

# УСЛОВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

А. С. Алдохин<sup>1</sup>, А. В. Войтишек<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет,

<sup>2</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

УДК 519.676

В данной работе представлен следующий подход к получению значений условно-оптимальных параметров стохастических численных моделей, представляющих собой двухпараметрические алгоритмы приближения функционалов от решения (или самого решения) интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Верхняя граница погрешности, зависящая от двух параметров модели, приравнивается к требуемому уровню погрешности. Из полученного уравнения один параметр выражается через другой и подставляется в выражение для трудоемкости алгоритма. Условно-оптимальным параметром модели объявляется минимум получаемой функции одного переменного.

*Ключевые слова:* численные модели (алгоритмы), условно-оптимальные параметры, заданный уровень погрешности, минимизация трудоемкости, интегральное уравнение Фредгольма второго рода, линейный функционал

**1. Условная оптимизация двухпараметрических алгоритмов.** В данной работе речь идет о согласованном выборе параметров численных моделей (алгоритмов), обеспечивающем заданный уровень погрешности (обозначим его  $\gamma$ ) при минимальных вычислительных затратах  $S$ .

Проще всего такой выбор реализуется при наличии двух параметров модели (обозначим их  $M$  и  $N$ ) следующим образом (см., например, [1, 2]).

Строится верхняя граница  $UP(M, N)$  погрешности алгоритма  $\delta(M, N)$ , зависящая от параметров  $M$  и  $N$ :

$$\delta(M, N) \lesssim UP(M, N). \quad (1.1)$$

Эта функция двух переменных приравнивается величине  $\gamma$ . Из уравнения вида

$$UP(M, N) = \gamma \quad (1.2)$$

один из параметров (например,  $N$ ) выражается через другой:  $N = \psi(M)$ .

Это соотношение подставляется в выражение для затрат  $S(M, N)$  (которое тоже зависит от параметров  $M$  и  $N$ ). В результате получается функция  $\tilde{S}(M)$  одного переменного  $M$ , которая исследуется на минимум с помощью известных приемов математического или численного анализа.

Найденные значения  $M_{min}(\gamma), N = \psi(M_{min}(\gamma))$  объявляются *условно-оптимальными параметрами* модели (алгоритма). «Условность» такого способа оптимизации связана с тем, что в левой части уравнения вида (1.2) используется не сама погрешность алгоритма  $\delta(M, N)$ , а ее верхняя граница  $UP(M, N)$  (а вдруг эта граница неточная, грубая?!).

Следуя работам [1, 2], в качестве основных примеров применения описанного подхода рассмотрим модели, описываемые *интегральным уравнением Фредгольма второго рода* (см., например, [3]) для неизвестной функции  $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = \int_X k(x', x) \varphi(x') dx' + f(x) \quad \text{или} \quad \varphi = K\varphi + f; \quad (1.3)$$

здесь функции  $h(x)$  (определяет функционал (1.3)),  $k(x', x)$  (ядро интегрального оператора  $K$ ) и  $f(x)$  (свободный член уравнения (1.3)) – заданы;  $x', x \in X \subseteq \mathbb{R}^d$ .

Здесь рассматриваются задачи приближенного вычисления линейных функционалов вида

$$I_h = (\varphi, h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_X \varphi(x) h(x) dx \quad (1.4)$$

или самого решения  $\varphi(x)$ .

Для решения этих задач весьма эффективными оказываются *стохастические (рандомизированные) численные схемы*, связанные с применением *метода Монте-Карло* (см., в частности, [1, 2], а также Разделы 2 и 3 данной статьи). В этих алгоритмах величины погрешности  $\delta(M, N)$  являются случайными величинами и требуется определение вероятностного смысла соотношений вида (1.1). В данной работе предполагается, что эти соотношения выполнены с вероятностью, близкой к единице.

**2. Условная оптимизация рандомизированного итерационного алгоритма приближения функционала.** Сначала рассмотрим задачу приближенного вычисления функционала (1.4) от решения интегрального уравнения (1.3).

Известно (см., например, [3]), что если оператор  $K$  является сжимающим в банаховом пространстве  $\mathbb{B}(X)$  с нормой  $\|g\|_{\mathbb{B}(X)}$  (конкретнее, полагаем  $\|K\|_{\mathbb{B}(X)} \leq q < 1$ ), то решение  $\varphi(x)$  уравнения (1.3) существует, единственно и может быть представлено в виде *ряда Неймана*

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} K^m f(x), \quad (2.1)$$

где

$$K^m f(x) = \int \dots \int f(x^{(0)}) k(x^{(0)}, x^{(1)}) \times \dots \times k(x^{(m-1)}, x) dx^{(0)} dx^{(1)} \dots dx^{(m-1)}. \quad (2.2)$$

В данной работе в качестве  $\mathbb{B}(X)$  используется пространство непрерывных функций  $\mathbb{C}(X)$  с нормой  $\|g\|_{\mathbb{C}(X)} = \sup_{x \in X} |g(x)|$ , где  $X$  – компакт из  $\mathbb{R}^d$ . К слову, для целого ряда практически важных задач ядро  $k(x', x)$  и свободный член  $f(x)$  имеют особенности, и потому  $\varphi, z_m \notin \mathbb{C}(X)$ , что является достаточно весомым препятствием для широкого использования представляемых в данной работе алгоритмов.

Из соотношений (1.4), (2.1), (2.2), используя теоремы Леви и Лебега (см., например, [3]), получаем, что

$$I_h = \sum_{m=0}^{\infty} (K^m f, h), \quad (2.3)$$

где

$$(K^m f, h) = \int \dots \int f(x^{(0)}) k(x^{(0)}, x^{(1)}) \times \dots \times k(x^{(m-1)}, x^{(m)}) h(x^{(m)}) dx^{(0)} dx^{(1)} \dots dx^{(m)}. \quad (2.4)$$

Таким образом, функционал (1.4) представляет собой сумму интегралов бесконечно возрастающей кратности.

Сначала для приближенного вычисления величины (2.3) рассмотрим *метод последовательных приближений* (см., например, [3]). Заметим, что решение  $\varphi(x)$  уравнения (1.3) является пределом при  $m \rightarrow \infty$  итерационного процесса:

$$z_{m+1}(x) = f(x) + Kz_m(x); \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad z_0(x) = f(x);$$

при этом  $z_m(x) = K^m f(x)$ , и справедливо неравенство [3]:

$$\|\varphi - z_m\|_{\mathbb{B}(X)} \leq \frac{q^m}{1-q} \|z_1 - z_0\|_{\mathbb{B}(X)}. \quad (2.5)$$

В теории метода последовательных приближений предполагается задание некоторого  $M < \infty$  и использование вместо  $I_h$  конечной суммы

$$I_h^{(M)} = \sum_{m=0}^M (K^m f, h). \quad (2.6)$$

Заметим, что

$$|I_h - I_h^{(M)}| \leq \max_{x \in X} |h(x)| \times \|\varphi - z_M\|_{\mathbb{C}(X)} \leq \|h\|_{\mathbb{C}(X)} \times \frac{q^M}{1-q} \|Kf - f\|_{\mathbb{C}(X)}; \quad (2.7)$$

здесь использовано неравенство (2.5).

В свою очередь, для приближения интегралов (2.4) из суммы (2.6), имеющих максимальную кратность  $K = d(M+1)$ , можно построить серию кубатурных формул  $F_{h,N}^{(M)}$  с числом узлов  $N$ , обеспечивающим выполнение неравенства

$$|I_h^{(M)} - F_{h,N}^{(M)}| \leq H(K)N^{-\tau(K)}, \quad (2.8)$$

где  $H(K), \tau(K)$  – положительные константы.

В качестве окончательного приближения величины  $I_h$  из соотношений (1.4) и (2.3) берем

$$I_h \approx F_{h,N}^{(M)}. \quad (2.9)$$

Для приближения (2.9), используя соотношения (2.7) и (2.8), несложно получить аналог соотношения (1.1):

$$\delta(M, N) = |I_h - F_{h,N}^{(M)}| \leq |I_h - I_h^{(M)}| + |I_h^{(M)} - F_{h,N}^{(M)}| \leq UP(M, N);$$

$$UP(M, N) = \|h\|_{\mathbb{C}(X)} \times \frac{q^M}{1-q} \|Kf - f\|_{\mathbb{C}(X)} + H(K)N^{-\tau(K)}.$$

Для поиска условно-оптимальных параметров  $M_{opt}$  и  $N_{opt}$  приближения (2.9) требуется разрешить уравнение типа (1.2)  $UP(M, N) = \gamma$  относительно одного из параметров (например,  $N$ ). Трудности, возникающие при решении этого уравнения связаны с оценкой величин  $q, \|Kf - f\|_{\mathbb{C}(X)}, H(K)$  и  $\tau(K)$  из соотношений (2.7) и (2.8).

Для малого уровня погрешности  $\gamma$  величина  $M_{opt}$  может быть достаточно большой, поэтому в качестве  $F_{h,N}^{(M)}$  заведомо нецелесообразно брать детерминированные кубатурные формулы на регулярных сетках (хотя такие – в целом бесперспективные – попытки предпринимались: см., в частности, работу [4]). Здесь требуется использовать *стохастические кубатурные формулы* (или метод Монте-Карло) – см., например, [1, 2]. Приведем тестовый пример эффективного применения этого метода вместе с решением задачи поиска условно-оптимальных параметров.

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим следующее тестовое интегральное уравнение из [1, 2]:

$$\varphi(x) = q \int_0^x e^{-(x-x')} \varphi(x') dx' + e^{-x}, \quad x > 0. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) имеет точное решение  $\varphi(x) = e^{-px}$  (это обстоятельство помогает при проведении тестовых расчетов).

Исследуем проблему поиска условно-оптимальных параметров соответствующей численной схемы (2.9) на тестовом примере вычисления функционала

$$I_h = (\varphi, h) = \frac{1}{p+B} \quad \text{для } h(x) = e^{-Bx}, \quad x > 0, \quad B > 0. \quad (2.11)$$

Построение стохастической кубатурной формулы  $F_{h,N}^{(M)}$  будет основано на известной связи уравнения (2.10) со следующей одномерной моделью переноса малых частиц (см., например, [1, 2]).

Частицы двигаются из точки  $x = 0$  в положительном направлении оси  $x$  случайными пробегами, длины которых распределены с плотностью  $e^{-x}$ ,  $x > 0$ . В конце пробега с вероятностью  $p$  частица поглощается (т.е. ее траектория обрывается), а с вероятностью  $q = 1 - p$  совершает очередной пробег  $\xi^{(t-1)} \rightarrow \xi^{(t)}$ ;  $t = 1, 2, \dots$ .

Случайные координаты точек столкновений  $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(T)}$  образуют однородную прикладную (обрывающуюся с вероятностью единица) цепь Маркова (см., например, [1, 2]) с начальной плотностью  $\pi(x) = e^{-x}$ ,  $x > 0$  и переходной функцией

$p(x', x) = qe^{-(x-x')}\chi(x-x')$  при  $x > 0$ ;  $\chi(w) = 1$  при  $w \geq 0$ ,  $\chi(w) = 0$  при  $w < 0$ ; здесь  $T$  – случайный номер состояния обрыва  $\xi^{(T)}$ .

Если обозначить через  $\varphi^{(0)}(x) = \pi(x)$  – плотность распределения состояния  $\xi^{(0)}$ , через  $\varphi^{(1)}(x) = K\varphi^{(0)}(x)$  – плотность распределения состояния  $\xi^{(1)}$ , через  $\varphi^{(2)}(x) = K^2\varphi^{(0)}(x)$  – плотность распределения состояния  $\xi^{(2)}$  и т.д., то функция  $\varphi(x) = \varphi^{(0)}(x) + \varphi^{(1)}(x) + \varphi^{(2)}(x) + \dots$  представляет собой ряд Неймана (2.1) (а значит, и единственное решение) интегрального уравнения (1.3) (а точнее, уравнения (2.10)) с ядром  $k(x', x) = p(x', x)$  и свободным членом  $f(x) = \varphi^{(0)}(x) = \pi(x)$ .

Для приближения соответствующего отрезка (2.6) суммы (2.3) для функционала (2.11) можно использовать *основной весовой оценщик*  $\zeta^{(M)}$  (или *монте-карловскую оценку* – см. [1, 2]):

$$I_h^{(M)} = \mathbf{E}\zeta^{(M)} \approx F_{h,N}^{(M)} = \frac{\zeta_1^{(M)} + \dots + \zeta_N^{(M)}}{N}; \quad \zeta^{(M)} = \sum_{t=0}^{\tilde{T}} h(\xi^{(t)}); \quad (2.12)$$

здесь  $\tilde{T} = T$  при  $T \leq M$  и  $\tilde{T} = M$  иначе, а  $\zeta_1^{(M)}, \dots, \zeta_N^{(M)}$  – получаемые на компьютере выборочные значения случайной величины  $\zeta^{(M)}$ . Соотношение (2.12) соответствует случаю *прямого моделирования* цепи Маркова  $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(T)}$ , для которого случайные веса равны единице (см. [1, 2], а также приведенную ниже формулу (3.13)).

В данном тестовом примере справедливы следующие аналитические выкладки:

$$\begin{aligned} (K^m f, h) &= \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} q^m e^{-y^{(0)}} e^{-(y^{(1)}-y^{(0)})} \times \dots \times e^{-(y^{(m)}-y^{(m-1)})} \chi(y^{(1)} - y^{(0)}) \times \dots \times \\ &\times \chi(y^{(m)} - y^{(m-1)}) e^{-By^{(m)}} dy^{(0)} dy^{(1)} \dots dy^{(m-1)} dy^{(m)} = q^m \int_0^{+\infty} e^{-y^{(m)}(B+1)} \times \\ &\times \left( \int_0^{y^{(m)}} \frac{(y^{(m-1)})^{m-1}}{(m-1)!} dy^{(m-1)} \right) dy^{(m)} = \frac{q^m}{m!} \int_0^{+\infty} e^{-y^{(m)}(B+1)} (y^{(m)})^m dy^{(m)} = \frac{q^m}{(B+1)^{m+1}}. \end{aligned}$$

Здесь использовано известное свойство гамма-функции:  $\Gamma(m+1) = \int_0^{+\infty} w^m e^{-w} dw = m!$  для  $w=B+1\gamma(m)$ .

Используя формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеем

$$\left| I_h - I_h^{(M)} \right| = \sum_{m=M+1}^{\infty} (K^m f, h) = \left( \frac{q}{B+1} \right)^{M+1} \times \frac{1}{B+1-q}.$$

Известно также (см., например, [1, 2]), что с высокой вероятностью

$$\left| I_h^{(M)} - F_{h,N}^{(M)} \right| \lesssim \frac{D(M)}{\sqrt{N}}; \quad D(M) = H \sqrt{\mathbf{D}\zeta^{(M)}}; \quad H \approx 0,80 \dots$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta(M, N) &= \left| I_h - F_{h,N}^{(M)} \right| \leq \left| I_h - I_h^{(M)} \right| + \left| I_h^{(M)} - F_{h,N}^{(M)} \right| \leq \\ &\leq UP(M, N) = \left( \frac{q}{B+1} \right)^{M+1} \times \frac{1}{B+1-q} + \frac{D(M)}{\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Заметим, что трудоемкость этого алгоритма имеет вид  $S(M, N) = H \times M \times N$ ;  $H = \text{const.}$  Зададим уровень погрешности  $\gamma$  и рассмотрим уравнение типа (1.2):

$$\left( \frac{q}{B+1} \right)^{M+1} \times \frac{1}{B+1-q} + \frac{D(M)}{\sqrt{N}} = \gamma. \quad (2.13)$$

Положим  $D(M) \approx D = \text{const.}$  Такое допущение вполне целесообразно, так как при малом значении  $\gamma$  выполнено

$$\mathbf{D}\zeta^{(M)} \approx \mathbf{D}\zeta \left( 1 - \left( \frac{q}{2B+1} \right)^{M+1} \right), \quad \text{где } \zeta = \sum_{t=0}^T h(\xi^{(t)}).$$

Выразив  $N$  через  $M$  из соотношения (2.13), имеем функцию одного переменного

$$\tilde{S}(M) = \frac{HD^2M}{\left( \gamma - \left( \frac{q}{B+1} \right)^{M+1} \times \frac{1}{B+1-q} \right)^2}$$

Эта функция численно исследовалась нами на минимум по  $M$ . Поиск минимума сводится к решению уравнения

$$\gamma - \left( \frac{q}{B+1} \right)^{M+1} \times \frac{1}{B+1-q} + 2 \left( \frac{q}{B+1} \right)^{M+1} \times \frac{M}{B+1-q} \times \ln \left( \frac{q}{B+1} \right) = 0$$

относительно  $M$ ; это условие равенства нулю производной функции  $\tilde{S}(M)$ . В частности, для  $\gamma = 0,001$ ;  $q = 0,999$ ;  $B = 0,5$  и  $D = 2.1$  удалось установить, что минимум функции  $\tilde{S}(M)$  достигается примерно при  $M = M_{opt} = 19$ .

Заметим также, что для  $M = 19$  получилось совпадение теоретического и практического результатов (т.е. при  $M = 19$  для получения заданного уровня погрешности потребовалось минимальное время счета  $t$  – см. Таблицу). Описание Примера 1 закончено.

**3. Условная оптимизация рандомизированного функционального сеточного алгоритма.** Теперь рассмотрим **функциональные алгоритмы**, которые строятся для приближения самого решения  $\varphi(x)$  интегрального уравнения (1.3) на компактном множестве  $X \subseteq \mathbb{R}^d$ .

Таблица. – Оптимизация (по параметру  $M$ ) алгоритма (2.9)

$M$	$N$	$t$ (сек.)
13	469 223	5,55
16	77 651	1,10
18	59 919	0,94
19	56 221	0,93
20	53 994	0,94
22	51 577	0,99
30	49 867	1,26
40	49 801	1,70

Особенностью этой задачи является то обстоятельство, что функция  $\varphi(x)$  задана в неявной (интегральной) форме (1.3) или (2.1). Это означает невозможность явного (с использованием композиций элементарных функций) вычисления как самой функции  $\varphi(x)$  в фиксированном наборе точек

$$\mathbf{X}^{(M)} = \{x_1, \dots, x_M\} \quad (3.1)$$

(например, на аппроксимационной сетке):

$$\boldsymbol{\varphi}^{(M)} = \{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_M)\}, \quad (3.2)$$

так и функционалов вида

$$\mathbf{F}^{(M)} = \{(\varphi, \chi_1), \dots, (\varphi, \chi_M)\}; \quad (\varphi, \chi_i) \stackrel{\text{def}}{=} \int_X \varphi(y) \chi_i(y) s(y) dy \quad (3.3)$$

для заданных «базисных» функций

$$\boldsymbol{\Xi}^{(M)} = \{\chi_1(x), \dots, \chi_M(x)\}, \quad (3.4)$$

весовой функции  $s(y)$  и достаточно большого  $M$ .

Потому при построении алгоритмов аппроксимации функции  $\varphi(x)$  (именно их мы будем называть *функциональными алгоритмами*) предполагается численное приближение величин (3.2) и (или) (3.3). Особо будут можно выделить *рандомизированные* функциональные алгоритмы, в которых величины (3.2) и (3.3) приближаются методом Монте-Карло (см., например, [1, 5]).

Для аппроксимации функции  $\varphi(x)$  используем представления классической теории численной аппроксимации функций (см., например, [6]), имеющих общий вид

$$\varphi(x) \approx L_M \varphi(x) = \sum_{i=1}^M w_i \chi_i(x) \quad (3.5)$$

для некоторого специально выбранного набора «базисных» функций (3.4) (вид этих функций определяет тип аппроксимации (3.5)) и коэффициентов

$$\mathbf{W}^{(M)} = \{w_1, \dots, w_M\}. \quad (3.6)$$

Выделим два типа функциональных алгоритмов, связанных с представлением (3.5): **проекционные** и **сеточные численные методы**.

Для *проекционных функциональных алгоритмов* базисные функции (3.4) из аппроксимации (3.5) представляют собой отрезок ряда (длины  $M$ ) ортогональных (с весом  $s(y)$ ) функций (как правило, многочленов), для которых

$$(\chi_i, \chi_j) = \int_X \chi_i(y) \chi_j(y) s(y) dy = 0; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, M.$$

Здесь коэффициенты (3.6) равны величинам (3.3):

$$w_i = (\varphi, \chi_i). \quad (3.7)$$

Для *сеточных функциональных алгоритмов* коэффициенты (2.6) представляют собой некоторые комбинации значений (3.2) в точках достаточно регулярной сетки (3.1):

$$w_i = w_i(\boldsymbol{\varphi}^{(M)}); \quad (3.8)$$

чаще всего

$$w_i = \varphi(x_i). \quad (3.9)$$

Далее строятся (различными способами) приближения

$$\widetilde{\mathbf{W}}^{(M)} = \{\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_M\} \quad (3.10)$$

величин (3.7) – (3.9), и окончательная аппроксимация имеет вид

$$\varphi(x) \approx L_M \tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^M \tilde{w}_i \chi_i(x). \quad (3.11)$$

В свою очередь, для получения величин (3.10) весьма эффективными являются различные варианты упомянутого выше основного весового оценщика с числом траекторий  $N$ ; и здесь снова возникает оптимизационная задача, описанная выше в Разделе 1.

Отметим также, что при выборе базисных функций (3.4) следует особое внимание уделять свойствам *устойчивости* (см., например, [1, 5, 6]).

**ПРИМЕР 2.** Рассмотрим сеточную версию *метода зависимых испытаний* (или *функционального локального оценщика*), идея которого была впервые предложена в работе А.С.Фролова и Н.Н.Ченцова [7].

**АЛГОРИТМ.** Реализуя  $N$  траекторий  $\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}, \dots, \xi_n^{(T_n-1)}, \xi_n^{(T_n)}$ ;  $n = 1, \dots, N$  прикладной цепи Маркова  $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(T)}$  с произвольными начальной плотностью  $\pi(x)$  и переходной функцией  $p(x', x)$ , вычисляем значения

$$\varphi(x_i) \approx \tilde{\varphi}_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{t=0}^{T_n} Q_n^{(t)} k(\xi_n^{(t)}, x_i) + f(x_i); \quad i = 1, \dots, M; \quad (3.12)$$

$$Q^{(0)} = \frac{f(\xi^{(0)})}{\pi(\xi^{(0)})}; \quad Q^{(t)} = Q^{(t-1)} \frac{k(\xi^{(t-1)}, \xi^{(t)})}{p(\xi^{(t-1)}, \xi^{(t)})}, \quad (3.13)$$

и вычисляем коэффициенты (3.10) по формулам (3.8):  $\tilde{w}_i = w_i(\tilde{\varphi}^{(M)})$ , или (3.9):  $\tilde{w}_i = \tilde{\varphi}_i$ , а затем используем приближение (3.11); здесь  $\tilde{\varphi}^{(M)} = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_M)$ .

Идея построения приближений (3.12) решения уравнения (1.3) в узлах сетки (3.1) состоит в том, что первое слагаемое в правой части интегрального уравнения (1.3) имеет вид функционала (1.4):

$$\int_X k(x', x) \varphi(x') dx' = I_{h_x} = (\varphi, h_x); \quad h_x(x') = k(x', x).$$

Метод зависимых испытаний, обладая рядом несомненных преимуществ (простота построения, экономичность, сохранение гладкости решения для приближения (3.11), независимость погрешности от числа узлов сетки (3.1) – она, как и в «скалярном» случае, имеет порядок  $1/\sqrt{N}$ ), используется относительно редко, так как требует повышенной гладкости ядра  $k(x', x)$  и свободного члена  $f(x)$  уравнения (1.3) по переменной  $x$  [1, 5, 7].

В качестве базисных функций (3.4) рассмотрим «абсолютно-устойчивые» финитные функции *мульти-линейного восполнения* (или *аппроксимации Стренга–Фикса* [8] с производящей функцией, являющейся  $\beta$ -сплайном первого порядка) на регулярной сетке с шагом  $h$  по каждой координате:

$$\chi_i(x) = \beta^{(1)}\left(\frac{x^{(1)}}{h} - j_{(i)}^{(1)}\right) \times \dots \times \beta^{(1)}\left(\frac{x^{(d)}}{h} - j_{(i)}^{(d)}\right); \quad \beta^{(1)}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } -1 \leq x \leq 0; \\ -x+1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \quad (3.14)$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}); \quad x_i = (j_{(i)}^{(1)}h, \dots, j_{(i)}^{(d)}h); \quad j_{(i)}^{(k)} - \text{целые числа.}$$

Для базиса (3.14) при использовании *подхода к оценке погрешности* [1, 5] рассматриваемого Алгоритма с вероятностью, близкой к единице, имеем

$$\delta(M, N) = \|\varphi - L_M \tilde{\varphi}\|_{\mathbb{C}(X)} \leq \|\varphi - L_M \varphi\|_{\mathbb{C}(X)} + \|L_M \varphi - L_M \tilde{\varphi}\|_{\mathbb{C}(X)} \leq \tilde{H}_1 h^2 + \quad (3.15)$$

$$+ \tilde{L} \max_{i=1, \dots, M} |\tilde{\varphi}_i - \varphi(x_i)| \leq UP(M, N) = \frac{H_1}{M^{\frac{2}{d}}} + \frac{H_2}{\sqrt{N}}; \quad \text{здесь } \tilde{H}_1, H_1, H_2 = \text{const},$$

а  $\tilde{L}$  – константа Лебега [6] (для базиса (3.14) она равна единице). Заметим, что порядок  $h^2$  детерминированной компоненты  $\|\varphi - L_M \varphi\|_{\mathbb{C}(X)}$  [1, 5] погрешности (3.15) обеспечивает выбор и последующее приближение простейших коэффициентов (3.9).

Погрешность рассматриваемого Алгоритма имеет вид  $S(M, N) = H \times M \times N$ ;  $H = \text{const}$ . Зададим уровень погрешности  $\gamma$  и рассмотрим уравнение типа (1.2):

$$\frac{H_1}{M^{\frac{d}{2}}} + \frac{H_2}{\sqrt{N}} = \gamma. \quad (3.16)$$

Выразив  $N$  через  $M$  из соотношения (3.16):  $N = H_2^2 / \left( \gamma - \frac{H_1}{M^{\frac{d}{2}}} \right)^2$ , имеем функцию одного переменного

$$\tilde{S}(M) = \frac{H H_2^2 M}{\left( \gamma - \frac{H_1}{M^{\frac{d}{2}}} \right)^2}.$$

Приравняв нулю производную

$$\frac{d\tilde{S}(M)}{dM} = \frac{H H_2^2}{\left( \gamma - \frac{H_1}{M^{\frac{d}{2}}} \right)^3} \left( \gamma - \frac{H_1}{M^{\frac{d}{2}}} \times \frac{d+4}{d} \right),$$

получаем выражения для условно-оптимальных параметров и минимальной трудоемкости:

$$M_{opt} = \left( \frac{H_1(d+4)}{d} \right)^{d/2} \gamma^{-d/2}; \quad N_{opt} = \frac{(H_2(d+4))^2}{16} \gamma^{-2}; \quad S_{opt} = \frac{H H_1^{d/2} H_2^2 (d+4)^{2+d/2}}{16 d^{d/2}} \gamma^{-2-d/2}.$$

Заметим, что если нас интересует только порядок по  $\gamma$  величин  $M_{opt}$ ,  $N_{opt}$  и  $S_{opt}$ , т.е. соотношения вида

$$M_{opt} \sim \gamma^{-\frac{d}{2}}, \quad N_{opt} \sim \gamma^{-2}, \quad S_{opt} \sim \gamma^{-2-\frac{d}{2}},$$

и трудоемкость  $\tilde{S}(M, N)$  пропорциональна произведению  $M \times N$ , то достаточно приравнять детерминированную компоненту (в уравнении (3.16) это  $\frac{H_1}{M^{\frac{d}{2}}}$ ) и стохастическую компоненту (в уравнении (3.16) это  $\frac{H_2}{\sqrt{N}}$ ) верхней границы погрешности  $UP(M, N)$  и получить требуемый порядок из соотношения типа (3.16). Описание Примера 2 закончено.

**Заключение.** В заключение сформулируем ряд важных нерешенных задач по представленной в данной работе тематике.

1. Определенную (и не всегда простую) проблему представляет собой выбор (или предварительное приближенное вычисление) констант (таких как  $q, D$  в соотношении (2.13) и  $H_1, H_2$  в соотношении (3.16)), входящих в выражения для условно-оптимальных параметров  $M_{opt}$  и  $N_{opt}$ . Знание этих констант принципиально необходимо при численном решении практически важных задач.

2. В рассмотренных рандомизированных алгоритмах кроме параметров  $M$  и  $N$  имеется возможность выбирать вероятностные распределения (в частности, плотность начального распределения  $\pi(x)$  и переходную функцию  $p(x', x)$  используемой прикладной цепи Маркова). Проблема согласованного выбора этих распределений и параметров  $M$  и  $N$  носит название задачи полной (условной) оптимизации [5]. Актуальна разработка конструктивных подходов для решения этой задачи.



3. По ряду объективных причин (связанных, прежде всего, с наличием особенностей ядер  $k(x', x)$  и свободных членов  $f(x)$  интегральных уравнений (1.3), входящих в описание практически важных математических моделей) сфера применимости сеточных функциональных алгоритмов, описанных в Разделе 3 данной работы, существенным образом ограничена. Поэтому актуальным становится изучение возможностей применения и условная оптимизация рандомизированных проекционных функциональных алгоритмов (описанных выше в том же Разделе 3).

### Список литературы

1. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. – М.: Изд. центр «Академия», 2006.
2. Войтишек А.В. Рандомизированные итерационные численные модели и алгоритмы. – LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984.
4. Рамазанов М.Д., Рахматуллин Д.Я., Валеева Л.З., Банникова Е.Л. Решение интегральных уравнений на многопроцессорных вычислительных системах // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. 2009. – Т. 2, № 1. – С. 69–87.
5. Войтишек А.В. Функциональные оценки метода Монте-Карло. – Новосибирск: НГУ, 2007.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975.
7. Фролов А.С., Ченцов Н.Н. Использование зависимых испытаний в методе Монте-Карло для получения гладких кривых // Труды Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. – Вильнюс, 1962. – С. 425–437.
8. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981.

*Алдохин Артем Сергеевич – студент Новосибирского государственного университета; 630090, Новосибирск; e-mail: a.alдохin@gmail.com;*  
*Войтишек Антон Вацлавович – д.ф.-м.н., ведущ. науч. сотр. Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН; проф. Новосибирского государственного университета; 630090, Новосибирск; e-mail: vav@osmf.sccc.ru*