О равновесии в многорегиональных системах с неограниченными технологическими множествами*

В.А. Васильев
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
vasilev@math.nsc.ru

⋆

ПРЕЗЕНТАЦИЯ

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-06-00101).

$\star$

1 Модель $\mathcal{M}$

В докладе рассматривается модель экономического взаимодействия регионов из [4,5]:

$$\mathcal{M} =< R, \{A^s, G^s, H^s, b^s, d^s\}_{s\in R} >,$$

где

$R = \{1, \ldots, r\}$ - множество регионов;

A^s - прямоугольная матрица размера $n_s \times l_s$, характеризующая производственный сектор региона $s \in R$;

G^s и H^s - прямоугольные матрицы размера $n_s \times n$, описывающие способы вывоза и ввоза в регионе $s \in R$;

b^s - вектор-столбец размерности n_s, характеризующий имеющийся ресурсно-технологический потенциал региона $s \in R$;

d^s - вектор-столбец размерности n_s, описывающий затраты ресурсов и продукции, связанные с достижением целей развития региона $s \in R$.

$\star$

Ресурсно-технологические возможности Z_s региона s:

$$Z_s := \{z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \geq 0 \mid A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + \lambda_s d^s\},$$

где

$x^s = (x_i^s)_{i=1}^{l_s}$, $u^s = (u_j^s)_{j=1}^{n}$, $v^s = (v_j^s)_{j=1}^{n}$ -

объёмы производства, вывоза и ввоза, соответственно,

$\lambda_s \in \mathbb{R}_+$ -

степень достижения целей регионального развития для $s \in R$.

Целевые функции регионов $s \in R$:

$$t_s(z^s) = t_s(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) := \lambda_s, \quad (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s, \quad s \in R.$$

$\star$

Автаркические и строго автаркические планы регионов $s \in R$*:*

$$Z^0_{\mathcal{M}}(s) := \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \geq v^s\}, \quad s \in R.$$

$$\widehat{Z}^0_{\mathcal{M}}(s) := \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \gg v^s\}, \quad s \in R.$$

Автаркический регион s**:** $Z^0_{\mathcal{M}}(s) \neq \emptyset$.

Строго автаркический регион s**:** $\widehat{Z}^0_{\mathcal{M}}(s) \neq \emptyset$

$\star$

Равновесие Вальраса и нечеткое ядро

Сбалансированные планы модели $\mathcal{M}$:

$$Z_{\mathcal{M}}(R) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s\in R} \in \prod_{s\in R} Z_s \mid \sum_{s\in R} u^s \geq \sum_{s\in R} v^s\}.$$

Определение 1. *План* $\bar{z} = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ - *вальрасовское равновесие модели* $\mathcal{M}$, *если* $\exists \bar{p} \in \mathbb{R}^n_+$ *такой, что* $\bar{p} \neq 0$ *и*

$$\bar{p}\cdot\bar{u}^s \geq \bar{p}\cdot\bar{v}^s, \quad s \in R.$$

При этом для любых $s \in R$ *и* $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$ *справедлива импликация*

$$\lambda_s > \bar{\lambda}_s \Rightarrow \bar{p}\cdot u^s < \bar{p}\cdot v^s.$$

$\star$

Совокупность вальрасовских равновесий модели $\mathcal{M}$ будем обозначать через $W(\mathcal{M})$.

Итак, региональные планы $\bar{z}^s = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)$ образуют элемент множества $W(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда они сбалансированы (то есть когда системный план $(\bar{z}^s)_{s\in R}$ принадлежит множеству $Z_{\mathcal{M}}(R)$), и при некоторых ненулевых ценах $\bar{p} \in \mathbb{R}^n_+$ планы $\bar{z}^s$ доставляют максимальное значение целевым функциям t_s на **бюджетных множествах**

$$B_s(\bar{p}) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid \bar{p} \cdot u^s \geq \bar{p} \cdot v^s\}, \quad s \in R.$$

⋆

Теорема существования: ограниченные РТВ регионов

Ограниченность РТВ (ресурсно-технологических возможностей) региона s:

Существует константа K_s такая, что

$$||z^s|| \leq K_s \quad \text{для всех} \quad z^s \in Z_s.$$

Теорема 1. [2] *Если регионы модели $\mathcal{M}$ строго автаркические, а их ресурсно-технологические возможности ограниченные, то в $\mathcal{M}$ существует вальрасовское равновесие.*

⋆

Нечеткие коалиции:

$$\sigma_F := \{\ f = (f_1, \ldots, f_r) \mid f \neq 0,\ f_s \in [0, 1],\ s \in R\}.$$

Носитель нечёткой коалиции $f = (f_1, \ldots, f_r)$:

$$R(f) := \{s \in R \mid f_s > 0\}.$$

Определение 2. *План* $(\bar{z}^s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ *блокируется нечёткой коалицией* $f = (f_1, \ldots, f_r)$, *если существуют региональные планы* $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s,\ s \in R(f)$, *такие, что*

(1) $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s), \quad s \in R(f),$

(2) $\sum_{s \in R(f)} f_s u^s \geq \sum_{s \in R(f)} f_s v^s.$

$\star$

Условия непустоты нечеткого ядра $C_F(\mathcal{M})$

Совокупность сбалансированных планов модели $\mathcal{M}$, не блокируемых никакой коалицией $f \in \sigma_F$, обозначается через $C_F(\mathcal{M})$ и называется **нечётким ядром модели** $\mathcal{M}$.

Напомним [2], что однородная составляющая $\mathcal{M}_0$ модели $\mathcal{M}$ отличается от нее только тем, что ресурсно-технологический потенциал каждого из регионов модели $\mathcal{M}_0$ равен нулю: $b^s = 0$ для каждого $s \in R$.

Определение 3. *Будем говорить, что модель* $\mathcal{M}$ *не имеет "рога изобилия", если множество сбалансированных планов однородной составляющей* $\mathcal{M}_0$ *этой модели исчерпывается нулевым планом:* $Z_{\mathcal{M}_0}(R) = \{0\}$.

$\star$

Отметим, что отсутствие "рога изобилия" в смысле определения 3 означает, как и в классических моделях равновесного анализа, что при нулевом экономическом потенциале возможна лишь нулевая хозяйственная активность.

Теорема 2. [1] *Если модель* $\mathcal{M}$ *не имеет "рога изобилия", а ее регионы - автаркические, то нечеткое ядро* $C_F(\mathcal{M})$ *этой модели непусто.*

Теорема 2 является важным обобщением теоремы об условиях непустоты обычного ядра модели $\mathcal{M}$ из [3].

⋆

Теорема эквивалентности и ее приложения

Основной инструмент получения теорем существования для моделей с неограниченными РТВ участников, используемый в настоящей работе, состоит в следующей теореме эквивалентности.

Теорема 3. *Если регионы модели $\mathcal{M}$ строго автаркические и ненасыщенные, то ее нечеткое ядро $C_F(\mathcal{M})$ совпадает с множеством вальрасовских планов $W(\mathcal{M})$.*

$\star$

Напомним (Васильев В.А., 2012) полученные ранее условия существования вальрасовских равновесий в многорегиональных экономических системах, не включающие, в отличие от [2], требования ограниченности множеств $Z_s,\ s \in R$.

Определение 4. *Модель $\mathcal{M}$ является $\mathcal{P}$-регулярной, если выполняется равенство $P'(\mathcal{M}) = P(\mathcal{M})$, где $P(\mathcal{M})$ - множество Парето-оптимальных, а $P'(\mathcal{M})$ - слабо Парето-оптимальных планов из $Z_{\mathcal{M}}(R)$.*

Теорема 4. *Если $\mathcal{M}$ является $\mathcal{P}$-регулярной и не имеет "рога изобилия", а ее регионы - строго автаркические и ненасыщенные, то в $\mathcal{M}$ существует равновесие Вальраса.*

$\star$

2 Основной результат

Оказалось, что условие Парето-регулярности в теореме 4 можно опустить. Дело в том, что вместо эквивалентности E-равновесий и W-равновесий (и, соответственно, условий существования равновесия Эджворта, где используется P-регулярность) мы опираемся на теорему 2 (эквивалентность $C_F(\mathcal{E})$ и $W(\mathcal{E})$) и условия непустоты нечеткого ядра $C_F(\mathcal{E})$.

Теорема 5. *Если модель $\mathcal{M}$ не имеет "рога изобилия", а ее регионы - строго автаркические и ненасыщенные, то в $\mathcal{M}$ существует вальрасовское равновесие.*

⋆

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Васильев В.А. Об одном обобщении теоремы Скарфа о непустоте ядра. Препринт № 283, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2012, 41с..

[2]. Васильев В.А. О существовании вальрасовского равновесия в модели межрегиональных экономических отношений. Дискретный анализ и исследование операций. Том 19, № 4, 2012, с.15–34.

[3]. Васильев В.А., Суслов В.И. О неблокируемых состояниях многорегиональных экономических систем. Сибирский журнал индустриальной математики. Том XII, № 4(40). 2009, с. 23–34.

[4]. Гранберг А.Г., Суслов В.И., Суспицын С.А. Многорегиональные системы: экономико-математическое исследование. Новосибирск: Наука. Сиб. Науч. Изд-во. 2007.

[5]. Рубинштейн А.Г. Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1983.

$\star$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!