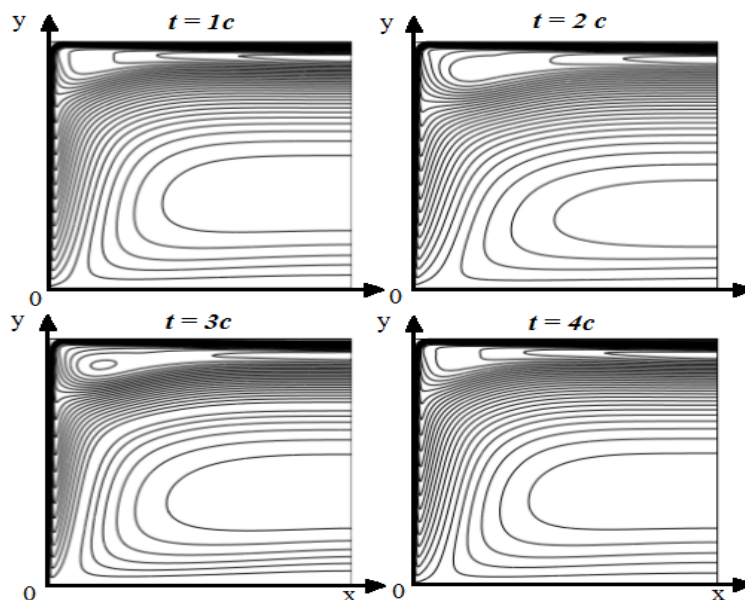


Рисунок 5: Изолинии скорости при различных моментах времени для $Ra = 1 \times 10^8$

Заключение

Рассмотрено стационарное и нестационарное движение воздуха в двумерной полости с одной вертикальной нагретой стенкой и открытой границей. Численные расчеты проведены с использованием решателя `buoyantBoussinesqPimpleFoam` пакета `OpenFOAM`. Результаты

представлены для чисел Рэлея, варьирующихся от 1×10^5 до 2×10^9 , с числом Прандтля, равным 0,7 для всех расчетов. Полностью развитый поток устойчив при низком числе Рэлея и становится неустойчивым при достаточно высоком числе Рэлея. В структуре потока преобладает естественный конвекционный пограничный слой на горячей стенке и гравитационное проникновение под верхней границей.

Список литературы

1. Быстров Ю. А., Исаев С. А., Кудрявцев Н. А., Леонтьев А. И. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб: учебное пособие / Быстров Ю. А., Исаев С. А., Кудрявцев Н. А., Леонтьев А. И. СПб.: Судостроение, 2005.
2. Терехов В. И., Экаид А. Л. Трехмерная ламинарная конвекция внутри параллелепипеда с нагревом боковых стенок // Теплофиз. высоких темп. 2011. Т. 49, № 6. С. 905–911.
3. В.И. Терехов, С.В. Калинина, К.А. Шаров. Конвективный теплообмен при натекании кольцевой струи на плоскую преграду// Теплофизика высоких температур. 2018, Т. 56, № 2, с. 229–234, doi.10.7868/S0040364418020096.
4. Обухов А. Г., Сорокина Е. М. Численное моделирование трёхмерных нестационарных конвективных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа: учеб. пособ. / А. Г. Обухов, Е. М. Сорокина. М.: Изд. дом Академии Естествознания, 2017. 94с.
5. Short C.A., Cook M., Lomas K. J. Delivery and performance of a low-energy ventilation and cooling strategy', Building Research and Information. 2009, 37 (1), pp. 1-30. <http://dx.doi.org/10.1080/09613210802607841>.
6. J. C. Patterson, J. Imberger. Unsteady natural convection in a rectangular cavity. Int. J. of Fluid Mech., 100, 65-86, 1980.
7. G. N. Ivey. Experiments on transient natural convection in a cavity. J. of Fluid Mech., 144, 389-401, 1984.
8. A. Javam, S. W. Armfield. Stability and transition of Stratified natural convection flow in open cavities. J. Fluid Mech. 445, 285-303, 2001.
9. Y. L. Chan, C. L. Tien. A numerical Study of two dimensional laminar natural convection in shallow open cavities. Int. J. of Heat and mass trans., 28, 603-612, 1985.
10. OpenFOAM Foundation. 2018. [Electron. resource]. <https://openfoam.org/> [Accessed: 2019-03-30].
11. S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publ. Corp., New York, 1980. <https://doi.org/10.1002/cite.330530323>.
12. H. Ferziger, M. Peric, Computational Methods for Fluid Dynamics. 3rd Edition. Springer Verlag, Berlin, 2002. DOI: 10.1007/978-3-642-56026-2.

Калбекова Махбурат Жамиитбековна – аспирант Ошского государственного университета; email: mkalbekova@list.ru ;

Курбаналиев Абдикерим Ырысбаевич – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой Ошского государственного университета; email: kurbanaliev@rambler.ru;

Жайнаков Аманбек Жайнакович – акад. Национальной академии наук Кыргызской Республики, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой Института горного дела и горных технологий им. У. И. Асаналиева Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова; email: jainakov-41@mail.ru .

РОЛЬ МОДЕЛИ ТИПИЗИРОВАННОГО АТРИБУТНОГО РАЗГРАНИЧЕНИЯ ДОСТУПА В ВЫПОЛНЕНИИ ЗАДАЧ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

М. Н. Калимолдаев, Р. Г. Бияшев, О. А. Рог

*Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК
050000, Алматы, Республика Казахстан*

УДК 004.94.056.53

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10006

Выделены общие свойства, которыми должны обладать модели разграничения доступа для обеспечения безопасного использования разделяемых ресурсов в локальных и глобальных вычислительных средах – 1) универсальности, 2) гибкости, 3) удобства администрирования. Перечислены основные задачи, требующие решения при определении политик разграничения доступа и конструировании соответствующих им моделей, а именно 1) задача точной идентификации сущностей, 2) задача обеспечения возможностей динамического конструирования политик, а также 3) задача использования множественных политик в рамках одной системы. Приведено общее описание модели типизированного атрибутного разграничения доступа (ТАРД). Показано, что она отвечает поставленным требованиям и служит таким образом гарантией безопасности обеспечиваемого ею разграничения доступа.

Ключевые слова: атрибутное разграничение доступа (ABAC), типизированное атрибутное разграничение доступа (ТАРД), Дискреционное разграничение доступа (DAC), Мандатное разграничение доступа (MAC), Ролевое разграничение доступа (RBAC), политика разграничения доступа, язык спецификации, моделирование.

Введение. Значение разграничения доступа для защиты информации. Область применения разграничения доступа

Методы предоставления доступа к информации в вычислительных средах становятся сервисно-ориентированными, что позволяет эксплуатировать одни и те же ресурсы в режиме совместного использования и требуют обеспечения их защиты путем организации разграничения доступа на основе общих правил, оформляемых в виде политик разграничения доступа, которые определяют доступ различных категорий пользователей к ресурсам разных видов согласно предоставленным полномочиям с одновременным запретом несанкционированного доступа.

Подавляющее большинство приложений снабжаются средствами контроля доступа в той или иной форме. Системы разграничения доступа являются важнейшими и наиболее подверженными рискам компонентами систем защиты.

Актуальность проблемы защиты, и, следовательно, требования к политикам разграничения доступа растут по мере увеличения объемов хранимых данных и роста сложности программного обеспечения для их обработки.

В крупномасштабных системах возникает необходимость идентификации ресурсов и пользователей наборами характеристик, требующих оценки для принятия решения о предоставлении доступа субъектов к объектам.

1. Основные модели разграничения доступа. Задачи, требующие решения при разработке новых моделей.

С начала 1970-х годов было разработано много моделей, основными из которых являются модели дискреционного разграничения доступа DAC (Discretionary Access Control),

мандатного разграничения доступа MAC (Mandatory Access Control) и ролевого разграничения доступа RBAC (Role Based Access Control), которые недостаточно обеспечивают безопасность защищаемых ими информационных ресурсов [1-3].

Задача идентификации сущностей.

Задачи идентификации сущностей в этих моделях выполняются путем присвоения субъектам и объектам уникальных имен, ввиду чего модели называют идентификаторными. Доступ субъекта к объекту осуществляется на основе проверки имен или приписанных им ролей.

Основным недостатком данных моделей является то, что они не учитывают дополнительных параметров разграничения доступа, что ведет к «грубому» разграничению доступа («coarse-grained access control») и служит причиной появления «избыточности прав доступа» у пользователей. Возникает необходимость решать вопросы идентификации путем обеспечения наименований, отражающих все характеристики сущностей.

Применение интегрированных политик разграничения доступа.

Следующим недостатком является недостаток гибкости. Единственной политики безопасности, предоставляемой традиционными моделями DAC, MAC, RBAC в автономных приложениях, недостаточно для защиты данных в сложных системах, требующих интегрированных политик разграничения доступа для одновременного выполнения различных критериев защиты. Отмечается необходимость введения новой парадигмы – «множественной политики», означающей, что в системе должна быть предусмотрена возможность применения разных политик авторизации в зависимости от требований безопасности конкретной среды.

Для этого система должна обладать средствами конструирования различных политик без реконфигурации самой системы, что позволяет создавать и применять политики для разграничения доступа по различным признакам, делая защиту многокритериальной.

Наличие средств администрирования.

Как правило, традиционные модели не содержат средств администрирования полномочий. В широкомасштабных системах управление правами большого числа пользователей и машин становится слишком сложным и подверженным ошибкам.

2. Направления исследований в области создания новых моделей. ABAC

Для решения проблем был предложен атрибутивный метод разграничения доступа (Attribute Based Access Control, ABAC) [4-6, 14]. Его основу составляет безидентификаторный подход, который заключается в обозначении субъектов и объектов наборами атрибутов и позволяющий принимать решение по управлению доступом без предварительного знания субъектов или их отношения к поставщику услуг. Политика авторизации предоставляет группам пользователей определенные виды доступа к заданным объектам на основе оценки значений их атрибутов.

Преимущество ABAC состоит в том, что оно позволяет создавать политики доступа на основе атрибутов пользователей и объектов, а не назначать роли, права собственности или метки безопасности вручную системным администратором. Это упрощает администрирование в сложных системах с большим числом пользователей, устраняя необходимость ручного вмешательства при авторизации, а также создавая возможность автоматизации решения по управлению доступом для удаленных пользователей из других доменов.

Система именования сущностей атрибутами обеспечивает «точное» разграничение доступа («fine-grained access control»), не допуская избыточных прав доступа.

Языки спецификации моделей ABAC дают гибкость и выразительную мощь описаниям политик безопасности. При этом многие из них разрешают моделировать традиционные методы разграничения доступа – DAC, MAC, RBAC.

За последнее время было разработано множество АВАС-моделей, как базовых, так и специализированных. Их объединяет то, что они могут рассматриваться в качестве основополагающих моделей нового направления защиты, способных решать поставленные задачи.

Преимущество данного подхода для представления атрибутивных политик разграничения доступа заключается в его простоте и легкости использования. Создание новых правил авторизации не представляет трудностей, так как не включает дополнительных расходов, требуемых, например, для инжиниринга ролей в RBAC. Эти правила способны гибко и в сжатой форме описывать даже сложные политики.

С другой стороны, создание выразительных вычислительных языков для спецификации атрибутивных правил разграничения доступа делает задачи вычисления значений разнородных атрибутов в процессе конструирования и выполнения политик NP-полными или даже неразрешимыми, что служит, вместе с отсутствием формальных определений и сложностью администрирования, главным препятствием широкому применению моделей АВАС.

3. Типизированное атрибутивное разграничение доступа

Авторами ведутся работы по созданию новых моделей разграничения доступа, обеспечивающих надежное совместное использование информационных ресурсов и отвечающих требованиям универсальности и гибкости управления безопасностью [7-14].

Создаваемые модели призваны решать задачи:

- идентификации сущностей, исключающей избыточность прав доступа;
- обеспечения возможностей динамического конструирования политик,
- использования множественных политик в рамках одной системы.

Создано описание и формальное представление разрабатываемого метода и модели типизированного атрибутивного разграничения доступа (ТАРД).

Модель ТАРД принадлежит классу моделей АВАС, но, в отличие от АВАС, атрибутам безопасности сущностей ТАРД приписываются определенные типы. Она может быть отнесена к разряду моделей разграничения доступа общего назначения, основанных на логических формулах.

Каждая сущность e в ТАРД идентифицируется одним или несколькими атрибутами:

$$e: T_i, i = \overline{1, N},$$

имеющими значения, принадлежащие независимым типам T_i . Решение о возможности доступа принимается на основе обработки однотипных атрибутов пары субъект-объект.

Модель ТАРД определяется как кортеж независимых типов

$$T = (T_i), i = \overline{1, N}.$$

Тип T_i , представляющий собой сложный математический объект, включающий структурированный домен значений вместе с заданными на нем операциями, является механизмом, реализующим политику разграничения доступа в соответствии с определенным критерием.

Рассмотрим тип T_i , обозначив его T . T служит ограничением на значения атрибутов и круг операций с атрибутами данного типа. Данное обстоятельство лежит в основе принципа безопасности моделей ТАРД.

Формально тип определяется следующим образом:

$$T = (Dom, Op),$$

где Dom – структурированный домен:

$$Dom = (D, \sqsubseteq_{Str}).$$

D – полное частично упорядоченное отношение предшествования \sqsubseteq множество названий всевозможных операций и их групп, разрешаемых субъектам для осуществления над объектами после получения доступа, и сгруппированных в соответствии с выбранной структурой домена \sqsubseteq_{Str} .

$Str = (Set, List, Tree)$ означает вид структуры: Set – «множество», $List$ – «список», $Tree$ – «дерево». Спецификация политики безопасности $P(T)$ задается конкретным видом структуры Str и значениями узлов домена типа T , а также видом соответствующих данной структуре операций. Структура Set может быть использована для моделирования политик DAC, $List$ – для политик MAC, а $Tree$ – для политик RBAC.

Набор Op включает операцию типизации $Type$ и операцию доступа Acc :

$$Op = (Type, Acc),$$

Операция типизации $Type(e) = e:T$ присваивает сущности e атрибут типа T в виде ее метки безопасности, имеющей вид некоторого элемента домена или структурированного подмножества узлов, подчиненных данному элементу.

Множественная метка безопасности сущности e в виде кортежа $(e: T_1, \dots, e: T_K)$ присваивается в результате применения операций типизации независимых типов T_1, \dots, T_K .

Семантика метки безопасности субъекта содержит информацию о названиях операций, разрешенных данному субъекту. В свою очередь, семантика метки безопасности объекта содержит сведения об операциях, которые можно производить над данным объектом.

Операция доступа Acc сравнивает метки безопасности субъекта и объекта одинаковых типов, устанавливая факт наличия отношения \sqsubseteq между ними, и разрешает/отвергает доступ субъекта к объекту. Истинностное значение результата означает разрешение на доступ субъекту s к объекту o :

$$Acc(Type(s), Type(o)) = true/false.$$

В целом семантика модели ТАРД представляет собой значения меток безопасности субъектов и объектов и результатов их сравнения на разных стадиях ее функционирования.

Механизм разграничения доступа по критерию, задаваемому типом T , можно представить в обобщенном виде следующим образом: $Acc(Type(s), Type(o)) = true$, если выполняется $Type(o) \sqsubseteq Type(s)$, и $false$ во всех остальных случаях.

Одновременное выполнение критериев всех типов T_i атрибутов пары субъект-объект после выдачи субъектом s запроса на доступ к объекту o

$$Acc(Type^i(s), Type^i(o)) = true, i = \overline{1, K}$$

обеспечивает разграничение доступа по ряду критериев, реализуя таким образом парадигму «множественной политики».

Модель ТАРД имеет многоуровневое определение, которое позволяет конструировать типы, представляющие собой различные политики безопасности, в процессе функционирования системы:

$$T = (T_{META}, T_{OBJ}, T_{AM}),$$

где $META$ – метауровень, OBJ – объектный уровень, AM – уровень матрицы доступа.

На уровне $META$ тип представлен метатипом T_{META} , являющимся обобщенным представлением политики $P_{META}(T)$. Он служит для порождения политик типизированного атрибутного разграничения доступа объектного уровня $P_{OBJ}(T)$.

Типы объектного уровня T_{OBJ} представляют собой ряд конкретных политик разграничения доступа $P_{OBJ}(T)$, получаемых из метаполитики $P_{META}(T)$.

Тип T_{AM} уровня АМ является реализацией политики типизированного атрибутного разграничения доступа $P_{OBJ}(T)$ в виде множества типизированных переменных, образующих матрицу доступа.

Каждый уровень описывается с помощью языка логической спецификации T^{LS} , включающей язык L с алфавитом, представленным доменом D и правилами грамматики – операциями типа T , а также аксиомами Ax и правилами вывода Inf :

$$T^{LS} = (L, Ax, Inf).$$

Функционирование многоуровневой модели ТАРД заключается в моделировании семантики следующего уровня путем интерпретации модели, представляющей предыдущий уровень.

В процессе работы на разных уровнях модель выполняет различные функции.

На уровне МЕТА осуществляется конструирование семантики уровня OBJ в виде типа T_{OBJ} специальной операцией интерпретации $I_{META}(Dom, Str, Op)$, которое заключается в определении вида структуры Str домена Dom типа T_{OBJ} как подструктуры домена Dom типа T_{META} , присвоении значений его элементам и определении вида соответствующих операций Op .

В результате создаются различные виды моделей разграничения доступа $T^{i_{OBJ}}$, предназначенные для выполнения политик разграничения доступа $P^{i_{OBJ}}(T)$:

$$T_{META}(I(Dom^{OBJ}, Str^{OBJ}, Op^{OBJ})) \rightarrow T^{i_{OBJ}}, i = \overline{1, K}, K \neq N.$$

Формирование матрицы доступа осуществляется операциями $Type$ сконструированных моделей T_{OBJ} . При этом производится присвоение полномочий сущностям в виде их меток безопасности:

$$T_{OBJ}(Type(e)) \rightarrow T_{AM}.$$

На уровне АМ производится обработка создаваемой матрицы доступа путем выдачи разрешения на доступ согласно критерию, задаваемому типом T_{OBJ} , в результате выполнения операции доступа Acc :

$$T_{AM}(Acc(Type^{OBJ}(s), Type^{OBJ}(o))) \rightarrow \{true, false\}.$$

Модели $T^{i_{OBJ}}$ могут выполняться как последовательно, так и параллельно, реализуя все аспекты множественной политики (рис. 1).

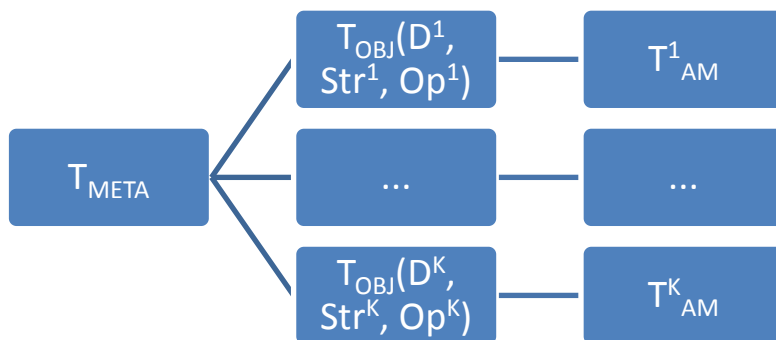


Рисунок 1: Уровни представления и функционирования модели ТАРД

Архитектура модели ТАРД содержит:

- средства определения возможности доступа субъектов к объектам в соответствии с их полномочиями;

- средства двухступенчатого администрирования – для конструирования политик авторизации и для управления идентификацией сущностей в процессе разграничения доступа.

Модель ТАРД обладает следующими характеристиками:

- принцип обработки атрибутов одинаковых типов является предпосылкой обеспечения скорости вычисления их значений;

- имеет возможность формального доказательства правильности решений о предоставлении доступа, используя дедуктивный аппарат логической спецификации модели;

- обеспечивает наглядность и контроль процесса администрирования;

- способна динамически конструировать новые модели разграничения доступа вместе с возможностью моделировать традиционные DAC, MAC, RBAC;

- модель непосредственно реализуема на языках функционального и логического программирования с использованием аппарата программирования в ограничениях.

Перечисленные особенности позволяют использовать системы типизированного атрибутного разграничения доступа в качестве центров управления политиками безопасности, создаваемых в локальных и глобальных вычислительных средах.

Заключение

Приведен перечень недостатков традиционных моделей и пути их преодоления. Сформулированы требования, обеспечивающие гибкость управления безопасностью, универсальность и удобство администрирования, которым должны отвечать модели разграничения доступа, функционирующие как в локальных, так и распределенных гетерогенных средах.

Описана разрабатываемая в настоящее время модель типизированного атрибутного разграничения доступа, показано, что она отвечает основным требованиям построения моделей, обеспечивающим безопасное пользование разделяемыми ресурсами.

Список литературы

- 1 Sandhu R.S., Samarati P. Access control: principle and practice. *Communications Magazine*, IEEE, 32(9):40–48, 1994.
- 2 Hosmer H. 1993. The multipolicy paradigm for trusted systems. In *Proceedings on the 1992-1993 workshop on New security paradigms (NSPW '92-93)*, J. Bret Michael, Victoria Ashby, and Catherine Meadows (Eds.). ACM, New York, NY, USA, 19-32. DOI=<http://dx.doi.org/10.1145/283751.283768>
- 3 David F. Ferraiolo, Ravi Sandhu, Serban Gavrila, D. Richard Kuhn, and Ramaswamy Chandramouli. 2001. Proposed NIST standard for role-based access control. *ACM Trans. Inf. Syst. Secur.* 4, 3 (August 2001), 224-274. DOI: <https://doi.org/10.1145/501978.501980>
- 4 Karp A., Hauray H., Davis M. (2010). From ABAC to ZBAC: The evolution of access control models. *ISSA (Information Systems Security Association) Journal*. 8. 22-30.
- 5 Hu V. C., Ferraiolo D., Kuhn R., Schnitzer A., Sandlin K., Miller R., and Scarfone K. Guide to attribute based access control (ABAC) definition and considerations. NIST Special Publication, 800:162, 2014. <http://dx.doi.org/10.6028/NIST.SP.800-162>
- 6 Fisher B., Brickman N., Burden P., Jha S., Johnson B., Keller A., Kolovos T., Umarji S., Weeks S. Attribute Based Access Control. NIST Special Publication 1800-3, 2017. <https://www.nccoe.nist.gov/publication/1800-3/> (Accessed August 2018).
- 7 Калимолдаев М. Н., Бияшев Р.Г., Пог О. А. Формальное представление функциональной модели многокритериальной системы разграничения и контроля доступа к информационным ресурсам // *Проблемы информатики*. – 2014. – № 1(22). – с. 43-55.

- 8 Бияшев Р.Г., Калимолдаев М. Н., Рог О. А. полиморфная типизация сущностей и задача конструирования механизма многокритериального разграничения доступа. // известия нан рк. серия физико-математическая. – 2014. – № 5. – с. 33-41.
- 9 Бияшев Р.Г., Калимолдаев М.Н., Рог О.А. Логический подход к организации многокритериального атрибутного разграничения доступа. // Совместный выпуск по материалам международной научной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (СITech-2015) (24-27 сентября 2015 г.) Вычислительные технологии т.20, Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер.: математика, механика и информатика №3(86) Часть 1. - С.275-278.
- 10 Бияшев Р.Г., Калимолдаев М.Н., Рог О.А. Моделирование семантики типизированного атрибутного разграничения доступа // Проблемы информатики, - 2017, № 1. С. 25-37.
- 11 Калимолдаев М.Н., Бияшев Р.Г., Рог О.А. Применение логики для построения моделей разграничения доступа к информации // «Доклады Национальной Академии Наук Республики Казахстан» 2017, №3. С. 48-54.
- 12 Калимолдаев М.Н., Бияшев Р.Г., Рог О.А. Основы архитектуры программных систем для осуществления типизированного атрибутного разграничения доступа // Современные проблемы информатики и вычислительных технологий: Мат. науч. конф. (29-30 июня 2017 г). – Алматы, 2017, – С. 88-95.
- 13 Калимолдаев М.Н., Бияшев Р.Г., Рог О.А. Многоуровневое представление модели типизированного атрибутного разграничения доступа // Современные проблемы информатики и вычислительных технологий: (Мат. Науч. Конф. 2-5 июля 2018 г.) – Алматы: ИИВТ МОН РК. 2018. – С. 111-120.
- 14 Калимолдаев М.Н., Бияшев Р.Г., Рог О.А. Анализ атрибутных методов разграничения доступа // Прикладная дискретная математика, - 2019, Вып. 44. С. 43-58.

*Калимолдаев Максат Нурадилович – д.ф.-м.н., акад. НАН РК, ген. директор
Института информационных и вычислительных технологий КН МОН РК;
email: mnk@ipic.kz;*

*Бияшев Рустем Гакашевич – д-р техн. наук, проф., зав. лабораторией Института
информационных и вычислительных технологий КН МОН РК; email: brg@ipic.kz;*

*Рог Ольга Алексеевна – науч. сотр. Института информационных
и вычислительных технологий КН МОН РК; email: o.a.rog@mail.ru*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ БОЛЬШИХ ВИХРЕЙ В ПАКЕТЕ OPEN FOAM

А. Т. Калмурзаева², А. Ы. Курбаналиев¹, С. С. Мамаев¹, С. С. Акназарова¹

¹*Ошский государственный университет,
723500, Ош, Кыргызстан*

²*Кызылкийский педагогический институт Баткенского государственного университета,
720300, Кызыл-Кия, Кыргызстан*

УДК 532.517.4

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10007

В данной работе представлены численные результаты задач моделирование трёхмерных течений несжимаемых жидкости. Моделирование основано на трёхмерных нестационарных, усреднённых по пространству уравнениях Навье – Стокса. Численное решение систем уравнений Навье – Стокса проводилось при помощи стационарного решателя *rhoFoam* пакета *OpenFOAM* 6. Адекватность математической модели проверяется путем сравнения с соответствующими экспериментальными данными.

Ключевые слова: *Нестационарное течение, турбулентность, метод больших вихрей, rhoFoam, Open FOAM.*

Введение

Среди различных областей науки и техники вклад вычислительной науки представляется особенно многообещающим в XXI веке в качестве основы для развития технологий, социальной безопасности жизни и сохранения окружающей среды. Однако необходимы дополнительные усилия для разработки программного обеспечения следующего поколения для высокопроизводительных вычислительных систем. Для продолжения исследований и разработок в области динамики жидкостей необходима новая инновационная технология, которая может хорошо адаптироваться к строгим требованиям и мировым стандартам, предъявляемым в последнее время к проблемам окружающей среды и энергетики. С этой целью была исследована оптимизация конструкции для множества сложных условий, чтобы помочь в разработке ключевой технологии, основанной на исследованиях трехмерных нестационарных характеристик в потоках жидкости.

Несколько работ были выполнены аналитически в поисках единственного и гладкого решения уравнений Навье – Стокса [1-3]. Метод моделирования больших вихрей — LES метод использовался во многих исследованиях для анализа турбулентных течений в простых геометриях и простых граничных условиях за последние годы. До девяностых годов любое понимание основных глобальных особенностей схем потока было основано на исследованиях визуализации потока из-за отсутствия данных измерений трехмерных отрывных течений. Первая опубликованная работа, которая содержала данные измерений полей турбулентных скоростей и энергетических балансов вокруг кубического препятствия, появилась в 90-х годах. После этой работы было проведено много экспериментальных работ по отрывным турбулентным течениям в каналах.

В данной работе проведено моделирование нестационарных турбулентных ограниченных течений с использованием классического метода моделирования больших вихрей. Рассматривается задача моделирования турбулентного горения предварительное перемешанной смеси пропан-воздух с коэффициентом эквивалентности $\phi = 0,57$ в канале с внезапным расширением около входа и поджатию на выходе. Предварительная смесь подается на вход в канал со скоростью $U_0 = 13,3$ м / с при температуре 293К и атмосферном давлении. Число

Рейнольдса рассчитанное через высоту уступа $h = 0.0254\text{м}$, входную скорость и коэффициент вязкости равно 22 100. Коэффициент эквивалентности определяется как массовое соотношение топливо-воздух в состоянии предварительно смешанного газа, нормализованное по отношению к стехиометрическому состоянию.

1. Основы метода моделирования больших вихрей

При пространственной фильтрации, законы сохранения массы и импульса для несжимаемой вязкой жидкости при отсутствии массовых сил приводят к следующим, очень похожим в осреднённом по Рейнольдсу нестационарным уравнениям Навье–Стокса [4, стр. 278]:

$$\frac{\partial(\overline{\rho u_i})}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial(\overline{\rho u_i})}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho u_i' u_j'}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right]; \quad (1)$$

где $\overline{u_i}$ – компоненты отфильтрованной скорости, ρ – плотность, \overline{p} – отфильтрованное давление, μ – динамическая вязкость.

Здесь необходимо подчеркнуть, что $\overline{u_i' u_j'} \neq \overline{u_i} \cdot \overline{u_j}$ порой очень сложно вычислить левую часть этого неравенства и появляется необходимость моделирования разности двух этих членов $\tau_{ij}^s = -\rho(\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \cdot \overline{u_j})$ - которая называется подсеточным тензором напряжений Рейнольдса.

В данной работе использовалась модель Смагоринского, согласно которой подсеточный тензор напряжений Рейнольдса представляется следующим образом:

$$\tau_{ij}^s = \frac{1}{3} \tau_{ij}^s \delta_{ij} + \mu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) = 2 \mu_t \overline{S_{ij}}$$

где μ_t – турбулентная вязкость подсеточного масштаба, а $\overline{S_{ij}}$ – отфильтрованный тензор скоростей деформации больших или разрешенных вихрей. Коэффициент турбулентной вязкости подсеточного масштаба, из соображений размерности определяется согласно следующему эмпирическому соотношению [4, с.279]:

$$\mu_t = C_s^2 \rho \Delta^2 \sqrt{\overline{S_{ij}}} \quad (2)$$

Уравнения (1–2) вместе определяют замкнутую систему для моделирования крупномасштабных турбулентных вихрей и составляют основу метода подсеточного моделирования турбулентности.

3. Метод моделирования больших вихрей для турбулентных течений с горением

Обычные компьютерные комплексы, предназначенные для решения инженерных задач, широко используют модели турбулентности, основанные на процедуре осреднения по Рейнольдсу RANS, такие как модель k-ε— модель или модель полных напряжений Рейнольдса. Эти подходы могут предсказать относительно устойчивые поля потока с достаточной точностью и только с небольшими вычислительными затратами. Однако разработчики устройств сгорания, которые используют методы, основанные на модели RANS, сталкиваются с трудностями при решении многомасштабной физики и нестационарной динамики в турбулентных потоках с горением. Метод прямого моделирования использовался в основных фундаментальных процессах горения. Однако его применение ограничено микроскопическими явлениями. Метод моделирования больших вихрей является альтернативным подходом, который может непосредственно анализировать нестационарные и сложные взаимодействия между турбулентностью и горением в практическом приложении.

Положение фронта пламени определяется следующим уравнением для скалярной величины C :

$$\frac{\partial(\overline{C})}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{u_j C}}{\partial x_j} = S_L |\nabla \overline{C}| - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j C} - \overline{u_j} \overline{C}) \quad (3)$$

При этом значение скалярной величины C меняется от 0 для зон без горения до значения 1 для зон с горением.

4. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается задача моделирования турбулентного горения предварительное перемешанной смеси пропан-воздух с коэффициентом эквивалентности $\phi = 0,57$ в канале с внезапным расширением и поджатием на выходе [5]. Предварительная смесь подается на вход в канал со скоростью $U_0 = 13,3$ м / с при температуре 293К и 1 атмосферном давлении. Число Рейнольдса рассчитанное через высоту уступа $h = 0.0254$ м, входную скорость и коэффициент вязкости равно 22 100. Коэффициент эквивалентности определяется как массовое соотношение топливо-воздух в состоянии предварительно смешанного газа, нормализованное по отношению к стехиометрическому состоянию.

Вычислительная область, показанная на рис. 1, разделена на декартову сетку, содержащую $247 \times 48 \times 20$ точек в направлениях x , y и z соответственно. Проведенные тестовые расчеты на разных сетках показали, что эта сетка является более экономичным по сравнению с другими сетками.

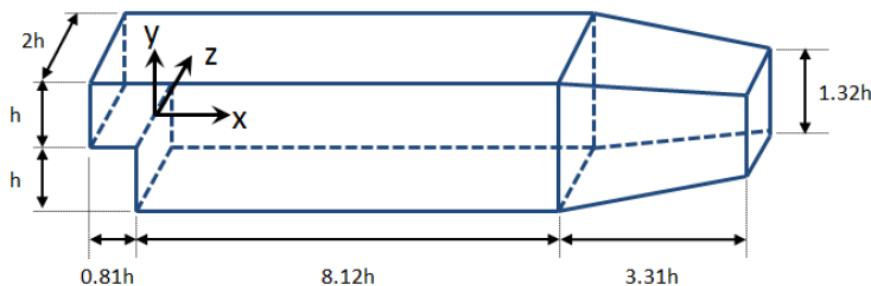


Рисунок 1: Геометрия расчетной области

Модель Смагоринского используется при численном решении уравнения импульса (1), в то время как распространение турбулентного пламени моделируется с использованием отфильтрованного C -уравнения (3), описанного выше.

Дискретизация систем уравнений (1-3) осуществляется методом контрольных объемов [6]. Численное решение полученных систем линейных алгебраических уравнений решается при помощи пакета OpenFOAM [7]. Более детальную информацию о методах дискретизации основных уравнений, решения систем линейных уравнений, граничных и начальных условий можно получить из руководства пользователя пакета OpenFOAM [7].

5. Результаты численных расчетов

Результаты численного моделирования и сравнение с соответствующими экспериментальными данными работы [5] представлены на последующих рисунках 2-5.

На рис. 2-3 показаны мгновенные изо-поверхности продольной скорости $u = 0$ для течений с химическими реакциями (рис. 2) и без химических реакций (рис. 3). Зона рециркуляции, которая образуется сразу за внезапным расширением, в обоих случаях, расположена на нижней стороне изоповерхности за ступенькой, обращенной назад. Контуры поперечной завихренности в центральной плоскости также показаны на рис. 2-3. В случае наличия химических реакций, длина зоны рециркуляции короче, а максимальная обратная скорость,

больше из-за расширения горячих продуктов сгорания газа и его более высокой кинетической вязкости. Метод моделирования больших вихрей турбулентных течений с химическими реакциями удовлетворительно предсказывают эти характеристики: прогнозируемая максимальная обратная скорость $0,42U_0$ и длина зоны рециркуляции $4,4h$ хорошо согласуются с соответствующим экспериментальными данными, которые равны $0,44U_0$ и $4,5$. В реагирующем случае колебания скорости и завихренность обычно уменьшаются, и их масштабы становятся меньше в зоне рециркуляции.

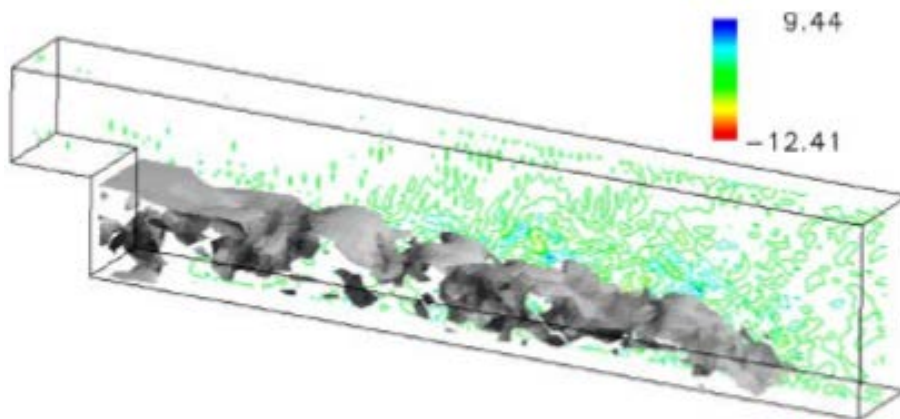


Рисунок 2: Мгновенная изоповерхность продольной скорости $u = 0$ и поле поперечной завихренности для изотермического течения

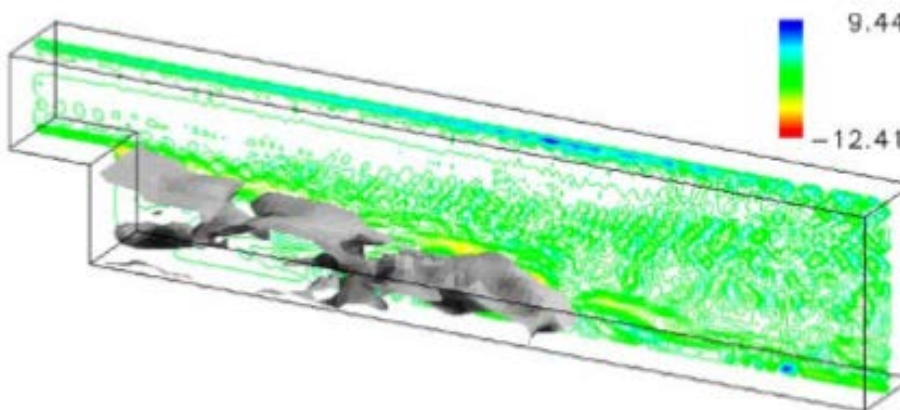


Рисунок 3: Мгновенная изоповерхность продольной скорости $u = 0$ и поле поперечной поле поперечной завихренности для реагирующего течения

На рис. 4 показана мгновенная нормализованная температура в центральной плоскости канала. В этом случае поступающая смесь содержит холодные реагенты при температуре 293К, которые смешиваются с горячими продуктами сгорания смеси в слое смешения за внезапным расширением. Выделение тепло происходит, как правило, вихрями большого размера, которые образуются в слое смешения.

На рис. 5 показаны усредненные по времени профили продольной скорости потока в единицах входной скорости U_0 (рис. 5а), пульсации продольной скорости потока в единицах входной скорости U_0 (рис. 5б) и температуры (рис. 5в) в поперечном сечении, проходящим через зону рециркуляции. Как для реагирующих, так и для не реагирующих случаев профили основных характеристик течения хорошо согласуются с экспериментальными данными.

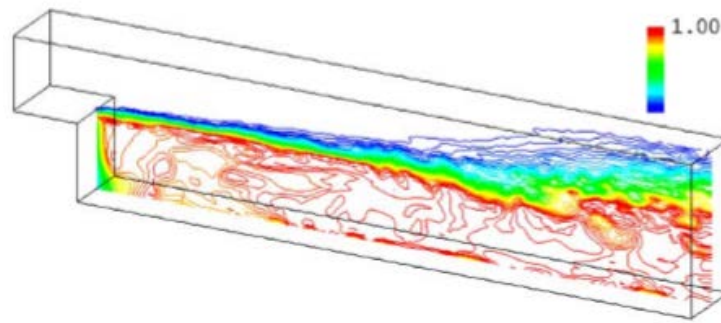


Рисунок 4: Мгновенные изолинии нормализованной температуры

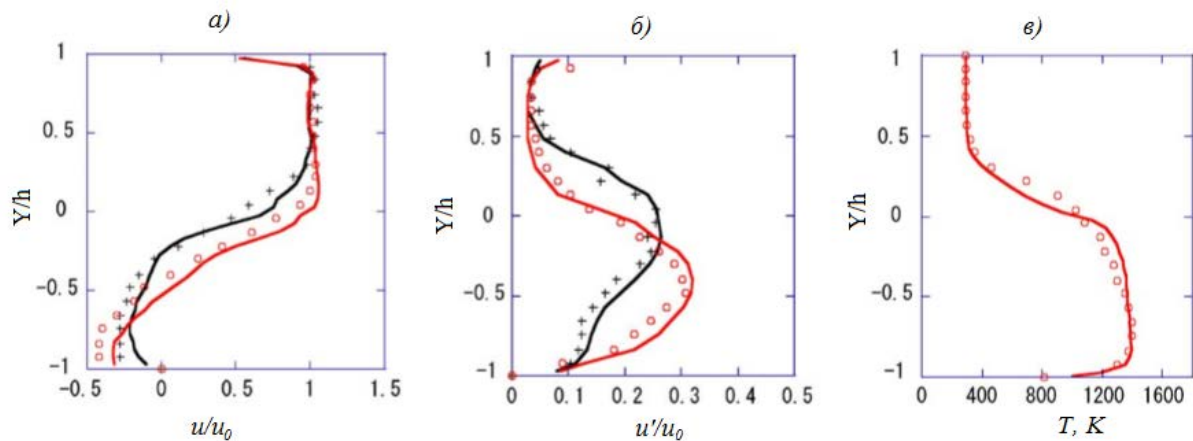


Рисунок 5: Поперечный профили основных величин

Заключение

Рассмотрено численное моделирование турбулентного горения предварительное перемешанной смеси пропан-воздух с коэффициентом эквивалентности $\varphi = 0,57$ в канале с внезапным расширением и поджатием на выходе [5]. Предварительная смесь подается на вход в канал со скоростью $U_0 = 13,3$ м / с при температуре 293К и 1 атмосферном давлении. Число Рейнольдса рассчитанное через высоту уступа $h = 0.0254$ м, входную скорость и коэффициент вязкости равно 22 100. Коэффициент эквивалентности определяется как массовое соотношение топливо-воздух в состоянии предварительно смешанного газа, нормализованное по отношению к стехиометрическому состоянию. Сравнение численных результатов с экспериментальными данными показывает, что метод моделирования больших вихрей, имплементированный в пакет OpenFOAM позволяет решать практические задачи, связанные с современными инженерно-техническими проблемами.

Список литературы

1. El-Sayed A., Fractional-order diffusion-wave equation, *Int. J. Theory Phys.*, 35, 1996, pp. 311-322.
2. Huang F., and Liu F., The time fractional diffusion equation and fractional advection-dispersion equation, *ANZIAM J.*, 46, 2005, pp. 1-14.
3. Huang F., and Liu F., The fundamental solution of the space-time fractional advection-dispersion equation, *J. Appl. Math. & Computing*, 18(1-2), 2005, p. 339-350.
4. H. Ferziger and M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3rd Edition. Springer Verlag, Berlin, 2002. DOI: 10.1007/978-3-642-56026-2.
5. R. W. Pitz., J. W. Daily. Combustion in turbulent mixing layer formed in at a rearward-facing step. *AIAA Journal*, Vol. 21, Issue 11, November, 1983, pp. 1565-1570. DOI: 10.2514/3.8290.

6. S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publ. Corp., New York, 1980. <https://doi.org/10.1002/cite.330530323>.

7. OpenFOAM Foundation. 2018. [Electron. resource]. <https://openfoam.org/> [Accessed: 2019-01-30].

Акназарова Суйумкан Сагыналиевна – аспирант Ошского государственного университета; email: saknazarova@list.ru;

Калмурзаева Анипа Таибаевна – преподаватель Кызыл-Кийского педагогического института Баткенского государственного университета; email: anira.kalmurzaeva.80@mail.ru;

Курбаналиев Абдикерим Брысбаевич – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой Ошского государственного университета; email: kurbanaliev@rambler.ru;

Мамаев Самарбек Сатыбалдыевич – аспирант Ошского государственного университета; email: samar.89_89@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАВОДНЕНИЯ В ПАКЕТЕ OPENFOAM

Б. Р. Ойчуева¹, А. Ы. Курбаналиев¹, А. Ж. Жайнаков²

¹Ошский государственный университет,
723500, г. Ош, Кыргызстан

²Институт горного дела и горных технологий им. У. И. Асаналиева
Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова,
720044, Бишкек, Кыргызстан

УДК 519.676

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10008

В данной работе представлены численные результаты тестовых задач моделирование процесса наводнения. Моделирование основано на трёхмерных нестационарных, усредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье – Стокса. Для определения межфазной границы раздела между двумя несмешивающимися фазами – водой и воздухом использовался хорошо известный метод объёма жидкости. Численное решение систем уравнений Навье – Стокса проводилось при помощи нестационарного многофазного решателя *interFoam* пакета *OpenFOAM 6*. Адекватность математической модели проверяется путем сравнения с соответствующими экспериментальными данными. Возможности используемой технологии моделирования иллюстрируется на примере наводнения местности вблизи г. Ош (Кыргызстан).

Ключевые слова: Наводнение, нестационарность, двухфазное течение, граница раздела фаз, метод объёма жидкости, *interFoam*, *OpenFOAM*.

Введение

Наводнение, связанное с прорывом дамбы, приводит к большим человеческим и имущественным потерям. Численное моделирование позволяет оценить время появления передней волны прорыва в определенной точке местности, глубины водного потока и другие характеристики наводнения.

Использованное в расчетах открытое программное обеспечение *OpenFOAM* предназначено для численного моделирования широкого класса задач механики сплошных сред, особенно связанных с течением жидкости и переносом тепла. Оно содержит написанный на языке C++ широкий набор решателей и необходимое количество библиотек [1].

1. Математическая модель

В данной работе рассматривается задача численного частичного прорыва дамбы на основе метода контрольного объема. Трёхмерная математическая модель турбулентного несжимаемого течения основана на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье – Стокса [2, стр. 293]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j + \overline{\rho u_i' u_j'}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

где u_i – компоненты средней скорости, ρ – плотность, p – среднее давление,

$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ – средний тензор вязких напряжений, μ – динамическая вязкость.

Осреднение производится по времени, а штрих означает флуктуационную часть. При наличии внешних сил, например, силы тяжести, эти уравнения необходимо дополнить соответствующими членами.

Замыкание систем уравнений (1-2) базируется на стандартной $k - \epsilon$ – модели турбулентности. Для течений общего вида, введенная Буссинеском турбулентная вязкость, связывающая напряжения Рейнольдса с градиентами осредненного течения, может быть записана в следующей форме [2, стр. 294]:

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} k$$

Кинетическая энергия турбулентности k и скорость ее диссипации ϵ определяются из следующих транспортных уравнений [2, стр. 295-296]:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \epsilon \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \epsilon)}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k} - \rho C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \quad (4)$$

где $P_k = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ – скорость генерации кинетической энергии турбулентности

средним течением, а $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$ – турбулентная вязкость. Коэффициенты модели имеют следующие стандартные значения: $C_\mu = 0.09; C_{\epsilon 1} = 1.44; C_{\epsilon 2} = 1.92; \sigma_k = 1.0; \sigma_\epsilon = 1.3$.

2. Моделирование свободной поверхности

Одним из наиболее эффективных методов моделирования свободной поверхности в газожидкостных течениях является метод объема жидкости — Volume of Fluid [2, стр.384]. В методе объема жидкости предполагается, что две или более жидкости являются не смешиваемыми. Каждой добавляемой в модель дополнительной фазе сопоставляется объемная доля фазы в каждом контрольном объеме. При этом в каждом контрольном объеме, объемные доли всех фаз нормируются на единицу.

В данной работе обе фазы моделируются как одна, свойства которой вычисляются путем осреднения следующим образом [2, стр.385]:

$$\rho = \rho_1 \alpha + \rho_2 (1 - \alpha); \mu = \mu_1 \alpha + \mu_2 (1 - \alpha);$$

где индексы 1, 2 обозначают жидкую и газовую фазы соответственно, а α – объемная доля жидкой фазы в данной ячейке. При таком подходе поверхность раздела жидкость и газ не рассматривается как граница, для которой не требуются определения граничных условий.

В примененном методе объема жидкости для вычисления потоков жидкости через границу раздела газожидкостной смеси использовалась схема геометрической реконструкции. Согласно идее этой схемы, поверхность раздела между водой и воздухом восстанавливается путем применения кусочно-линейной аппроксимации. При этом, используя значение объемной доли жидкости и ее производной в ячейке, на первом шаге вычисляется положение линейной поверхности раздела относительно центра каждой частично заполненной ячейки.

Используя линейную аппроксимацию поверхности раздела и значения нормальной и тангенциальной составляющих скорости на плоскости, на втором шаге вычисляется количество жидкости, переносимое через каждую плоскость. На третьем шаге вычисляется объемная доля воды для каждой ячейки из следующего уравнения переноса

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

Для решения этого уравнения для объемной доли жидкости α применяется созданный в компании OpenCFD Limited решатель MULES, использующий многомерный универсальный ограничитель для явного решения, обеспечивающий ограниченность объемной доли фазы, независимой от применяемой основной численной схемы, структуры сетки и т. д. [1, стр. U-61].

3. Граничные и начальные условия

Для решения уравнений математической модели (1-5) газожидкостного течения необходимо определить как начальные условия и так граничные условия на всех границах расчетной области. На твердых стенках для скорости задавалось условие прилипания, согласно которому все компоненты вектора скорости равны нулю. Для кинетической энергии турбулентности k и скорости ее диссипации ϵ граничные условия задавались при помощи аппарата пристеночных функций [2, стр. 298-299]. На открытых границах давление считалось равным атмосферному давлению. Для скорости задавался нулевой градиент. Сведения о граничных условиях приведены в следующей табл. 1.

Таблица 1: Граничные условия для математической модели

| Переменная | Открытая граница | Стенка |
|---|----------------------|----------------------------|
| Скорость, u | Нулевой градиент | Условия прилипания |
| Объемная доля жидкости, α | Нулевой градиент | Нулевой градиент |
| Кинетическая энергия турбулентности, k | Нулевой градиент | Метод пристеночных функций |
| Диссипация энергии турбулентности, ϵ | Нулевой градиент | Метод пристеночных функций |
| Давление, p | Атмосферное давление | Нулевой градиент |

Для нестационарной задачи необходимо задание начальных значений всех зависимых переменных. Значения всех компонент скорости равны нулю, так как по условию рассматриваемой задачи до момента времени $t=0$ движение отсутствовало. Давление тоже равно нулю. Кинетическая энергия турбулентности и скорость её диссипации имеют некоторое малое значение, которое обеспечивает хорошую сходимость численного решения на первых шагах интегрирования. Начальное распределение объемной доли α было неоднородным, так как не все расчетные ячейки заполнены водой.

4. Методы дискретизации основных уравнений и методы решения СЛАУ

Для получения численного решения систем уравнений (1-5) необходимо произвести процедуру дискретизации, целью которой является преобразование исходных дифференциальных уравнений в частных производных в систему линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы определяет некоторый набор величин, имеющие определенное отношение к решению исходных дифференциальных уравнений в некоторых точках пространства и времени. Общая процедура дискретизации состоит из двух этапов: пространственная дискретизация и дискретизация уравнений.

Пространственная дискретизация осуществляется на основе метода контрольных объемов [3, с. 24]. Согласно основной идее этого метода, пространственная дискретизация задачи получается путем разбиения расчетной области на конечное число соприкасающихся объемов. В центре каждого контрольного объема находится только одна точка «привязки» численного решения. В большинстве разработок, ориентированных на решение трехмерных задач для областей сложной геометрии, в качестве контрольного объема используются ячейки расчетной сетки: узлы сетки располагаются в вершинах многогранника, сеточные линии идут вдоль его ребер, а значения искомым величин приписываются геометрическому центру ячейки.

Система дифференциальных уравнений линеаризуется и дискретизируется для каждого контрольного объема. Для вычисления объемных интегралов по контрольному объему использовалась общая процедура Гаусса, согласно которой интеграл по объему представляется через интеграл по поверхности ячейки, а значение функции на поверхности интерполируется из значений функций в центроидах соседних ячеек.

В качестве схемы дискретизации производной по времени использовалась явная схема Эйлера первого порядка с разностями назад.

Для связанного расчета поля скорости и давления использовалась процедура PISO с числом корректоров 3 [2, стр.178]. Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) использовались итерационные солверы PCG для симметричных матриц [2, стр.107] и PBiCG метод (би-)сопряженных градиентов с предобусловливанием для асимметричных матриц [2, стр.110]. В качестве предобусловливателя были выбраны процедуры DIC предобусловливатель основанный на упрощенной схеме неполной факторизации Холецкого для симметричных матриц и DILU предобусловливатель основанный на упрощенной неполной LU факторизации для асимметричных матриц.

Сведения о методах дискретизации и решения алгебраических уравнений приведены в табл. 2, 3.

Таблица 2: Схемы дискретизации

| Уравнение | Производная по времени | Конвективный член | Диффузионный член |
|--|------------------------|-------------------|-------------------|
| Скорость, u | Euler | Gauss linear | Gauss linear |
| Объемная доля жидкости, α | Euler | Gauss vanLeer | Gauss linear |
| Кинетическая энергия турбулентности, k | Euler | Gauss upwind | Gauss linear |
| Скорость диссипации энергии, ε | Euler | Gauss upwind | Gauss linear |

Таблица 3: Решатели уравнений для основных переменных

| Уравнение | Решатель | Точность |
|--|---|----------|
| Давление, p | Метод сопряженных градиентов с предобусловливанием, PCG | 1e-7 |
| Скорость, u | Метод бисопряженных градиентов с предобусловливанием, PBiCG | 1e-6 |
| Кинетическая энергия турбулентности, k | Метод бисопряженных градиентов с предобусловливанием, PBiCG | 1e-8 |
| Скорость диссипации энергии, ε | Метод бисопряженных градиентов с предобусловливанием, PBiCG | 1e-8 |

Более детальную информацию о граничных и начальных условиях, методах дискретизации и решения систем алгебраических уравнений можно найти в [1, 5, 6].

5. Результаты численных расчетов

На рис. 1. показана геометрия рассматриваемой задачи [4]. Резервуар длиной 1 м, шириной 2 м и высотой 0.8 м заполнен водой с начальной высотой 0.6 м. Перегородка, разделяющая воду от правой пустой плоской части с тремя открытыми границами имеет длину 0.4 м и расположена между точками с координатами (1; 0.8) и (1; 1.2).



Рисунок 1: Геометрия рассматриваемой задачи

В эксперименте для измерения высоты водного потока были использованы пять датчиков, координаты которых приведены в табл. 4.

Таблица 4: Координаты измерительных датчиков

| Датчик | -5A | C | 4 | 0 | 8A |
|--------|------|------|------|-----|-------|
| x, м | 0,18 | 0,48 | 1,0 | 1,0 | 1,722 |
| y, м | 1,0 | 0,4 | 1,16 | 1,0 | 1,0 |

Простота формы вычислительной области позволяет разделить ее на контрольные объемы гексаэдрической формы. Для этой цели была использована стандартная утилита blockMesh пакета OpenFOAM, которая разбивает расчетную область на трехмерные гексаэдрические блоки. Расчетные ячейки каждого блока имели размеры $0.04 \times 0.06 \times 0.04$ м.

На рис. 2, 3 представлены численные результаты временной эволюции высоты водного потока (сплошная линия) и соответствующие экспериментальные данные (маркеры)

Сравнение результатов численного моделирования с соответствующими экспериментальными данными показывает достаточно хорошее согласие между ними. Небольшое колебание численных данных в начальный момент времени в точке 0 вероятно связано с влиянием граничных условий на твердых стенках резервуара и конечной величиной скорости убирания перегородки. При численном моделировании считается, что перегородка убирается мгновенно, т. е. скорость бесконечная. На самом деле в эксперименте эта скорость имеет некоторое конечное значение.

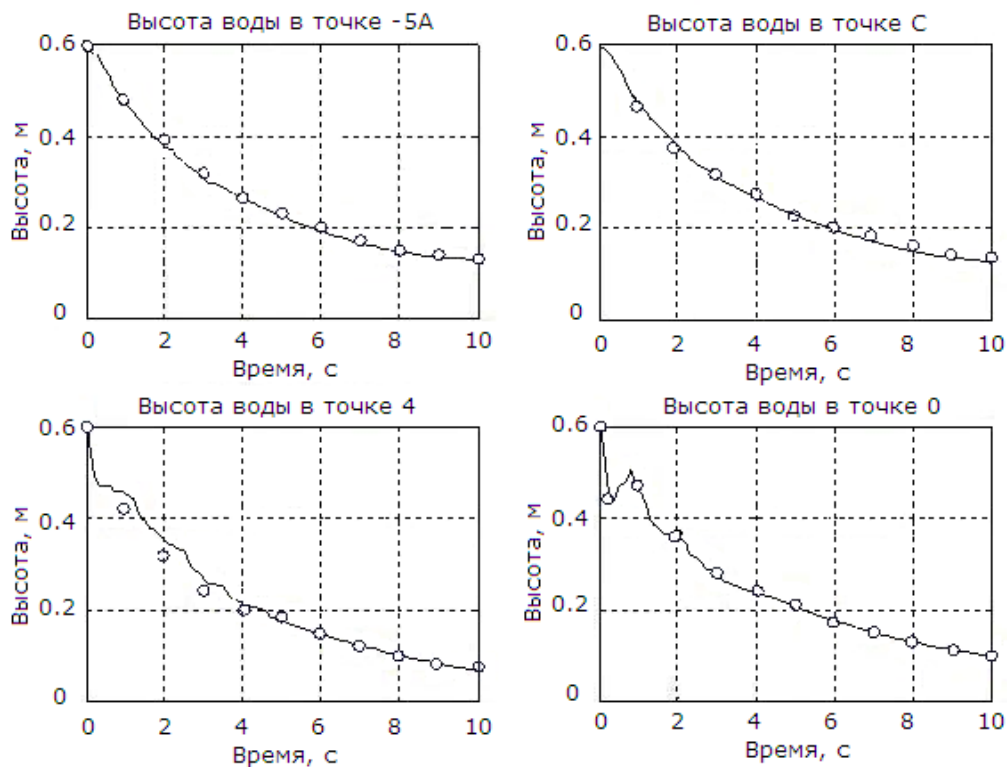


Рисунок 2: Изменения во времени высоты водного потока в точках -5А, С, 4 и 0



Рисунок 3: Изменение во времени высоты водного потока в точке 8А

Заключение

Наводнение, связанное с прорывом дамбы приводит к большим человеческим и имущественным потерям. Численное моделирование позволяет оценить время появления передней волны прорыва в определенной точке местности, глубины водного потока и другие характеристики наводнения.

В работе представлены результаты математического моделирования сложного гидродинамического явления на основе нестационарных трехмерных уравнений Навье – Стокса, описывающих динамику газожидкостной смеси со свободной границей. Адекватность применяемой модели проверена на примере классической задачи частичного прорыва дамбы. Особое внимание уделено на точность расчета уровня потока воды в различных точках резервуара. Показано, что использованный многофазный решатель *interFoam* открытого пакета *OpenFOAM 6* описывает рассмотренную задачу с приемлемой точностью.

Список литературы

1. OpenFOAM Foundation. 2018. [Electron. resource]. <https://openfoam.org/> [Accessed: 2019-02-12].
2. Ferziger J. H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer Verlag, 2002.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач тепло обмена динамики жидкости. - М.: Энергоатомиздат, 1984.
4. Fraccarollo L., Toro E. F. Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems." Journal of Hydraulic Research, Vol.33, No.6, 843-864, 1995.
5. А. Ж. Жайнаков, А. Ы. Курбаналиев. Математическое моделирование задачи прорыва дамбы. Выч. технол. Т. 18, №3, 2013. С. 13-21. [Electron. resource]. <https://cyberleninka.ru/article/v/matematicheskoe-modelirovanie-zadachi-proryva-damby>. [Accessed: 2019-05-03].
6. А.Ж. Жайнаков , А.Ы. Курбаналиев . Верификация открытого пакета OpenFOAM на задачах прорыва дамб. Теплоф. и аэромеханика, том 20, № 4,2013, сс.461-472. [Electron. resource]. <http://www.sibran.ru/upload/iblock/43c/43c802d2e0c803570023fca3dfedbbba2.pdf>. [Accessed: 2019-15-02].

Ойчуева Бурулгул Рахманбердиевна – аспирант Ошского государственного университета; тел: (996)-3222 2-22-73, факс (996)-3222-2-40-66;
Курбаналиев Абдикерим Ырысбаевич – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой Ошского государственного университета; email: kurbanaliev@rambler.ru
Жайнаков Аманбек Жайнакович – акад. Национальной академии наук Кыргызской Республики, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой Института горного дела и горных технологий им. У. И. Асаналиева Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова; email: jainakov-41@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБТЕКАНИЯ ГОРЫ СУЛЕЙМАН

М. Ч. Осмонбаев¹, А. Б. Турганбаева²

¹Ошский государственный университет,

²Ошский гуманитарный педагогический институт
723500, г. Ош, Кыргызстан

УДК: 532.54

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10009

В данной статье рассматривается создание математической модели и комплекса прикладных программ и геоинформационных систем, позволяющих получать с помощью открытого пакета OpenFOAM устойчивые и достаточно точные численные решения для турбулентного моделирования обтекания горы Сулейман, г. Ош (Кыргызстан).

Ключевые слова: Сложный рельеф местности, обтекание горы, модель турбулентности, модель динамической реконструкции, LES, blockMesh, OpenFOAM.

Введение

Важной и актуальной проблемой является обеспечение долговечности материалов и конструкции линий электропередач в горных местностях Кыргызской Республики. Известно, что для защиты ЛЭП высоких напряжений от пылевидных частиц, приводящих к нежелательному загрязнению изоляции ЛЭП, обычно сооружаются защитные экраны или используются естественные особенности рельефа.

Среди различных подходов, применяемых к решению этой проблемы, важное место занимает математическое моделирование на основе полных уравнений Навье – Стокса. Благодаря бурному развитию быстродействующих вычислительных комплексов и методов численного решения нелинейных взаимосвязанных интегро-дифференциальных уравнений, математическое моделирование в данное время является одним из эффективных методов исследований в различных областях науки и техники.

Насущная потребность в совершенствовании методов моделирования трёхмерных турбулентных отрывных течений и переноса экологически вредных примесей, аэродинамических характеристик городских сооружений, транспортных средств, более эффективном решении задачи обеспечения комфортных условий для пешеходов в современных городских застройках определяют актуальность темы исследования.

Совокупность природных явлений, а также проблемы гидравлики, акустики, физиологии кровообращения, организации химических и технологических процессов вследствие незначительности характерных скоростей можно моделировать на основе несжимаемой вязкой жидкости, описываемой уравнениями Навье – Стокса [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \bar{u}_i) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j + \rho \overline{u'_i u'_j}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \quad (1)$$

где \bar{u}_i – i -я компонента средней скорости в направлении координаты x_i , ρ – плотность,

\bar{p} – среднее давление, $\bar{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ – средний тензор вязких напряжений, μ – моле-

кулярная динамическая вязкость, $\overline{\rho u_i' u_j'}$ – напряжения Рейнольдса, требующие моделирования. Осреднение производится по времени, а штрих означает флуктуационную часть. При наличии массовых и других сил необходимо дополнить уравнение (1) соответствующими членами.

Учет влияния турбулентных пульсаций базируются на модели турбулентности Спалларта – Алмараса [2]. При использовании этой модели решается только одно уравнение для турбулентной вязкости:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} = u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} - c_{\omega 1} f_{\omega} \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right] + \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \quad (2)$$

Коэффициенты замыкания и вспомогательные соотношения имеют вид:

$$c_{b1} = 0.1355, \quad c_{b2} = 0.622, \quad c_{\nu 1} = 7.1, \quad \sigma = 2/3$$

$$c_{\omega 1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}; \quad c_{\omega 2} = 0.3, \quad c_{\omega 3} = 2.0, \quad \kappa = 0.41$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}; f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3}; f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}}; f_{\omega} = \left[\frac{1 + c_{\omega 3}^6}{g^6 + c_{\omega 3}^6} \right]^{1/6}; \\ g = r + c_{\omega 2} (r^6 - r); r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}; \tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{\nu 2}; S = 2\sqrt{\Omega_{ij} \Omega_{ij}}; \end{array} \right.$$

где d – расстояние до ближайшей стенки, Ω_{ij} – тензор вращения.

Уравнение для кинематической турбулентной вязкости определяется $\nu_t = \tilde{\nu} f_{\nu 1}$.

Более детальную информацию об обсуждаемом вопросе можно найти в [3]. В работе [4] было рассмотрено использование утилиты snappyHexMesh для генерации расчетной сетки на примере горы Сулейман в г. Ош.

1. Постановка задачи

Утилита snappyHexMesh, входящая в комплект пакета openFOAM предназначена для генерации трехмерных сеток. Сетка строится на основе геометрии, записанной в формате stl файла. Ранее была построена сетка для моделирования процесса обтекания естественного препятствия – Сулейман горы [4]. В данной статье, используя построенную таким образом расчетную сетку, методами вычислительной гидродинамики изучается влияние Сулейман горы на процесс распространения экологически вредных примесей, скорость и ускорение этих примесей, непосредственно в близости горы.

Для обеспечения реалистичного турбулентного притока выполняется отдельное моделирование нейтрального пограничного слоя с периодическими граничными условиями и плоской поверхностью, и данные извлекаются из вертикального уз-среза в домене на каждом временном шаге. Размер сетки для этого периодического случая равен (83,163,83) с горизонтальным разрешением 35 м и минимальным вертикальным разрешением 5 м, охватывающим область 2800 x 600 x 1000 м. Высота областей в 1100 м также обеспечивала сетки различной вертикальной протяженности, которые были проверены на сетку горы Сулейман.

Начальные условия задаются постоянным логарифмическим профилем скорости и нейтральной стратификацией. Тяжелые колебания первоначально наблюдались при наложении данных турбулентного притока, поскольку волны на границе быстро распространялись через поле давления в первоначально однородные поля течения.

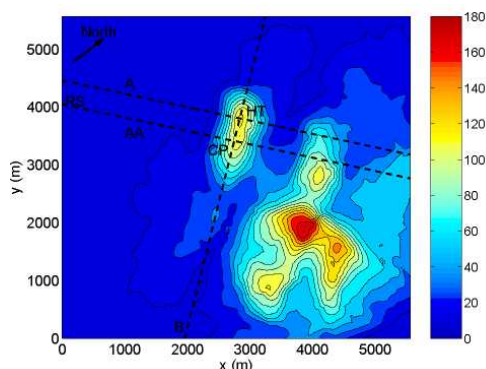


Рисунок 1: Контуры высоты (м), используемые в симуляции, повернуты на 60° по часовой стрелке с севера. Контурный интервал составляет 12 м

Наблюдения вдоль линий А и АА (40° , NE-SW) и вдоль линии В (72° , SE-NW) на рис. 1 сравниваются с соответствующими усредненными по времени величинами из трехмерных симулированных полей скорости.

2. Результаты моделирования

На рис. 2 представлен профиль ветра на опорном узле (RS), расположенный примерно в 3 км юг-юго-запад от вершины горы. В наших симуляциях RS находится на левом краю области, где он пересекается с линией А (вместо строки АА). Наблюдаемые ветра хорошо согласуются с логарифмическим профилем из базы данных турбулентного притока, что одинаково для каждой модели.

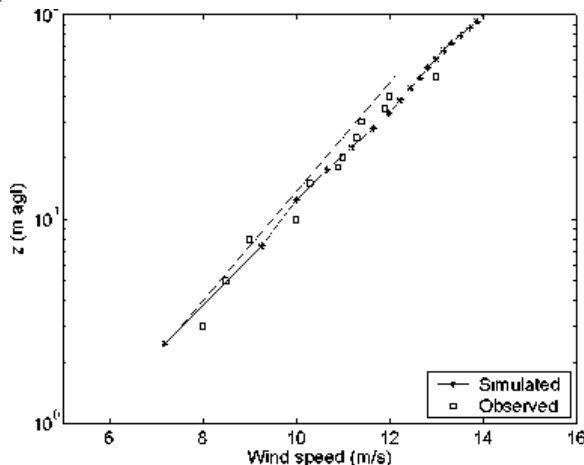


Рисунок 2: Сравнение наблюдаемого профиля скорости ветра на контрольном участке (RS) с моделируемыми значениями из базы данных турбулентного притока

На рис. 3 показано наблюдаемое и смоделированное соотношение скорости ветра на высоте 10 м над землей вдоль линий А и АА. Данные наблюдений недоступны более 400 м (линия А) или 600 м (линия АА) за вершиной горы. На рис. 3 показано наблюдаемое и смоделированное соотношение скорости ветра на высоте 10 м над землей вдоль линий А и АА.

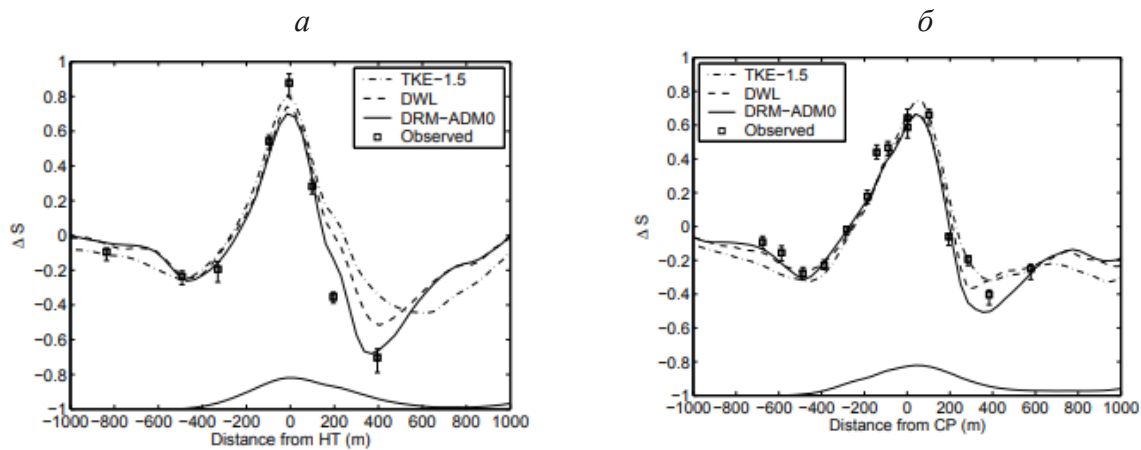


Рисунок 3: Сравнение наблюдаемого ускорения вдоль линий А (а) и АА (б) до симулируемых значений с использованием закрытия ТКЕ-1.5, DWL и ДРМ. Вид горы показан внизу каждой оси

Коэффициент дробного ускорения ветра обеспечивает наиболее прямое сравнение различных результатов модели и определяется как

$$\Delta S = \frac{S(z) - S_{RS}(z)}{S_{RS}(z)} \quad (3)$$

где S представляет собой горизонтальную скорость ветра и S_{RS} находится на опорной площадке.

Ускорение – это безразмерная мера, часто используемая в ветроэнергетике для размещения ветровых турбин. Все симуляции недооценивают ускорение на вершине холма вдоль линии А, при этом результаты других моделей немного лучше остальных. Недооценка на вершине горы, скорее всего, вызвана тем, что высота пика немного занижена на нашей сетке. Отклонение направления ветра от 210° $\Delta \Phi$ показано на рис. 4. Ни одна из моделей не согласуется полностью с наблюдаемыми направлениями ветра, но результаты DRM-ADM0 снова показывают улучшение в линии горы.

На рис. 5 показано ускорение ветра по линии В; здесь модели слегка превзошли скорость ветра (в частности, модель ТКЕ-1.5) даже на вершине горы, тогда как значения были недопредставлены на рис. 3. Это может быть из-за ошибок усечения в процедурах интерполяции, используемых для извлечения данных моделирования вдоль линии А и В.

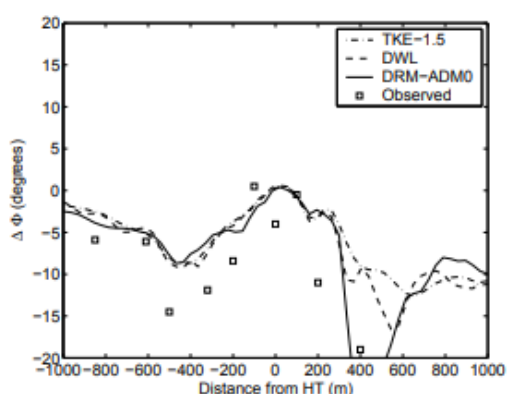


Рисунок 4: Сравнение наблюдаемого направления ветра с отклонением от 210° А, по линии А до смоделированных значений, используя закрытия ТКЕ-1.5, DWL и DRM-ADM0

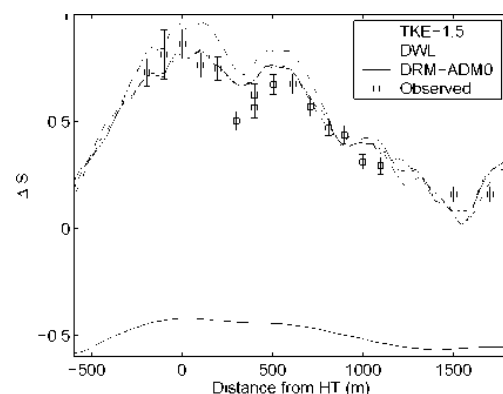


Рисунок 5: Сравнение наблюдаемого ускорения вдоль линии В до смоделированных значений с использованием ТКЕ-1.5, DWL и DRM-ADM0 закрытия. Профиль холма показан на нижней части рисунка

Заключение

В работе представлены результаты численного моделирования турбулентного обтекания горы Сулейман, г. Ош, Кыргызстан. Наблюдаемые ветра хорошо согласуются с логарифмическим профилем из базы данных турбулентного притока, что одинаково для каждой модели. А также определены поля средней скорости и ускорение пассивной примеси.

Список литературы

1. Versteeg Н. К., Malalasekera W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics. Edinburgh (2007).
2. J. Schmidt, terrain BlockMesher, <https://github.com/jonasIWES/terrainBlockMesher>
3. [HTTP://www.openfoam.org/archive/1.7.1/docs/](http://www.openfoam.org/archive/1.7.1/docs/). OpenFOAM 1.7.1. User
4. Жайнаков А.Ж., Курбаналиев А.Ы., Осмонбаев М.Ч., Турганбаева А.Б. Использование утилиты snappyHexMesh для генерации расчетной сетки (На примере горы Сулейман в г. Ош, Кыргызстан) Проблемы оптимизации сложных систем. XIV Международная Азиатская школа-семинар, Кыргызская Республика, оз. Иссык-Куль, пансионат «Отель Евразия», 20–31 июля 2018 г.: Труды конф. Ч. 1. – 2018. – С. 219-227.

*Осмонбаев Маралбек Чотоевич – канд. физ.-мат. наук,
доцент Ошского государственного университета; email: o_manas@mail.ru;
Турганбаева Акпары Балтабаевна – преподаватель Ошского
гуманитарно-педагогического института*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ПОЧВОГРУНТАХ

Р. К. Сагындыкова¹, А. Ы. Курбаналиев², А. Т. Дыйканова¹, С. Т. Жусупбекова¹

¹Кыргызский национальный аграрный университет им. К. И. Скрябина,
720005, г. Бишкек Кыргызстан

²Ошский государственный университет,
723500, г. Ош, Кыргызстан

УДК 631.67

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10010

Увеличение производства продуктов сельского хозяйства, которые являются нашей основной задачей, достигается главным образом, за счет интенсификации сельскохозяйственных угодий, то есть требуется научное обоснование рациональных сроков и норм полива, обеспечивающих получение запрограммированных урожаев сельского хозяйства путем комплексного управления основными факторами жизнедеятельности растений. Большое распространение поверхностных способов орошения диктует необходимость создания механико-математических моделей и методик их решения, позволяющих выявить основные закономерности как фильтрационных, так и чисто гидродинамических процессов.

Ключевые слова: теплоемкость, теплопроводность, температуропроводность, температура, частные производные, линеаризация, нелинейное уравнение.

Введение

Изучение задачи распространения влажностных и тепловых процессов в почвогрунтах всегда была важной и актуальной проблемой для аграрии. Исследование этих процессов в почвогрунтах, необходимо рассматривать в органической слитности, совместно так как для оптимального роста и развития различных сельхозкультур на сельскохозяйственном поле, необходимо четко знать какими приоритетными эффектами и субстанциями надо обязательно считаться. В настоящее время, существуют ряд математических моделей процесса распространения тепла в почве [1], при этом коэффициенты теплопроводности и теплоемкости самого рассматриваемого нелинейного уравнения теплопроводности отражают по мере возможности все те влияния, которые они испытывают в результате реальной изменчивости свойств и состояние почвы. В начале рассматривается двумерное уравнение теплопроводности, которое описывает распространение тепла в почвогрунтах, с определенными начально-краевыми условиями, при этом коэффициенты теплопроводности и теплоемкости аппроксимируются экспоненциально и показательно. Таким образом, для анализа и нахождения температурного поля, можно отказаться от системы уравнений кондуктивной, радиационной и массообменной проводимостями, а ограничиться лишь одним уравнением теплопроводности с осложненной за счет всех вышеуказанных факторов коэффициентов теплопереноса [1]

$$C(x, y, t) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, y, t) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(x, y, t) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (1)$$

Из сказанного следует, что термические характеристики: λ – коэффициент теплопроводности, C – коэффициент объемной теплоемкости, имеют решающее значение при изучении, оценке и регулировании теплового режима в почве. Знание вышеуказанного комплекса характеристик крайне необходимо при решении большого количества важных агротехнических задач. Эти характеристики определяют собой распределение температуры в

почве, ход этой температуры на различные глубины почвы по времени, количества тепла, получаемого поверхностью почвы благодаря солнечной радиации, причем это тепло частично проникает в пахотный слой почвы и аккумулируется в ней. Весьма важно знать, какая ожидается температура почвы через определенное время, какова тенденция этой температуры, как она будет изменяться. Важно также знать содержание тепла в почве и какие меры нужно и можно предпринять для того, чтобы уменьшить или увеличить количество тепла в ней. Проблема теплопереноса в почве, за последние годы, превратилось в бурно развивающую отрасль, так как ее теоретические, методические и экспериментальные достижения проникли в самые разнообразные области агропромышленного комплекса.

1. Постановка задачи

Основной нашей задачей является исследование двумерного нелинейного уравнения теплопроводности, разработка и определение его аналитических частных решений, описывающих распространения тепла близких к реальным, со следующими начально-краевыми условиями:

распределение тепла в начальный момент:

$$T(x, y, 0) = G_1(x, y), \quad (2)$$

распределение тепла на поверхности почвы:

$$T(0, 0, t) = G_2(t), \quad (3)$$

распределение температуры на глубине $x = H_0$, $y = H_1$:

$$T(H_0, Y_0, t) = G_3(t), \quad T(X_0, H_1, t) = G_4(t). \quad (4)$$

Для определения решений нелинейного уравнения (1), вся трудность заключается в сложности коэффициентов теплоемкости $c(x, y, t)$ и теплопроводности $\lambda(x, y, t)$. Известно, что они определяются из экспериментальных данных [2], причем они могут быть приближенно записаны некоторыми количественными зависимостями от x, y, t . И еще отметим, что вопросам линеаризации уравнения (1) посвящена научная работа [3] в которой исследуемое уравнение записывается как:

$$T_\tau = T_{xx} + T_{yy}. \quad (5)$$

Последнее уравнение рассматривались многими авторами как для одномерных, так и двумерных потоков.

2. Алгоритм решения задачи

Рассмотрим случай, когда коэффициенты теплоемкости и теплопроводности подчинены одинаковым законам изменения – экспоненциальным, как функции

$$c(x, y, t) = c_0 e^{\gamma T}, \quad \lambda(x, y, t) = \lambda_0 e^{\gamma T}. \quad (6)$$

Тогда, подставляя их в уравнение (1), после несложных математических преобразований, получим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \gamma \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right), \quad (7)$$

где $\tau \rightarrow \lambda_0 t / c_0$.

Вводя новую функцию

$$Q(x, y, t) = e^{\gamma T}, \quad (8)$$

и подставляя в (7), имеем

$$Q_\tau = Q_{xx} + Q_{yy}. \quad (9)$$

Последняя уравнение совпадает по форме с уравнением (1) и является объектом дальнейших исследований.

I. Решение уравнения (9) имеет решение в классической форме:

$$Q(x, y, \tau) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(\tau). \quad (10)$$

Определяя частные производные и подставляя в (9) получим:

$$f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3'(\tau) = f_1'' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2'' \cdot f_3 \quad (11)$$

Искомые функции запишутся как: $f_1(x) = \exp kx$, $f_2(y) = \exp ly$, $f_3(\tau) = \exp m\tau$. При этом величина m определяется из дифференциального уравнения

$$f_3'(\tau) = k^2 f_3 + m^2 f_3, \quad (12)$$

тогда сама искомая функция запишется следующим образом

$$Q(x, y, \tau) = \exp kx \cdot \exp ly \cdot c_0 \exp(k^2 + l^2)\tau \quad (13)$$

II. Другая форма линеаризации уравнения (7) такова

$$c(x, y, t) = c_0 e^{ax+by+ct}, \quad \lambda(x, y, t) = \lambda_0 e^{ax+by+ct}, \quad (14)$$

тогда, подставляя их в исследуемое уравнение (9), получим

$$T_\tau = T_{\xi\xi} + T_{\eta\eta}, \quad \text{где } \xi = x + \tau, \quad \eta = y + \tau. \quad (15)$$

Решение этого уравнения будем искать в специальном виде

$$T(x, y, \tau) = \mu(\tau)Q(z) + \gamma(\tau), \quad z = \alpha(\tau)[\xi + \eta - \beta(\tau)]. \quad (16)$$

Определяя $T_\xi = \mu\alpha Q'$, $T_{\xi\xi} = \mu\alpha^2 Q''$, $T_\tau = \mu'Q + \mu \frac{\alpha'}{\alpha} ZQ' - \mu\alpha\beta'Q' + \gamma'$, $T_\eta = \mu\alpha Q'$

$T_{\eta\eta} = \mu\alpha^2 Q''$, и подставляя в (15), получим

$$Q'' - \left[\frac{\alpha'}{2\alpha^3} z + \frac{\beta'}{2\alpha} - \frac{a+b}{2\alpha} \right] Q' - \frac{\mu'}{2\mu\alpha^2} Q = \frac{\gamma'}{2\mu\alpha^2}. \quad (17)$$

Уравнение (16) становится неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, при значениях

$$\alpha(\tau) = 1, \quad \beta(\tau) = n\tau, \quad \mu(\tau) = \exp k\tau, \quad \gamma(\tau) = m \exp k\tau / l. \quad (18)$$

Корни характеристического уравнения (17) имеют вид $\lambda_{1,2} = \left[-\left(\frac{n+a+b}{2} \right) \pm \sqrt{D} \right] / 2$,

когда дискриминант $D = \left(\frac{n+a+b}{2} \right)^2 + 2k$, и в зависимости от его решения однородной части записываются

$$Q_0(x, y, \tau) = c_1 \exp \lambda_1(x + y - n\tau) + c_2 \exp \lambda_2(x + y - n\tau), \quad D > 0,$$

$$Q_0(x, y, \tau) = (c_1 + c_2(x + y - n\tau)) \cdot \exp \lambda_2(x + y - n\tau), \quad D = 0, \quad (19)$$

$$Q_0(x, y, \tau) = \exp p(x + y - n\tau) [c_1 \cos q(x + y - n\tau) + c_2 \sin q(x + y - n\tau)], \quad D < 0,$$

при этом частное решение уравнения (17) записывается как $Q(x, y, \tau) = Q_0(x, y, \tau) + A$, а сама искомая функция окончательно примет вид

$$T(x, y, t) = \exp \left(\frac{k\lambda_0}{c_0} t \right) \cdot \left[Q_0 \left(x, y, \frac{\lambda_0}{c_0} t \right) + A \right] + \frac{m}{l} \exp \left(\frac{k\lambda_0}{c_0} t \right), \quad (20)$$

Заключение

Разработана математическая модель двумерного уравнения теплопроводности, предложены два вида решений исследуемого уравнения. Разработанные механико-математические модели передвижения тепла в почвогрунтах вносят определенный вклад в развитие теории задач тепломассопереноса. Конечные результаты получены в явной формульной зависимости от физико-механических свойств почвы, удобные для практического применения, дают хорошие приближения к известным экспериментальным данным. Результаты могут быть рекомендованы к включению в программы специальных курсов для студентов-гидромелиораторов, почвоведов, КНИИ ирригации и всех заинтересованных специалистов.

Список литературы

1. Туганбаев У. М., Сагындыкова Р. К. Исследование двумерного уравнения теплопроводности в почвогрунтах // Вестник ПГУ им. С. Торайгырова, Казахстан, 2013.
2. Куртнер Д. А., Решетин О. Л., Чудновский А.Ф. Решение уравнения теплопроводности при переменном коэффициенте переноса // Сб. трудов по агроном. физике. 1970. № 26. С.71-79.
3. Туганбаев У.М., Сагындыкова Р. К. Исследование уравнения теплопроводности в почвогрунтах с учетом коэффициента температуропроводности // Вестник КГУСТА им. Н. Исанова, Бишкек, 2014.

Сагындыкова Рахат Кайыпбековна – ст. преподаватель Кыргызского аграрного университета им. К. И. Скрябина; email: rahat_82s@mail.ru;

Курбаналиев Абдикерим Ырысбаевич – д-р. физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой Омского государственного университета; email: kurbanaliev@rambler.ru;

Дыйканова Айнура Тынчыбековна – канд. физ.-мат. наук, доц., зав. кафедрой Кыргызского аграрного университета им. К. И. Скрябина; email: dat_1967@mail.ru;

Жусупбекова Самара Төлөбековна – ст. преподаватель Кыргызского аграрного университета им. К. И. Скрябина; email: samara-t@mail.ru

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОНИТОРИНГА В СЕТЯХ С ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

К. В. Ткачѳв, К. А. Волжанкина

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
630090, Новосибирск*

УДК 004.94

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10013

В современных условиях интенсивного транспортного сообщения в мегаполисах актуальной задачей является обеспечение безопасности движения, оперативное оповещение участников движения о различных событиях в транспортной сети (авария, повреждение дорожного полотна, обрушение моста, снежные заносы и др.). Наличие сетей передачи данных, в которых связь осуществляется между устройствами, находящимися в автомобилях, а также связь этих устройств с придорожным оборудованием могут повысить безопасность дорожного движения. В статье исследуется задача оптимальной расстановки устройств мониторинга и оповещения на транспортных сетях с целью передачи информации о ситуациях на дорогах максимальному количеству участников движения. В качестве модели транспортной сети рассматривается взвешенный граф. Введены некоторые ограничения: стоимость установки устройств оповещения, радиус передачи устройств и др.

Ключевые слова: Имитационная модель, VANET, транспортные сети, генетический алгоритм.

Введение

В последние годы проводится много исследований в направлении развития беспроводных сетей, связывающих транспортные средства. Для связи транспортных средств друг с другом, а также для их соединения с придорожным оборудованием используются беспроводные сети Vehicular Ad Hoc Network (VANET) [1]. Использование современных технологий может автоматизировать передачу коротких сообщений участникам движения о пробках, объездах, чрезвычайных ситуациях на дорогах. Архитектура сетей VANET предполагает взаимодействие автомобиля как с другими автомобилями, так и с придорожной сетью, т. е. устройствами оповещения, расположенными в стационарных объектах [2].

Рассмотрим задачу распространения короткого сообщения всем участникам движения в заданном сегменте транспортной сети (ТС) от узлов, расположенных в стационарных участках транспортной сети (придорожное оборудование, другие неподвижные узлы). Ставится задача разработать имитационную модель для расчета эффективности расстановки систем мониторинга в сетях с движущимися объектами. Модель предусматривает возможность загрузки карты местности, на которой должна производиться расстановка стационарных или подвижных станций передачи мгновенных сообщений. Необходимо найти оптимальную расстановку оборудования с учетом свойств устройств мониторинга и транспортной сети: зона покрытия действия стационарных или движущихся передатчиков; стоимость оборудования; способ передачи мгновенных сообщений; плотность движения на различных участках транспортной сети.

Имитационное моделирование сетей

В качестве примеров систем имитационного моделирования приведем известные системы симуляции сетей: NS-2, GNS-3, OmNet.

Симулятор NS-2 разработан в 1989 году, является дискретно-событийным симулятором, построен в объектно-ориентированном стиле. GNS3 – Graphical Network Simulator, графический симулятор сети, позволяет создавать различные сетевые топологии [3]. OMNeT++ – среда имитационного моделирования дискретных событий и состояний, основная область применения - моделирование сетей передачи данных, ИТ систем и бизнес процессов [4].

Все перечисленные системы имеют свои плюсы и минусы при моделировании движущихся объектов и распространении сообщений. Для решения задачи имитационного моделирования передачи сообщений между движущимися транспортными средствами была разработана собственная система ИМОДО [7].

Система имитационного моделирования ИМОДО

В разработанной авторами системе предусмотрены следующие возможности:

- моделирование транспортной сети в виде неориентированного графа;
- задание пропускных способностей участков дорог (рёбер графа);
- задание скоростного режима на каждом ребре;
- контроль скорости движения транспортного потока;
- возможность задавать радиус действия каждого устройства оповещения;
- установка поведения транспортных средств;
- генерация маршрутов для транспортных средств;
- установка порогового времени для получения сообщения.

Свойствами модели являются:

- расчёт эффективности расстановки устройств оповещения происходит в зависимости от выбора алгоритма расстановки (реализовано три различных алгоритма);
- подсчет оповещенных объектов;
- сравнительный анализ работы различных алгоритмов;
- возможность изменения алгоритма расстановки устройств без необходимости внесения изменений в исходный код продукта.

Схема моделирования

Шаг 1:

- задание входных параметров: загруженность транспортной сети, скорость движения объектов по транспортной сети, радиус действия устройств, стоимость одного устройства, выделенный бюджет на все устройства;
- моделирование транспортной сети;
- генерация транспортных средств (параметры: скорость, начальное положение, коэффициент человеческого фактора);
- генерация маршрутов следования транспортных средств, учитывая их параметры;
- выбор алгоритма расстановки.

Шаг 2:

- программа производит расчет эффективности выбранной расстановки для заданной транспортной сети с учетом входных параметров;
- выбранный алгоритм производит новую расстановку устройств оповещения исходя из эффективности предыдущей расстановки.

Шаг 3:

- сравнение эффективности расстановок по критерию количества оповещенных машин (процент оповещенных машин от общего числа участников движения).

Шаг 3 и Шаг 2 повторяются до достижения необходимого результата.

Используемые алгоритмы расстановки систем мониторинга на сети

Для решения задачи расстановки систем мониторинга использовались три алгоритма: «Жадный» алгоритм, алгоритм расстановки на основе экспертных мнений, генетический алгоритм. В каждом алгоритме учитывается ограничение на общую стоимость установленных устройств.

В «жадном» алгоритме [5] в качестве входных данных вводится упорядоченный набор значений, характеризующий интенсивность движения на участках сети. Алгоритм размещает устройства мониторинга на самых нагруженных участках до тех пор, пока выполняется ограничение на общую стоимость. Рассмотрена также модификация жадного алгоритма – вместо отдельных ребер рассматриваются цепи графа (последовательно расположенные ребра). Алгоритм расставляет устройства в начале или в конце каждой такой цепи.

В алгоритме на основе экспертных мнений эксперты дают заключения о необходимости расстановки устройств мониторинга в каждом узле. Эти заключения экспертов представляют собой битовые строки, в которых каждому из возможных мест расстановки соответствуют значения 0 или 1 (1 соответствует мнению эксперта, что в этом узле необходима установка устройства, 0 соответствует отрицательному мнению). Для каждого узла сети вычисляется среднее взвешенное значение по всем мнениям экспертов.

В генетическом алгоритме задача формализуется таким образом, чтобы её решение могло быть закодировано в виде вектора генов («генотипа»). В нашем случае решения представлены битовыми строками, в которой каждый бит представляет собой возможное место расстановки стационарных устройств мониторинга. Из этих строк формируется популяция. Далее происходит запуск генетического алгоритма по классическому сценарию [6, 8].

Параметры модели

Имитационное моделирование проводилось для следующих параметров:

- граф транспортной сети (район ОбьГЭС, другие районы г. Новосибирска) состоит из 60 узлов и 100 ребер;
- количество узлов, в которых расположены устройства, распространяющие информацию - 11;
- каждому ребру, на основе статистических данных, присвоена пропускная способность 200-600 машин/час и скорость движения на конкретном участке 40-80 км/час;
- радиус действия устройств оповещения – 85 метров;
- временной порог для передачи сообщения – 30 минут.



Рисунок 1: Пример работы модели

Результаты моделирования

Результаты для первых двух алгоритмов приведены в табл. 1. Чтобы учесть случайность движения транспортных средств на сети, было вычислено среднее значение по результатам двадцати запусков имитационной модели с одинаковыми начальными данными.

Таблица 1: Результаты моделирования

| Алгоритм | Общее число участников | Доля участников, получивших сообщение, % | Время работы |
|-------------------|------------------------|--|--------------|
| «Жадный» | 500 | 70,3% | 00:00:06 |
| «Жадный» | 700 | 70,6% | 00:00:08 |
| Экспертное мнение | 500 | 87,8% | 00:00:07 |
| Экспертное мнение | 700 | 87,5% | 00:00:09 |

Входные данные для генетического алгоритма: размер популяции (h), количество итераций ($Iter$), ограничение на стоимость (C^*), вероятность мутации (p), количество машин (n), временной порог для передачи сообщения (t).

Таблица 2: Результаты моделирования

| h | $Iter$ | t | p | n | C^* | Доля покрытых, % | Время работы |
|-----|--------|-----|------|-----|-------|------------------|--------------|
| 100 | 300 | 20 | 0,01 | 500 | 12 | 80 % | 00:00:18 |
| 300 | 300 | 20 | 0,01 | 500 | 12 | 81,67 % | 00:01:01 |
| 100 | 300 | 20 | 0,01 | 700 | 12 | 68,33 % | 00:00:38 |
| 100 | 300 | 20 | 0,01 | 500 | 18 | 98,33 % | 00:00:19 |
| 100 | 300 | 20 | 0,1 | 500 | 12 | 85 % | 00:00:20 |
| 100 | 300 | 40 | 0,01 | 500 | 12 | 100 % | 00:00:01 |
| 100 | 100 | 20 | 0,01 | 500 | 12 | 81,67 % | 00:00:06 |

Для уточнения модели были добавлены следующие возможности: отслеживание возникновения пробок – рис. 2, временное удаление отдельных ребер в связи с недоступностью участков дорог – рис. 3, возможность разбиения транспортной сети на подсети – рис. 4.

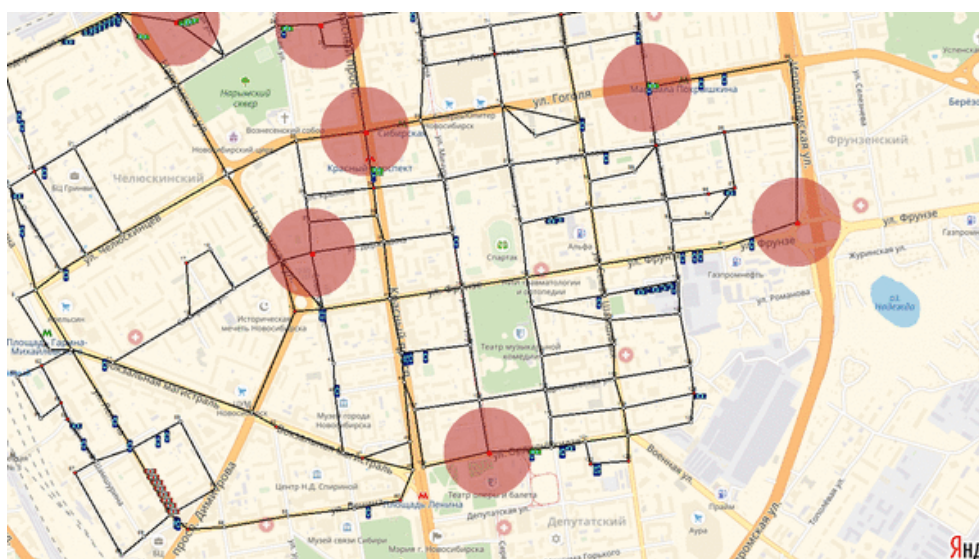


Рисунок 2 Возникновение пробок

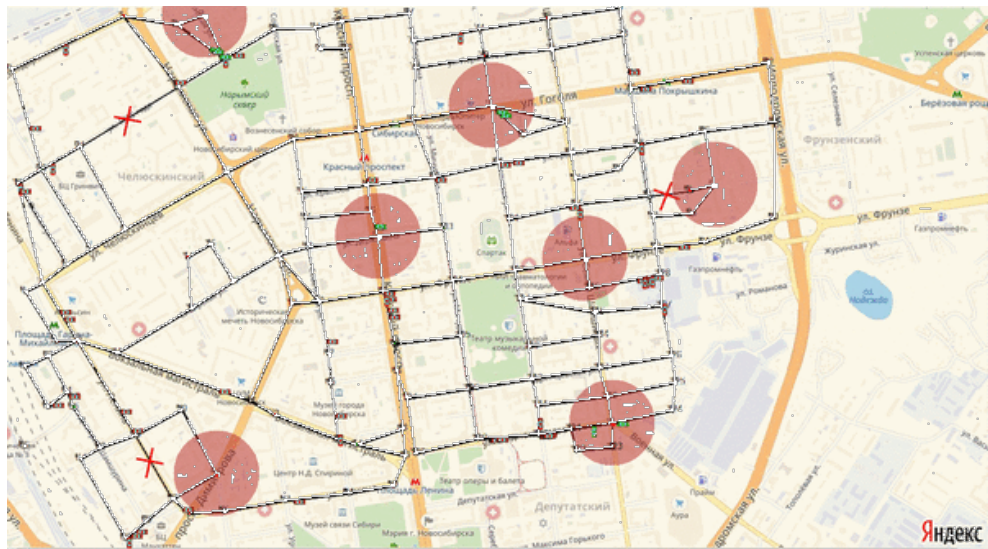


Рисунок 3: Временное удаление ребер на модели сети в связи с недоступностью участков дорог

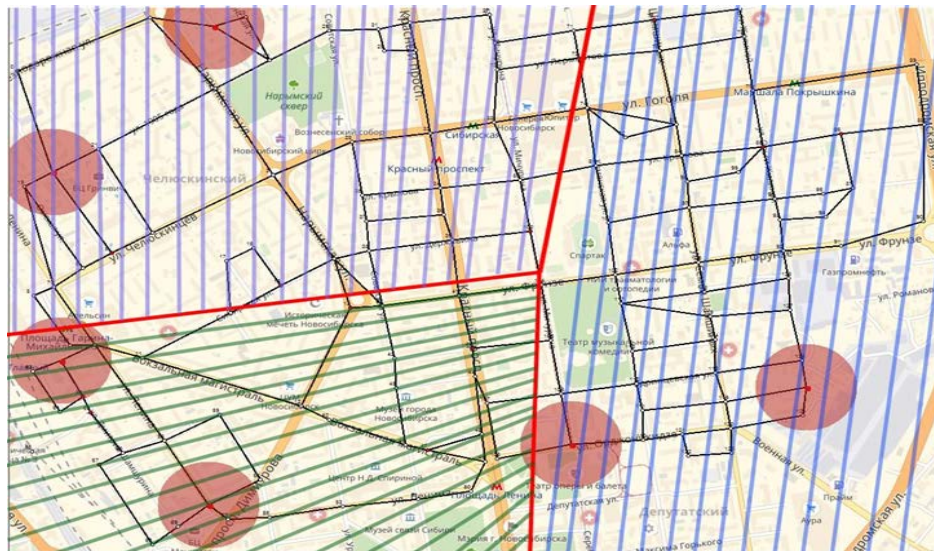


Рисунок 4: Разбиение области на подсети

Заключение

Программная реализация выполнена в среде разработки. Microsoft Visual Studio 2015 с использованием языка C++. Предложенные алгоритмы позволяют получить эффективную по количеству оповещённых автомобилей расстановку устройств мониторинга и оповещения. Результаты исследований могут быть использованы для решения актуальной задачи улучшения обеспечения водителей информацией о ситуациях на транспортной сети мегаполиса.

Список литературы:

1. Bhoi, S.; Khilar, P. Vehicular communication: A survey. IET Netw. 2014, 3, 204–217.
2. Zeadally S., Hunt R., Yuh Shyan Chen, Irwin A., Hassan A. Vehicular ad hoc networks (VANETS): status, results, and challenges // Telecommunication Systems, 50 (2012), pp. 217-241
3. Alpana Dahiya¹, Ajit Noon², Banta Singh Jangra, Jaibir Vehicular Ad hoc Networks (VANETS): Simulation and Simulators International Journal of Research in Management, Science & Technology, Vol. 2, No. 1, 2014.
4. Kun-chan Lan and Chien-Ming Chou Realistic Mobility Models for Vehicular Ad hoc Network (VANET) Simulations // Realistic mobility models for Vehicular Ad hoc Network

- (VANET) simulations 8th International Conference on ITS Telecommunications 2008. p. 362 – 366.
5. DeVore R. A., Temlyakov V. N., “Some remarks on greedy algorithms”, *Advances in Computational Mathematics*, 5 (1996), 173–187.
 6. H. L. Bodlaender, T. Wolle, “A note on the complexity of network reliability problems,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 47, pp. 1971–1988, 2004.)
 7. Ткачёв К. В., Волжанкина К. А. Задача расстановки устройств оповещения для vanet-сетей в условиях некоторых ограничений// Труды 13-й Международной школы-семинара "Проблемы оптимизации сложных систем" в рамках международной конференции IEEE SIBIRCON 2017, Новосибирск, 18-22 сент. 2017 г. [Электронный ресурс]. <http://conf.nsc.ru/opcs2017/ru/proceedings>, стр.100-102.
 8. Rodionov A.S., Choo H., Nechunaeva K.A. Framework for Biologically Inspired Graph Optimization.// *Proceedings of the 5th International Conference on Ubiquitous Information Management and Communication (ICUIMC 2011)*, Seoul, Republic of Korea, 2011, PP 456-467.

*Кирилл Валерьевич Ткачёв – м.н.с. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: tkachev@sscc.ru;*

*Ксения Александровна Волжанкина – м.н.с. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: ksu.nech@rav.sccc.ru;*

МЕТОД МНОЖЕСТВА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Р. В. Хачатуров

ВЦ им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, 119333, Москва, Россия

УДК 519.1

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10014

Рассмотрены различные аспекты решения многокритериальных задач дискретной оптимизации. Показаны преимущества метода множества эквивалентности при решении задач такого рода по сравнению с другими методами. Сформулированы и доказаны теоремы, показывающие соотношение множества Парето-оптимальных решений и решений из множества эквивалентности.

Ключевые слова: множество эквивалентности, множество Парето-оптимальных решений, многокритериальные задачи, дискретная оптимизация.

Введение

Как известно, задачи многокритериальной оптимизации возникают, когда оптимизируемый функционал $F(X) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является вектор-функцией размерности $m \geq 1$

$$F(X) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

т.е. когда существуют несколько независимых критериев $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$, по которым нужно найти наилучшее решение. В этом случае необходимо применять более сложные методы, чем в случае одного критерия. Существуют различные подходы к решению таких задач. В этой работе будет рассмотрен метод множества эквивалентности [1, 2], описаны основные его свойства и показаны его преимущества по сравнению с другими методами решения многокритериальных задач дискретной оптимизации.

1. Метод нахождения множества эквивалентных решений (метод множества эквивалентности) в многомерном псевдометрическом пространстве по нескольким критериям

Суть этого метода заключается в следующем:

1) По каждому критерию $y_l(X)$ решается задача однокритериальной оптимизации, и находится оптимальное решение.

2) По каждому критерию $y_l(X)$ находится множество решений, близких к оптимальному по этому критерию, т.е. отличающихся от оптимального значения не более, чем на заданное число $R_l \geq 0$, $l = 1, 2, \dots, m$, которое назовём допуском по соответствующему критерию. Само найденное множество обозначим через $\Omega_l(R_l)$.

3) Затем находится множество решений, являющееся пересечением всех таких множеств по всем критериям $y_l(X)$. Обозначим это множество через $\Omega_0(R_1, \dots, R_m)$

$$\Omega_0(R_1, \dots, R_m) = \bigcap_{l=1}^m \Omega_l(R_l)$$

Применение этого метода на примерах решения конкретных многокритериальных задач подробно описано в работах [1, 2].

Полученное множество $\Omega_0(R_1, \dots, R_m)$ называется множеством эквивалентности (рис. 1). Любое решение из него удовлетворяет всем формализованным критериям и может быть принято экспертом в качестве окончательного решения. Описанный метод не имеет недостатка метода нахождения множества оптимальных по Парето решений, поскольку при добавлении дополнительного критерия множество эквивалентности никогда не растёт, а наоборот, как правило, сужается [1], что будет формально доказано ниже в Теореме 1.

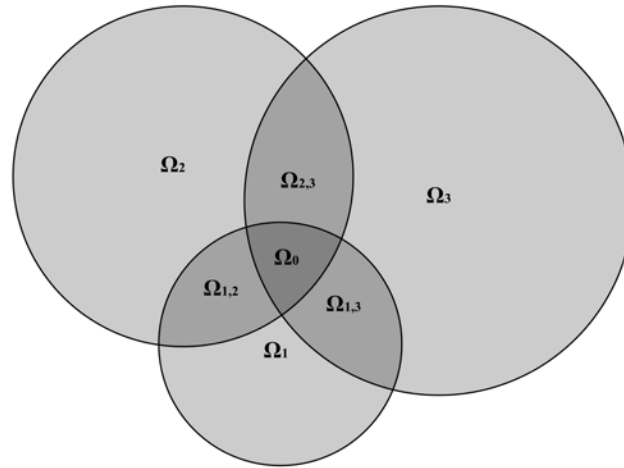


Рис. 1. Иллюстрация нахождения множества эквивалентных решений $\Omega_0(R_1, \dots, R_m)$ многокритериальной задачи

Теорема 1. При увеличении числа критериев множество эквивалентности $\Omega_0(R_1, \dots, R_m)$ не расширяется или сужается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению множество эквивалентности $\Omega_0(R_1, \dots, R_m) = \bigcap_{l=1}^m \Omega_l(R_l)$, поэтому при добавлении ещё одного критерия $y_{m+1}(X)$ с допуском R_{m+1} новое множество эквивалентности $\Omega_0(R_1, \dots, R_{m+1})$ будет определяться следующим образом:

$$\Omega_0(R_1, \dots, R_{m+1}) = \Omega_0(R_1, \dots, R_m) \cap \Omega_{m+1}(R_{m+1}).$$

Отсюда следует, что $\Omega_0(R_1, \dots, R_{m+1}) \subseteq \Omega_0(R_1, \dots, R_m)$.

Теорема 1 доказана.

Отметим, что на практике при добавлении новых критериев множество эквивалентности $\Omega_0(R_1, \dots, R_m)$, как правило, быстро сужается (рис. 1). Следует отметить также, что геометрическая форма множеств оптимальных и близких к оптимальным решений $\Omega_1(R_1), \dots, \Omega_m(R_m)$ в пространстве искомым начальных (входных) параметров может быть самой разнообразной [1].

Вследствие вышесказанного, при решении реальных задач, из полученного описанным методом множества эквивалентности $\Omega_0(R_1, \dots, R_m) = \bigcap_{l=1}^m \Omega_l(R_l)$ эксперт может выбирать решения, удовлетворяющие не только формализованным критериям, но и неформализованным, основанным на его опыте и интуиции, при этом гарантированно не упуская наилучшее

решение, которое при любом количестве дополнительных критериев никогда не окажется вне найденного множества $\Omega_0(R_1, \dots, R_m)$ (в отличие от множества Парето, которое, как правило, растёт при увеличении количества критериев [1]).

2. Обеспечение заведомой непустоты множества эквивалентности

Важным вопросом при нахождении множества эквивалентности $\Omega_0(R_1, \dots, R_m)$ является способ определения значений допусков $R_l \geq 0$, $l = 1, 2, \dots, m$ по каждому из критериев так, чтобы множество эквивалентности $\Omega_0(R_1, \dots, R_m)$ было заведомо не пусто. Предлагаемый ниже метод позволяет решить эту задачу при любом количестве выходных параметров (критериев) $y_l(X)$.

После решения однокритериальных задач оптимизации по каждому из m критериев получим m решений X_0^l ($l = 1, \dots, m$). Выберем некоторую точку $\bar{X} \in D$, исходя из условия наименьшего среднеквадратического отклонения значения функционала $F(\bar{X})$ в этой точке от значений функционала $F(X_0^l)$ в найденных точках X_0^l ($l = 1, \dots, m$)

$$F(\bar{X}) = \min_{X \in D} \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{l=1}^m (F(X_0^l) - F(X))^2},$$

где D – n -мерная область допустимых значений входных параметров.

В дальнейших рассуждениях без ограничения общности будем полагать, что решается задача максимизации по всем критериям. Тогда значения допусков $R_l \geq 0$, $l = 1, 2, \dots, m$ по каждому из критериев $y_l(X)$ определяются исходя из условия, что получаемые множества решений $\Omega_l(R_l)$, близких к оптимальному по каждому критерию, включают в себя найденную точку $\bar{X} \in D$, т.е.

$$R_l = y_l(X_0^l) - y_l(\bar{X}), \quad l = 1, \dots, m.$$

Все полученные с такими значениями допусков R_l множества оптимальных и близких к оптимальным решений $\Omega_l(R_l)$ ($l = 1, \dots, m$)

$$\Omega_l(R_l) = \left\{ X \in D \mid y_l(\bar{X}) \leq y_l(X) \leq y_l(\bar{X}) + R_l = y_l(X_0^l) = \max(y_l) \right\}$$

будут включать в себя точку \bar{X} , поэтому и искомое множество эквивалентности $\Omega_0(R_1, \dots, R_m) = \bigcap_{l=1}^m \Omega_l(R_l)$ заведомо не будет пустым, так как всегда будет включать в себя хотя бы одну эту точку \bar{X} .

3. Соотношение и взаимосвязь множества эквивалентности и множества оптимальных по Парето решений

Сначала сформулируем и докажем Теорему, описывающую важное свойство множества эквивалентности и его пространственную структуру.

Теорема 2. (О вложенности множеств эквивалентности)

Если точка $X'' \in D$ не хуже по всем критериям, чем точка $X' \in D$, т.е. выполнено

$$y_l(X') \leq y_l(X'') \leq \max(y_l)$$

и

$$R_l(X') = \max(y_l) - y_l(X'),$$

$$R_l(X'') = \max(y_l) - y_l(X''),$$

где $R_l(X'') \leq R_l(X')$, $l = 1, \dots, m$,

то для соответствующих множеств эквивалентности справедливо

$$\Omega_0(R_1(X''), \dots, R_m(X'')) \subset \Omega_0(R_1(X'), \dots, R_m(X')).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В m -мерном пространстве критериев множество эквивалентности ограничено снизу по каждому критерию y_l $(m-1)$ -мерной гиперплоскостью (рис. 2)

$$y_l = \max(y_l) - R_l, \quad l = 1, \dots, m.$$

Поэтому если $y_l(X') \leq y_l(X'')$, то соответствующие множества эквивалентности $\Omega_0(R_1(X'), \dots, R_m(X'))$ и $\Omega_0(R_1(X''), \dots, R_m(X''))$ ограничены снизу $(m-1)$ -мерными гиперплоскостями (рис. 2)

$$y_l(X') = \max(y_l) - R_l(X')$$

и

$$y_l(X'') = \max(y_l) - R_l(X''),$$

где $R_l(X'') \leq R_l(X')$, $l = 1, \dots, m$.

Поэтому $\Omega_0(R_1(X''), \dots, R_m(X'')) \subset \Omega_0(R_1(X'), \dots, R_m(X'))$.

Теорема 2 доказана.

Пусть $P(y_1, \dots, y_m)$ – множество оптимальных по Парето решений, определённое традиционным способом [3]:

$$P(y_1, \dots, y_m) = \{A \in D \mid \text{не существует } B \in D: y_l(B) \geq y_l(A), l = 1, \dots, m\}.$$

Теорема 3. Множество эквивалентности $\Omega_0(R_1, \dots, R_m)$ содержит хотя бы одно решение, оптимальное по Парето.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с определением $P(y_1, \dots, y_m)$, для любого $X' \in \Omega_0(R_1, \dots, R_m)$ найдётся хотя бы одна точка $X'' \in D$, оптимальная по Парето $X'' \in P(y_1, \dots, y_m)$, такая, что $y_l(X'') \geq y_l(X')$, $l = 1, \dots, m$.

Но это означает, что X'' соответствует меньшим либо равным значениям допусков R_1, \dots, R_m по всем критериям, чем X' , и, следовательно, в соответствии с Теоремой 2,

$$X'' \in \Omega_0(R_1, \dots, R_m).$$

Теорема 3 доказана.

Следствие из Теоремы 3. Если множество эквивалентности содержит единственное решение, то это решение оптимально по Парето.

Теорема 4. Если в методе множества эквивалентности в качестве начальной общей точки $\overline{X} \in D$ взять единственное оптимальное решение по любому из критериев, то полу-

ченное множество эквивалентности всегда будет содержать хотя бы одно Парето-оптимальное решение, даже если по остальным критериям оптимальные решения не ищутся, а соответствующие им множества $\Omega_l(R_l)$ задаются следующим образом:

$$\Omega_l(R_l) = \left\{ X \in D \mid y_l(\bar{X}) \leq y_l(X) \leq y_l(\bar{X}) + R_l \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению множеств $\Omega_l(R_l)$ начальная точка \bar{X} всегда входит в результирующее множество эквивалентности

$$\bar{X} \in \Omega_0(R_1, \dots, R_m) = \bigcap_{l=1}^m \Omega_l(R_l).$$

При этом единственная оптимальная по одному из критериев точка всегда является и Парето-оптимальной.

Теорема 4 доказана.

Рис. 2 на примере двухкритериальной задачи оптимизации иллюстрирует характерное пространственное расположение и соотношение множества Парето, множеств $\Omega_1(R_1)$, $\Omega_2(R_2)$ оптимальных и близких к оптимальным решений (ОБОР) по критериям y_1 , y_2 соответственно и множества эквивалентности $\Omega_0(R_1, R_2)$.

Эти множества изображены следующими цветами:

- множество Парето-оптимальных решений – зелёным;
- множество ОБОР по первому критерию $\Omega_1(R_1)$ – жёлтым;
- множество ОБОР по второму критерию $\Omega_2(R_2)$ – красным;
- множество эквивалентности $\Omega_0(R_1, R_2)$ – синим.

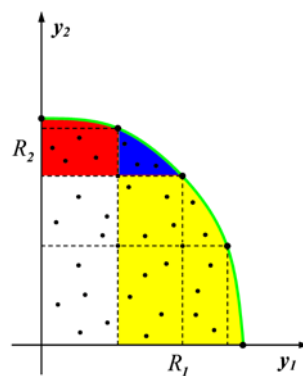


Рис. 2. Характерное расположение множества Парето (зелёный цвет), множеств $\Omega_1(R_1)$ (жёлтый цвет), $\Omega_2(R_2)$ (красный цвет) и множества эквивалентности $\Omega_0(R_1, R_2)$ (синий цвет).

Оценим скорость роста числа элементов множества Парето при увеличении числа критериев задачи. Прежде всего заметим, что множество Парето-оптимальных решений всегда принадлежит $(m-1)$ -мерной гиперповерхности, проходящей через точки максимумов всех критериев $\max(y_1), \dots, \max(y_m)$ в m -мерном пространстве критериев, как это видно на рис. 2, 3. В зависимости от конкретного вида оптимизируемых функционалов, Парето-оптимальные решения могут быть распределены либо по всей этой гиперповерхности, либо по определённым её частям (рис. 3). Поэтому число элементов множества Парето, как правило, растёт пропорционально $(m-1)$ -мерному объёму этой гиперповерхности

$V_{(m-1)} \sim a^{(m-1)}$, где a – характерный линейный размер множества всех возможных значений критериев y_1, \dots, y_m .

За a может быть принято, например, среднее геометрическое значение интервалов изменения всех критериев $a = \sqrt[m]{(\max(y_1) - \min(y_1)) \times \dots \times (\max(y_m) - \min(y_m))}$.

Это означает, что число элементов множества Парето в m -мерном пространстве критериев при увеличении числа этих критериев растёт, как правило, со скоростью геометрической прогрессии (экспоненциально). И при $m > n$ может включить в себя все точки области определения задачи $X \in D$. При этом число элементов множества эквивалентности не растёт никогда, а наоборот, как правило, быстро убывает при увеличении числа критериев (Теорема 1), что иллюстрируют рис. 2, 3.

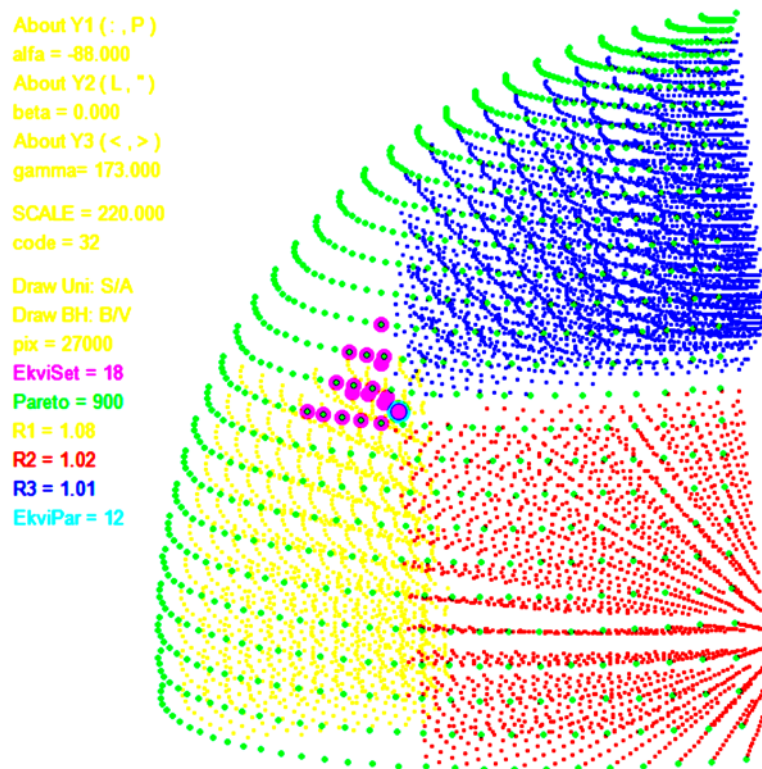


Рис. 3. 3D-пример расположения множества Парето (зелёный цвет), множеств $\Omega_1(R_1)$ (жёлтый цвет), $\Omega_2(R_2)$ (красный цвет), $\Omega_3(R_3)$ (синий цвет) и множества эквивалентности $\Omega_0(R_1, R_2, R_3)$ (фиолетовый цвет).

На рис. 3, полученном в результате вычислений по специально разработанной компьютерной программе, видно взаимное расположение множества Парето, множеств ОБОР $\Omega_1(R_1)$, $\Omega_2(R_2)$, $\Omega_3(R_3)$ и множества эквивалентности $\Omega_0(R_1, R_2, R_3)$ при $m = 3$. Элементы этих множеств изображены следующими цветами:

- множество Парето-оптимальных решений – зелёным;
- множество ОБОР по первому критерию $\Omega_1(R_1)$ – жёлтым;
- множество ОБОР по второму критерию $\Omega_2(R_2)$ – красным;
- множество ОБОР по второму критерию $\Omega_3(R_3)$ – синим;
- множество эквивалентности $\Omega_0(R_1, R_2, R_3)$ – фиолетовым.

Начальная общая точка для множества эквивалентности $\overline{X} \in D$, найденная при помощи алгоритма из раздела 2, изображена фиолетовым кружком с голубой границей. Общее число элементов множества всех возможных значений критериев в данном случае равно 27000, число элементов множества Парето – 900, число элементов множества эквивалентности – 18. При этом 12 из них являются и Парето-оптимальными (фиолетовые с зелёным центром).

Заключение

Итак, описанный метод множества эквивалентности обладает следующими свойствами:

1. Искомое множество эквивалентности $\Omega_0(R_1, \dots, R_m)$ всегда заведомо не пусто.
2. Множество эквивалентности всегда содержит хотя бы одно Парето-оптимальное решение.
3. Если множество эквивалентности содержит единственное решение, то это решение оптимально по Парето.

Отметим, что методы, определяющие $\Omega_0(R_1, \dots, R_m) \neq \emptyset$, являются методами регуляризации [4] для некорректных задач в псевдометрическом пространстве критериев y_1, \dots, y_m (даже при наличии неформализованных критериев), а каждое решение $X' \in \Omega_0(R_1, \dots, R_m)$ – решением такой некорректной задачи [1, 2].

Список литературы

1. Хачатуров Р. В. Многокритериальная оптимизация в псевдометрическом пространстве критериев на примере общей модели деятельности предприятия // ЖВМиМФ. – 2016. Т. 56. № 9. – С. 1602–1613.
2. Khachaturov R. V. Single- and Multiobjective Optimization on the Lattice of Cubes // Journal of Computer and Systems Sciences International. – Pleiades Publishing, 2018. Vol. 57. No. 5. – P. 750–758.
3. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

*Рубен Владимирович Хачатуров – к.ф.-м.н., с.н.с.
ВЦ им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН,
e-mail: rv_khach@yahoo.ie*

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ СКАЧКООБРАЗНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. М. Хрусталеv, К. А. Царьков

*Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
117997, Москва*

УДК 517.977

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10011

В работе предлагаются условия терминальной инвариантности динамических стохастических кусочно-непрерывных управляемых процессов. Рассматриваемые процессы описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих в правой части наряду с детерминированным непрерывным слагаемым стохастическую скачкообразную компоненту в виде интеграла по случайной мере Пуассона. Предполагается, что параметры меры (интенсивность и распределение величин скачков) могут меняться со временем. Начальное условие фиксировано. Под терминальной инвариантностью понимается постоянство значения заданного функционала (терминального критерия), выполненное с вероятностью 1. Формулируются достаточные условия терминальной инвариантности, позволяющие вычислить указанное значение явно. Схема применения условий демонстрируется на модельном примере. В рамках данного примера показаны ключевые свойства терминально инвариантной стратегии управления, которые обеспечивают парирование произвольных реализаций случайного скачкообразного процесса.

Ключевые слова: терминальная инвариантность; скачкообразные случайные процессы; стохастические управляемые системы.

Введение

Проблема построения терминально инвариантных динамических систем весьма актуальна на практике, и в то же время изучена в настоящее время не достаточно хорошо. Особенно это касается математических моделей реальных процессов, учитывающих случайные внешние возмущения. Одной из первых работ в этой области является статья [1]. В ней не только сформулированы и строго обоснованы достаточные условия терминальной инвариантности стохастических систем, но и введены сами понятия терминальной инвариантности по возмущениям и абсолютной терминальной инвариантности.

Настоящая работа является продолжением исследований статьи [1]. В отличие от [1], где были рассмотрены системы диффузионного типа, здесь в аналогичном аспекте исследуется класс скачкообразных стохастических систем. Предлагаемые достаточные условия терминальной инвариантности в терминологии работы [1] обеспечивают инвариантность системы по возмущениям при произвольном начальном условии. Это означает, что в случае фиксированного начального условия терминальный критерий почти наверное принимает постоянное значение.

1. Постановка задачи

Предположим, что управляемая динамическая система описывается стохастическим дифференциальным уравнением [2, 3]

$$dx(t) = f(t, x(t), u(t, x(t), v(t)), v(t))dt + \int_{\mathbb{R}^r} h(t, x(t^-), u(t, x(t^-), v), v) \mu(dt, dv), \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0,$$

где $t \in T := [t_0; t_1] \subset \mathbb{R}$ – время; начальное условие $(t_0, x_0) \in T \times \mathbb{R}^n$ фиксировано; $x(t)$ – n -мерный вектор, характеризующий состояние системы в момент времени t ; $t \rightarrow v(t)$ – r -мерный случайный процесс с заданным распределением (вероятностной мерой) $v(t, \cdot)$; $\mu(\cdot)$ – неоднородная случайная пуассоновская мера на $T \times \mathbb{R}^r$ с интенсивностью $t \rightarrow \Pi(t, \cdot)$, в каждый момент времени t значение $\Pi(t, \cdot)$ – заданная неслучайная ненормированная мера на \mathbb{R}^r с условием $0 < \Pi(t, \mathbb{R}^r) < +\infty$ такая, что выполнено равенство $\Pi(t, \cdot) = \Pi(t, \mathbb{R}^r) v(t, \cdot)$; $(t, x, v) \rightarrow u(t, x, v)$ – m -мерная неслучайная измеримая стратегия управления (заранее не задана, но может быть выбрана произвольно в целях, формулируемых далее); $f(\cdot), h(\cdot)$ – заданные измеримые n -мерные вектор-функции; здесь и далее в работе используется обозначение $x(t^-) := \lim_{s \rightarrow t-0} x(s)$. Предполагается, что процесс $v(t)$ и мера $\mu(\cdot)$ независимы.

Введем в рассмотрение множество \mathcal{D} допустимых процессов управления $(x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющих условию: при заданной стратегии управления $(t, x, v) \rightarrow u(t, x, v)$ случайный процесс $x(t)$ является сильным решением [2, стр. 519] уравнения (1) на T .

На множестве \mathcal{D} определим функционал (терминальный критерий)

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = F(x(t_1)), \quad F(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^n). \quad (2)$$

Систему (1) при фиксированной стратегии $(t, x, v) \rightarrow u(t, x, v)$ будем называть терминально инвариантной, если критерий (2) принимает постоянное значение J_c с вероятностью 1.

Требуется определить стратегию управления, обеспечивающую терминальную инвариантность динамической системы (1) в смысле определения 2.

2. Достаточные условия терминальной инвариантности

Введем в рассмотрение множество Φ функций $(t, x) \rightarrow \varphi(t, x) : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих непрерывные производные $\varphi_t, \varphi_x, \varphi_{xx}$. Для краткости обозначим

$$K(t, x, u, v) = \varphi_t(t, x) + \varphi_x^T(t, x) f(t, x, u, v), \quad (3)$$

$$\Gamma(t, x, u, v) = \varphi(t, x + h(t, x, u, v)) - \varphi(t, x), \quad (4)$$

$$\Lambda(t, x, u, v) = \Gamma(t, x, u, v) - \varphi_x^T(t, x) h(t, x, u, v), \quad (5)$$

$$L(t, x, u, v) = K(t, x, u, v) + \int_{\Theta_1} \Lambda(t, x, u, v) \Pi(t, dv). \quad (6)$$

Если при фиксированной стратегии $(t, x, v) \rightarrow u(t, x, v)$ существуют измеримая ограниченная функция $t \rightarrow \eta(t) : T \rightarrow \mathbb{R}$ и функция $\varphi(\cdot) \in \Phi$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^r$ выполнены условия

1. $\varphi(t_1, x) = F(x)$,
2. $L(t, x, u(t, x, v), v) = \eta(t)$ п.в. на T ,
3. $\Gamma(t, x, u(t, x, v), v) = 0$ всюду на T ,

то система (1) терминально инвариантна, а значение критерия

$$J_c = \varphi(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \eta(t) dt. \quad (7)$$

3. Модельный пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_2(t)dt + x_2(t^-)\mu(dt, \mathbb{R}), \\ dx_2(t) = -x_1(t)dt + u(t, x(t^-))\mu(dt, \mathbb{R}), \end{cases}$$

где $t \in T = [-1; 0]$; $x(-1) = (-1, 1)^T$; интенсивность пуассоновской меры $\Pi(t, \mathbb{R}) \equiv 5$; размерности векторов $n = 2, m = l = 1$; отсутствуют возмущения, связанные со случайным процессом $v(t)$, и можно считать, что $r = 1$.

Требуется обеспечить терминальную инвариантность системы относительно величины $J = x_2(0)$.

Функции $\varphi(\cdot)$ и $\eta(\cdot)$ построим в форме

$$\varphi(t, x) = \psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2, \quad \eta(t) \equiv 0,$$

тогда условия теоремы 3 с учетом обозначений (3)–(6) примут вид

1. $\psi_1(0)x_1 + \psi_2(0)x_2 = x_2$,
2. $\dot{\psi}_1(t)x_1 + \dot{\psi}_2(t)x_2 + \psi_1(t)x_2 - \psi_2(t)x_1 = 0$ п.в. на T ,
3. $\psi_1(t)x_2 + \psi_2(t)u(t, x) = 0$ всюду на T .

Из условия (iii) получаем структуру инвариантного управления

$$u(t, x) = -\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}x_2,$$

а коэффициенты $\psi_1(t), \psi_2(t)$ найдем из условий (i), (ii). В силу произвольности значений x_1, x_2 имеем задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1(t)}{dt} &= \psi_2(t), \quad \psi_1(0) = 0, \\ \frac{d\psi_2(t)}{dt} &= -\psi_1(t), \quad \psi_2(0) = 1, \end{aligned}$$

которая имеет решение $\psi_1(t) = \sin(t), \psi_2(t) = \cos(t)$. Таким образом,

$$u(t, x) = -\text{tg}(t)x_2.$$

На рисунках 1–2 представлены результаты простейшего численного моделирования методом Эйлера для нескольких реализаций траекторий компонент вектора состояния $x(t)$ и управления $u(t, x(t))$.

Значения величины $J = x_2(0)$ отличаются друг от друга в пределах погрешности и равны 1.386, 1.382, 1.387 соответственно для полученных реализаций. Точное терминальное значение критерия по формуле (7) $J_c = \sin(1) + \cos(1) \approx 1.381$.

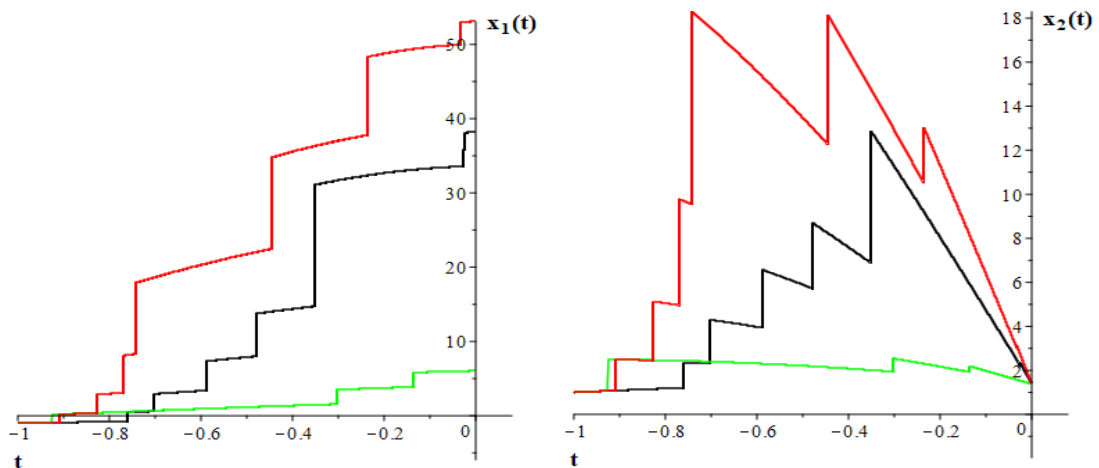


Рисунок 1: Три реализации (черный, зеленый и красный цвета) состояния $x(t)$

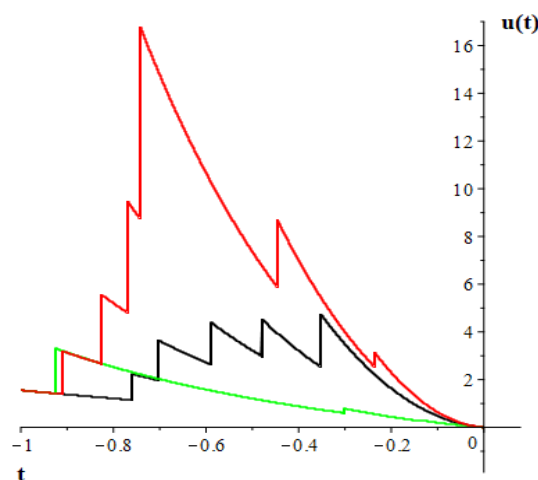


Рисунок 2: Три реализации (цвета те же) управления $u(t, x(t))$

Результаты моделирования свидетельствуют о том, что величина $x_2(0)$ не меняется в зависимости от реализации случайной меры $\nu(\cdot)$. Таким образом, найденная стратегия управления действительно обеспечивает терминальную инвариантность заданной динамической системы.

Список литературы

1. Хрусталеv М.М. Терминальная инвариантность стохастических систем диффузионного типа // *АиТ*. 2018. 8. С. 81–100.
2. Корольюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
3. Øksendal B., Sulem A. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. – Berlin Heidelberg, Germany: Springer, 2005. – 266 p.

Хрусталеv Михаил Михайлович – д-р. физ.-мат. наук, гл. науч. сопр. Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН; email: mmkhrustalev@mail.ru;
Царьков Кирилл Александрович – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сопр. Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН; email: k6472@mail.ru

О СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ ПОИСКА ГИПЕРСЕТИ МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ

А. Н. Юргенсон, Д. А. Мигов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
630090, Новосибирск

УДК 519.8:51-74

DOI: 10.24411/9999-018A-2019-10012

В статье рассматривается задача поиска гиперсети минимальной стоимости, а именно задача оптимальной укладки вторичной сети в первичную сеть. Показано, что данная задача является NP-трудной. В качестве известной NP-трудной задачи, которая сводится к изучаемой задаче, взята задача о нахождении дерева Штейнера на графе.

Ключевые слова: графы, гиперсеть, дерево Штейнера.

Введение

Задачи, связанные с поиском маршрута в иерархических сетях возникают в самых различных областях. Примерами подобных задач являются поиск оптимальных маршрутов для прокладки инженерных сетей, размещение объектов на заданной территории, задачи размещения логистических объектов и систем электроснабжения, проектирование и реконструкция транспортных сетей. Для моделирования различных сетевых объектов обычно используется графы и гиперграфы. Однако, аппарат теории графов и гиперграфов не всегда позволяет учесть иерархичность сетевого объекта. Поэтому используются другие сетевые модели: вложенные графы, многоуровневые комплексные сети, гиперсети, и другие.

В настоящей работе в качестве математической модели иерархической сети используется гиперсеть, поскольку в ней учитывается реализация одной структуры в другую. В следующем пункте доказана NP-трудность задачи нахождения гиперсети минимальной стоимости, т.е. задачи оптимальной укладки вторичной сети в первичную сеть. Эта задача имеет различные приложения, например, при проектировании инженерных сетей и структурированных кабельных сетей.

1. Постановка задачи

Понятие гиперсети было введено в [1] следующим образом.

Определение: Гиперсетью называется объект $HS = (X, V, R; F)$, включающий в себя [1]: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – множество вершин; $PS = (X, V)$ – граф первичной сети, где $V = (v_1, v_2, \dots, v_g)$ – множество ветвей первичной сети; $WS = (X, R)$ – граф вторичной сети, где $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ – множество ребер вторичной сети; $F : R \rightarrow 2V$ – отображение, сопоставляющее каждому элементу $r \in R$ маршрут из ветвей в графе PS .

Графы PS и WS являются не ориентированными.

Введем еще некоторые обозначения: $a(v)$ – стоимость ветви $v \in V$ первичной сети; $b(r)$ – стоимость ребра $r \in R$ вторичной сети.

На рис. 1 представлены первичная сеть PS в виде решетки и вторичная сеть WS , вложенная в первичную по следующим маршрутам $R = \{(1, 4, 5), (1, 4, 7), (7, 8, 9)\}$.

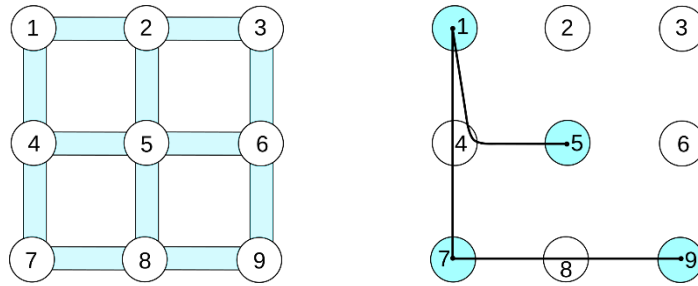


Рисунок 1: Пример гиперсети

Постановка задачи

Пусть заданы графы первичной и вторичной сети $PS = (X, V)$ и $WS = (X, R)$. Найти отображение F , т.е. вложение вторичной сети в первичную, такое, что стоимость полученной гиперсети HS минимальна.

$$Q(HS) = \left(\sum_{v \in F(r), \forall r \in R} a(v) + \sum_{r \in R} b(r) \right) \rightarrow \min \quad (1)$$

Стоимость ветви $v \in V$ первичной сети учитывается только один раз, хотя ветвь v может участвовать в нескольких маршрутах (ребрах вторичной сети).

Без ограничения общности, будем считать, что граф первичной сети PS является связным. Тогда для каждого ребра можно найти связный маршрут, соединяющий выделенные вершины, и поставленная задача (1) разрешима.

2. Установление факта NP-трудности задачи

Прежде чем решать поставленную задачу нужно оценить ее сложность, т.е. понять, разрешима ли задача за полиномиальное время или нет. Одним из самых простых приемов является метод “сужения” [3]. Нужно показать, что задача включает в себя в качестве частного случая известную NP-трудную задачу.

1) Пусть стоимость ветвей первичной сети $a(v) = 0 \quad \forall v \in V$ (или стоимость ветвей пренебрежимо мала, по сравнению со стоимостью ребер). Т.е. стоимость гиперсети будет зависеть только от стоимости ребер r вторичной сети. Тогда для ребра подойдет любой маршрут в PS , соединяющий вершины этого ребра. Например, можно воспользоваться классическим поиском в ширину. Задача (1) полиномиально разрешима.

Часто стоимость ребра зависит от длины ребра (сумма длин ветвей маршрута).

Пусть $l(v)$ – длина ветви $v \in V$. Тогда $b(r) = C \cdot \sum_{v \in F(r)} l(v)$, где C некоторая константа. То-

гда задача (1) решается алгоритмом поиска кратчайших расстояний на первичном графе PS , например алгоритмом Флойда [4]. Т.е. задача (1) полиномиально разрешима.

2) Пусть стоимость ребер вторичной сети $b(r) = 0 \quad \forall r \in R$ (или стоимость ребер пренебрежимо мала). Тогда стоимость гиперсети будет сумма стоимостей все ветвей первичной сети, участвующих в маршрутах.

Если $|R| = 1$, то задача сводится к поиску кратчайшего пути (по стоимости $a(v)$) между двумя вершинами на графе первичной сети, например алгоритмом Дейкстры [4]. Задача (1) полиномиально разрешима.

Пусть $|R| \geq 2$.

2.1) Пусть граф вторичной сети WS является связным графом. Покажем, что решением задачи (1) будет дерево Штейнера на графе PS . Как известно, задача дерево Штейнера на графе является NP -трудной [3].

Будем доказывать от противного. Пусть вложение WS в PS не является деревом в PS , т.е. есть циклы, и дерево имеет минимальную стоимость.

2.1.1) Рассмотрим случай, когда граф WS будет деревом, т.е. не содержит циклов.

а) Пусть в первичной сети PS два маршрута AD и AC образуют цикл (рис. 2,а), точка B – точка их пересечения. Обозначим части маршрута до точки B как m_1 и m_2 . Стоимость этих частей маршрутов обозначим $|m_1|$ и $|m_2|$.

Если $|m_1| > |m_2|$, то можно реализовать маршрут m_1 вдоль m_2 . Тогда стоимость гиперсети уменьшится на $|m_1|$, что противоречит условию, что дерево в PS имеет минимальную стоимость.

б) Пусть в первичной сети PS три маршрута AD , AE , EC образуют цикл (рис. 2,б), точка B – точка их пересечения. Обозначим эти части маршрута как m_1 , m_2 , m_3 .

Если $|m_1| \geq |m_2| + |m_3|$, то можно реализовать маршрут m_1 вдоль m_2 и m_3 (AEB). Тогда стоимость гиперсети уменьшится на $|m_1|$, что противоречит условию, что дерево в PS имеет минимальную стоимость.

Если $|m_1| < |m_2| + |m_3|$ и $|m_2| < |m_3|$, то можно реализовать маршрут m_3 вдоль m_2 и m_1 (EAB) (рис. 2,в). Тогда стоимость гиперсети уменьшится на $|m_3|$, что противоречит условию, что дерево в PS имеет минимальную стоимость.

в) Если в первичной сети PS цикл образуют 4 и больше маршрутов, то случай аналогичен предыдущему, самый дорогой маршрут перереализовывается по остальным маршрутам.

Итак, если граф WS – дерево, то маршруты на первичной сети PS тоже образуют дерево для гиперсети минимальной стоимости.

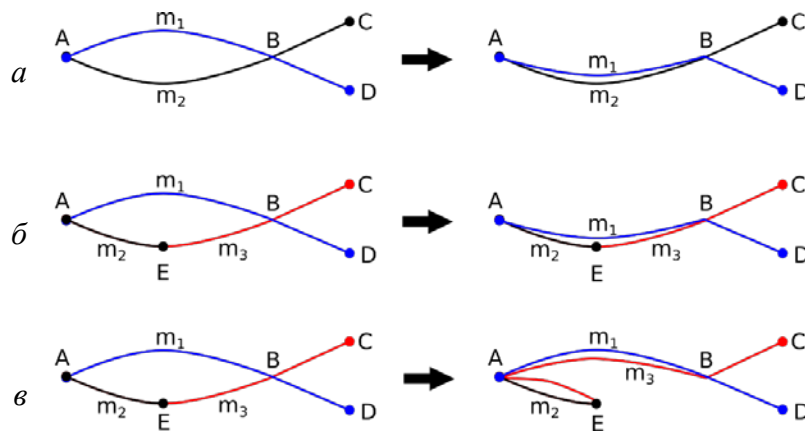


Рисунок 2: Пример маршрутов в PS образующих цикл

2.1.2) Рассмотрим случай, когда граф WS не будет деревом, т.е. содержит циклы. Покажем, что гиперсеть минимальной стоимости образует дерево на графе PS .

Пусть это не так и на графе PS есть циклы. На рис. 3 маршруты AB , AC , CB образуют цикл. Выберем маршрут наибольшей стоимости (например, m_1) и реализуем его вдоль маршрутов m_2 и m_3 (ACB). Тогда стоимость гиперсети уменьшится на величину $|m_1|$. Это противоречит условию, что дерево в PS имеет минимальную стоимость.



Рисунок 3: Пример маршрутов в PS , образующих цикл

Итак, гиперсеть минимальной стоимости образует дерево на графе PS . Это есть задача поиска дерева Штейнера на графе. Следовательно, задача (1) является NP-трудной.

2.2) Пусть граф вторичной сети не является связным графом (рис. 4,а), т. е. решением задачи является лес (компонентами связности леса являются деревья [2]).

Введем дополнительную вершину v' (рис. 4,б) и соединим дополнительными ребрами и ветвями нулевой стоимости с компонентами связности вторичного графа (на рис. 4б эти ребра отмечены красным). Каждая компонента связности соединится одним ребром.

Полученный граф является связным. Очевидно, что найденное на данном графе дерево Штейнера будет являться решением исходной задачи.

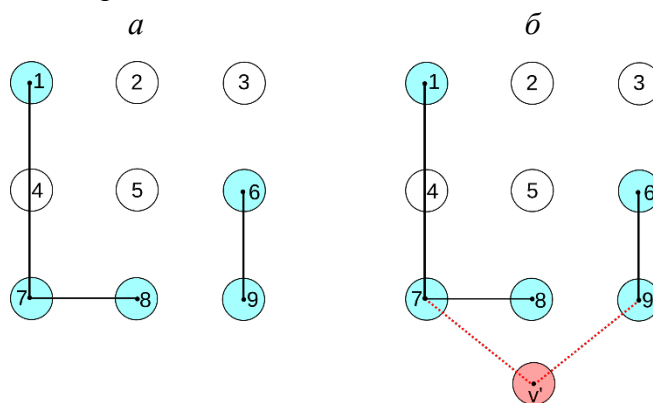


Рисунок 4: Пример гиперсети, для несвязного графа WS

Итак, доказано следующее утверждение

Утверждение: Задача (1) является NP-трудной.

Заключение

Рассмотренная задача оптимальной по критерию стоимости укладки вторичной сети в первичную сеть является NP-трудной, как доказано в данной статье, путём сведения к ней задачи о нахождении дерева Штейнера. Задача о нахождении дерева Штейнера на графах является широко известной задачей [5], существует множество приближенных алгоритмов для ее решения. Однако, учитывая специфику рассматриваемой задачи, например, для проектирования инженерных сетей, авторами ранее был разработан ряд приближённых алгоритмов её решения [6, 7]. В том числе, и с учётом надёжности проектируемой сети, что также является NP-трудной задачей, т.к. содержит в себе задачу, NP-трудность которой установлена выше.

Список литературы

1. Попков В.К. Математические модели связности. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2006. 490 с.
2. Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Словарь по графам в информатике. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 300 с.
3. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
4. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М: Мир, 1978. 432 с.
5. Гордеев Э. Н., Тарасцов О. Г. Задача Штейнера. Обзор // Дискр. матем. 1993. Том 5, вып. 2. С. 3–28.

6. Токтошов Г.Ы., Юргенсон А.Н., Мигов Д.А. Оптимизация маршрутов прокладки магистрального трубопровода для транспортировки георесурсов // Изв. Том. политехн. ун-та. Инжиниринг георесурсов. 2019. Т. 330, № 6. С. 41–49.
7. Попков В.К., Токтошов Г.Ы., Юргенсон А.Н. Об одном подходе к оптимизации инфраструктуры инженерных сетей // Вестн. СибГУТИ. 2012. № 3. С. 11–28.

*Юргенсон Анастасия Николаевна – канд. физ.-мат. наук, науч. сотр.
Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: nastya@rav.sccc.ru;*

*Мигов Денис Александрович – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.
Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: mdinka@rav.sccc.ru.*

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ ВОЗДУШНО-СТРУЙНОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ УМЕРЕННЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА Абдимуталипова Зейнура Каныбековна, Курбаналиев Абдикерим Ырысбаевич..... | 3 |
| РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ Z-ЧИСЕЛ Бекмуратов Тулкун Файзиевич, Мухамедиева Дилноз Тулкуновна..... | 10 |
| КРИТЕРИИ ОПТИМИЗАЦИИ «ЯДЕРНОГО» АЛГОРИТМА ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ Булгакова Татьяна Евгеньевна, Войтишек Антон Вацлавович..... | 15 |
| ЗАДАЧА ВЫПОЛНЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ РАБОТ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МАШИНАХ Герасименко Наталья Вадимовна..... | 24 |
| ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В ВОЗДУШНЫХ ПОЛОСТЯХ Калбекова Махбурат Жамшитбековна, Курбаналиев Абдикерим Ырысбаевич, Жайнаков Аманбек Жайнакович..... | 33 |
| РОЛЬ МОДЕЛИ ТИПИЗИРОВАННОГО АТРИБУТНОГО РАЗГРАНИЧЕНИЯ ДОСТУПА В ВЫПОЛНЕНИИ ЗАДАЧ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ Калимолдаев Максат Нурадилович, Бияшев Рустем Гакашевич, Рог Ольга Алексеевна .. | 39 |
| МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ БОЛЬШИХ ВИХРЕЙ В ПАКЕТЕ OPEN FOAM Калмурзаева Суйумкан Сагыналиевна, Курбаналиев Абдикерим Ырысбаевич, Мамаев Самарбек Сатыбалдыевич, Акназарова Суйумкан Сагыналиевна .. | 46 |
| МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАВОДНЕНИЯ В ПАКЕТЕ OPENFOAM Ойчуева Бурулгул Рахманбердиевна, Курбаналиев Абдикерим Ырысбаевич, Жайнаков Аманбек Жайнакович .. | 52 |
| ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБТЕКАНИЯ ГОРЫ СУЛЕЙМАН Осконбаев Маралбек Чотоевич, Турганбаева Акпари Балтабаевна .. | 59 |
| МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ПОЧВОГРУНТАХ Сагындыкова Рахат Кайыпбековна, Курбаналиев Абдикерим Ырысбаевич, Дыйканова Айнура Тынчыбековна, Жусупбекова Самара Төлөбековна .. | 64 |
| ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОНИТОРИНГА В СЕТЯХ С ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ К. В. Ткачѳв, К. А. Волжанкина..... | 68 |
| МЕТОД МНОЖЕСТВА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ Р. В. Хачатуров..... | 74 |
| ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ СКАЧКООБРАЗНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ Хрусталев Михаил Михайлович, Царьков Кирилл Александрович .. | 81 |
| О СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ ПОИСКА ГИПЕРСЕТИ МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ А. Н. Юргенсон, Д. А. Мигов..... | 85 |