ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В. И. Хохлюк

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет

УДК 519.854

Рассмотрены три класса оптимизационных задач: групповая задача минимизации, двоичная задача оптимизации и целочисленная линейная задача оптимизации. Для каждого класса вводится понятие многовершинника. Формулируются и доказываются новые свойства этих многовершинников. В прямом методе дискретной оптимизации, разработанном автором для численного решения целочисленной линейной задачи оптимизации, строятся групповое уравнение и справедливое неравенство, которые позволяют двигаться от одной вершины многовершинника к другой как в симплекс-методе.

Ключевые слова: группа, конечная абелева группа, групповое уравнение, справедливое неравенство, многовершинник, задачи оптимизации.

Введение. Приведем известные определения, используемые далее в тексте [1, 2].

Определение 1. Соответствие, в силу которого каждой паре элементов a,b множества M, взятых в данном порядке, соответствует единственный элемент c того же множества M, называется алгебраической операцией, определенной в M.

Определение 2. Множество G с определенной в нем алгебраической операцией $\cdot$ называется группой, если:

– операция ассоциативна, то есть $(a{\cdot}b){\cdot}c = a{\cdot}(b{\cdot}c)$ для любых a,b,c из G;

– операция гарантирует единицу, то есть в G существует такой элемент e (единица), что $e{\cdot}a = a{\cdot}e = a$ для любого a из G;

– операция гарантирует обратные элементы, то есть для любого a из G существует такой элемент x из G (обратный к a), что $x{\cdot}a = a{\cdot}x = e$ [1, 2].

Определение 3. Порядок элемента g группы G – наименьшее положительное целое число p такое, что выполняется $pg = gp = \underbrace{g + g + ... + g}_{p} = g_0$, где g_0 – ноль группы.

Определение 4. Группа G называется циклической группой, если она состоит из кратных одного из своих элементов.

Определение 5. Справедливым неравенством для непустого множества S называется линейное неравенство с действительными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{r} \pi_j x_j \ge \pi_0, \pi x \ge \pi_0,$$

которое выполняется для всех точек x из множества S ($S \subseteq \mathbf{R}^r$).

Справедливое неравенство для множества S геометрически задаёт замкнутое полупространство, в котором целиком находится множество S.

Для пустого множества S любое неравенство $\pi x \ge \pi_0$ по соглашению является справедливым неравенством.

Постановка задачи. Рассмотрим групповое уравнение:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{i_j} t_j = h,$$

$$g_{i_k} \neq g_{i_l} \text{ при } k \neq l, \text{ для } j = 1,2,\dots,n \text{ выполняются условия } g_{i_j} \in G_d, \quad (1)$$

$$g_{i_j} \neq g_0, \quad t_j \in \mathbf{Z}_+^1, \quad h \in G_d,$$

где G_d – конечная абелева группа порядка d, g_0 – ноль этой группы, $\mathbf{Z}_+^1$ – множество всех неотрицательных целых чисел.

Коэффициентами группового уравнения (1) являются различные элементы группы G_d, отличные от нуля этой группы. Неотрицательные целочисленные значения переменных $t_1, t_2, ..., t_n$ дают кратные соответствующих коэффициентов.

Рассмотрим пример 1, иллюстрирующий понятие группы.

Пример 1. Алгебраическая операция в множестве $G = \{g_0, g_1, g_2, g_3\}$, состоящем из четырех элементов произвольной природы, определяется следующим образом:

$$g_i + g_j = g_{(i+j(\mathrm{mod}\,4))}, i = 0,1,2,3; j = 0,1,2,3 \quad (2)$$

На пересечении строки i и столбца j в табл. 1 находится сумма $g_i + g_j$.

Таблица 1 – Конечная абелева группа

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	g_0	g_1	g_2	g_3
1	g_1	g_2	g_3	g_0
2	g_2	g_3	g_0	g_1
3	g_3	g_0	g_1	g_2

Определение 6. Многовершинником P группового уравнения (1) называется выпуклая оболочка всех неотрицательных целочисленных решений этого уравнения.

Определение 7. Выпуклой оболочкой множества X называется наименьшее выпуклое множество, содержащее X.

Свойства многовершинника группового уравнения.

Свойство 1. Многовершинник P группового уравнения является либо пустым (уравнение (1) не имеет решений), либо n-мерным.

Доказательство. Разделим это доказательство на две части.

Часть 1. Многовершинник P является пустым тогда и только тогда, когда групповое уравнение (1) не имеет решений. Приведем пример такого уравнения:

$$g_2 t_1 = g_3, g_2 \in G_6, g_3 \in G_6, t_1 \in \mathbf{Z}_+^1. \quad (3)$$

Групповая операция в G_6 состоит в сложении по модулю 6 индексов элементов группы. Например, $g_1 + g_4 = g_5, g_1 + g_5 = g_0, g_4 + g_5 = g_3$.

Подставляя в левую часть $g_2 t_1$ неотрицательные целые числа 0,1,2,3,4…, получаем табл. 3, 4.

Из табл. 2, 3 видно, что левая часть $g_2 t_1$ может принимать только значения g_0, g_2, g_4 и не равна правой части g_3.Следовательно, уравнение (3) не имеет решений.

Часть 2. Пусть групповое уравнение (1) имеет хотя бы одно решение $t' = (t'_1, t'_2, ..., t'_n)$.

Рассмотрим векторы $p_l k_l e_l, l = 1, 2, ..., n,$ где p_l – порядок элемента g_{i_l} , k_l – любое неотрицательное целое число, e_l – l-й единичный вектор.

Таблица 2 – Кратные элемента g_2

t_1	$g_2 t_1$
0	g_0
1	g_2
2	g_4
3	g_0
4	g_2
..	..

Таблица 3 – Разбиение множества $\{0,1,2,\ldots\}$ на 3 класса

g_0	g_2	g_4
$g_2 0 = g_0$ $g_2 3 = g_0$ $g_2 6 = g_0$.	$g_2 1 = g_2$ $g_2 4 = g_2$ $g_2 7 = g_2$.	$g_2 2 = g_4$ $g_2 5 = g_4$ $g_2 8 = g_4$.

Докажем, что $t' + \sum_{l=1}^{n} p_l k_l e_l$ – решения группового уравнения (1):

$$\sum_{j=1}^{n} g_{i_j}\left(t_j' + \left(\sum_{l=1}^{n} p_l k_l e_l\right)_j\right) = \sum_{j=1}^{n} g_{i_j} t_j' + \sum_{j=1}^{n} g_{i_j}\left(\sum_{l=1}^{n} p_l k_l e_l\right)_j = h + \sum_{j=1}^{n} g_{i_j} p_j k_j 1 = h + \sum_{j=1}^{n} g_0 k_j 1 =$$

$$= h + \sum_{j=1}^{n} g_0 = h + g_0 = h.$$

Векторы $t' + p_l k_l e_l, l = 1,2,\ldots,n,$ линейно независимы за счет единичных векторов e_l. Из этого следует, что часть многовершинника P является n-мерной. Следовательно, и весь многовершинник P является n-мерным.

Пример 2. Рассмотрим групповое уравнение

$$g_1 t_1 + g_2 t_2 + g_3 t_3 = g_3, t \in \mathbf{Z}_+^3, g_{i_j} \in G_4, g_3 \in G_4 . \qquad (4)$$

Таблица 4– Стандартная таблица для группового уравнения (4)

g_{i_s}				g_1		g_2		g_3	
d_s				4		2		4	
r_s			3		1		1		
π_s				1/3		2/3		1	
g	Ψ_0	i_0	Ψ_1	i_1	Ψ_2	i_2	Ψ_3	i_3	
g_0		0		0		0		0	
g_1		$+\infty$	0	1/3	1	1/3	1	1/3	1
g_2		$+\infty$	0	2/3	1	2/3	2	2/3	2
g_3		$+\infty$	0	3/3	1	3/3	2	3/3	3
π_s				1/3		2/3		1	
v_1			3		0		0		
v_2				1		1		0	
v_3				0		0		1	

Рассмотрим 1-, 2- и 3-мерные многовершинники.

Одномерный многовершинник получается, если рассмотреть 5 первых столбцов табл. 4. Он представляет собой луч, исходящий из точки t_1=3 и лежащий на неотрицательной полуоси Ot_1, имеет одну грань и одну вершину, которые представлены точкой t_1=3 (см. рис. 1).

2-мерный многовершинник получается, если рассмотреть 7 первых столбцов табл. 4. Этот многовершинник имеет две вершины: (3,0), (1,1).

2-мерный многовершинник имеет три грани: луч [(3,0),($+\infty$, 0)), отрезок [(3,0),(1,1)], луч [(1,1), (1, $+\infty$)).

Этот 2-мерный многовершинник показывает, что неотрицательная полуось Ot_2 не содержит грань многовершинника (см. рис. 2).

3-мерный многовершинник получается, если рассмотреть 9 первых столбцов табл. 4. Этот многовершинник имеет 3 вершины и 5 граней: две построенные плоскости и три координатные плоскости. Одна из построенных плоскостей находится в табл. 4, а вторая – в табл. 5, полученной для группового уравнения [3] (рис. 3).

$$g_3 t_3 + g_2 t_2 + g_1 t_1 = g_3, \quad (5)$$

Этот 3-мерный многовершинник показывает, что точка (0,2,1) не является вершиной.

Таблица 5

g_{i_s}				g_3		g_2		g_1	
d_s				4		2		4	
r_s			1				1		
π_s				1		0		1	
g	Ψ_0	i_0	Ψ_1	i_1	Ψ_2	i_2	Ψ_3	i_3	
g_0		0		0		0		0	
g_1		$+\infty$	0	3	1	1	2	1	3
g_2		$+\infty$	0	2	1	0	2	0	2
g_3		$+\infty$	0	1	1	1	2	1	3
π_s				1		0		1	
v'_1				1		0		0	
v'_2				1		2		0	
v'_3				0		1		1	

Для этих трех случаев легко построить рисунки.

Свойство 2. Многовершинник *P* представляет собой неограниченную выпуклую область, все крайние точки (вершины) которой являются целочисленными. Поэтому в работах по дискретной оптимизации [3, 4] многовершинник *P* называется целочисленным многогранником (Polyhedron – многогранник, Polytope – многовершинник).

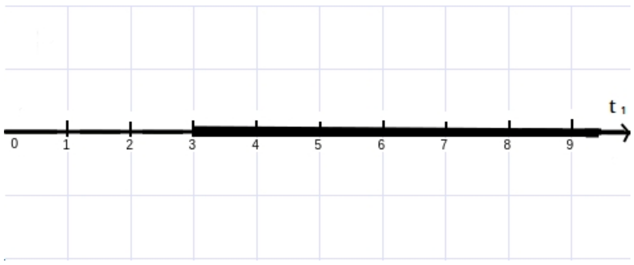

Рис. 1. Одномерный многовершинник

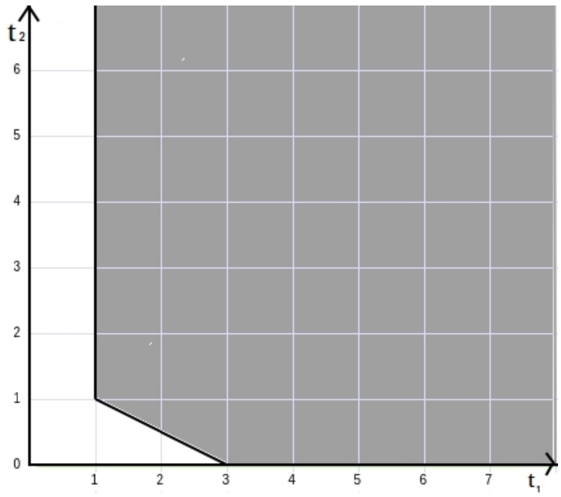

Рис. 2. 2-мерный многовершинник

Доказательство. Из доказательства свойства 1) за счет увеличения k_l получаем неограниченную выпуклую область. Из определения выпуклой оболочки следует, что все вершины многовершинника *P* являются целочисленными.

Свойство 3. Если неравенство с действительными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n}\pi_j t_j \geq \pi_0 \qquad (6)$$

является справедливым для многовершинника *P* и если гиперплоскость, соответствующая неравенству (6), содержит (n-1)-мерную грань многовершинника *P*, то $\pi_j \geq 0, j = 1,2,...,n, \pi_0 > 0$.

Координатная гиперплоскость $t_j = 0$ может и не содержать (*n*–1)-мерную грань многовершинника *P*. Существует пример, показывающий это (см. 2-х мерный многовершинник в примере 2).

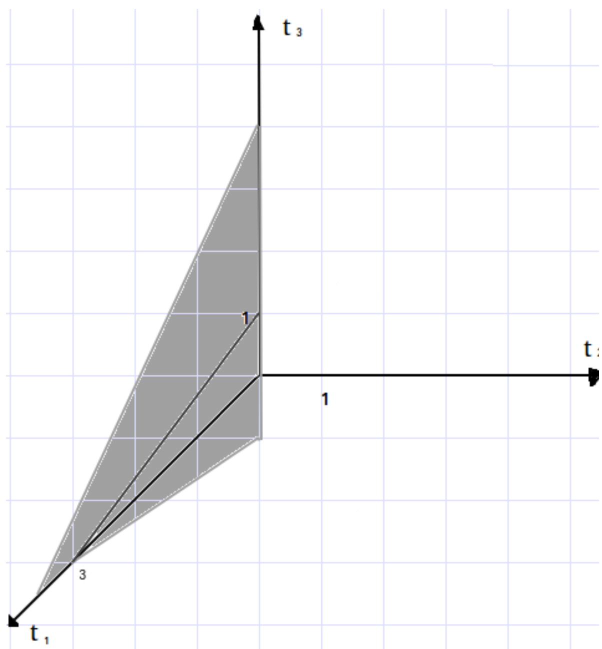

Рис. 3: 3-мерный многовершинник

Доказательство. Неравенство (6) – справедливое неравенство. Здесь *S* – множество всех решений группового уравнения (1), так как справедливое неравенство должно выполняться для всех точек из множества *S*.

Рассмотрим случай, когда один коэффициент $\pi_j < 0$. Тогда неравенство (6) не будет справедливым. Из доказательства свойства 1) при достаточно больших k_j неравенство (6) не выполняется. Левая часть неравенства будет отрицательной, в то время как правая часть равна $\pi_0 > 0$. Следовательно, не существует неравенств с отрицательными коэффициентами, задающих (*n*-1)-мерные грани.

Свойство 4. Понятие многовершинника вводится для групповой задачи минимизации, для двоичной задачи оптимизации и для целочисленной линейной задачи оптимизации.

В прямом методе дискретной оптимизации, разработанном автором для численного решения целочисленной линейной задачи оптимизации, строятся групповое уравнение и справедливое неравенство, которые позволяют двигаться от одной вершины многовершинника к другой как в симплекс-методе [3].

Заключение. Изложенные результаты являются теоретической основой для разработки алгоритмов, реализуемых в виде компьютерных программ, способных решать практические задачи большого размера за приемлемое время. Вычислительные усилия направлены на сокращение временного разрыва между решением целочисленной линейной задачи оптимизации и решением соответствующей ей линейной задачи.

Список литературы

1. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. 432 с.
3. Хохлюк В.И. Методы дискретной оптимизации: Учеб. пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2013. Ч. 1. 154 с.
4. Hu T.C. Integer Programming and Network Flows. Addison-Wesley, 1969. 432 p.

Виталий Иванович Хохлюк – д.ф.-м.н.; ст. науч. сотр.
Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
доцент Новосибирского государственного университета;
Новосибирск, e-mail: vit@academ.org