Уравнения над графами

А.В. Трейер

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

1 июня 2022

Уравнения

$$2x = 2$$

Уравнения

$2x = 2$
$x = 1$ – решение, множество решений – точка.

Уравнения

$2x = 2$
$x = 1$ – решение, множество решений – точка.
$2x + 4y = 8$

Уравнения

$2x = 2$
$x = 1$ – решение, множество решений – точка.
$2x + 4y = 8$
$x = 4 - 2y$ – решение, множество решений – прямая.

Уравнения

$2x = 2$
$x = 1$ – решение, множество решений – точка.
$2x + 4y = 8$
$x = 4 - 2y$ – решение, множество решений – прямая.

$A = \langle \mathbb{Z}; +^2, -^1, 0 \rangle$

Уравнения

$2x = 2$
$x = 1$ – решение, множество решений – точка.
$2x + 4y = 8$
$x = 4 - 2y$ – решение, множество решений – прямая.

$A = \langle \mathbb{Z}; +^2, -^1, 0 \rangle$

Уравнения в A всегда разрешимы. К тому же, можно любую бесконечную систему уравнений от конечного числа неизвестных свести к конечной подсистеме.
Решать уравнения и сводить к конечной подсистеме помогает метод Гаусса.

Уравнения

$x^2 = 1$

Уравнения

$x^2 = 1$
$x = \pm 1$ – решение, множество решений – две точки.

Уравнения

$x^2 = 1$
$x = \pm 1$ – решение, множество решений – две точки.

$2x^2 + 4y^3 - xy = 8$ будет ли решение?

Уравнения

$x^2 = 1$
$x = \pm 1$ – решение, множество решений – две точки.

$2x^2 + 4y^3 - xy = 8$ будет ли решение?
$A = \langle \mathbb{Z}; \cdot^2, +^2, -^1, 0 \rangle$

Уравнения

$x^2 = 1$
$x = \pm 1$ – решение, множество решений – две точки.

$2x^2 + 4y^3 - xy = 8$ будет ли решение?
$A = \langle \mathbb{Z}; \cdot^2, +^2, -^1, 0 \rangle$
10-я проблема Гильберта: уравнения в A НЕ всегда разрешимы.
Решена в 1971 году Юрием Матиясевичем.

Уравнения

Универсальная алгебраическая геометрия — область математики, изучающая уравнения над разными алгебраическими системами (группы, кольца, поля, полугруппы, порядки, матроиды, графы и т.п.).
$A = \langle M; F, P, C \rangle$.

Уравнения

Универсальная алгебраическая геометрия — область математики, изучающая уравнения над разными алгебраическими системами (группы, кольца, поля, полугруппы, порядки, матроиды, графы и т.п.).
$A = \langle M; F, P, C \rangle$.

Проект РНФ 17-11-01117, ОмГТУ, рук. В.Н. Ремесленников:
Уравнения над алгебраическими системами: координатные алгебры, алгоритмы, аппроксимация алгоритмов и теорий.

Моделями современной математики являются алгебраические L-системы, где L-язык (сигнатура), содержащий функциональные и предикатные символы, а также константы. Если 30-40 лет назад основными исследуемыми алгебраическими системами были группы, кольца и поля, то в современной математике все большее значение приобретают алгебраические системы с предикатной сигнатурой (графы, матроиды, решетки, частичные порядки, булевы алгебры и пр.).

. . .

Основная цель настоящего проекта - в приложении общих процедур и алгоритмов ... к изучению систем уравнений и неравенств для конкретных алгебраических систем - графов, матроидов, решеток, частичных порядков а также для групп, полугрупп и колец. Отметим, что наш выбор алгебраических систем связан с классическими алгебраическими системами, теория которых является очень трудной и пока плохо поддаются изучению стандартными методами.

Граф как алгебраическая система

Пусть V — произвольное множество.

Граф Γ это пара (V, E).

V это множество вершин.

$E \subseteq V \times V$ множество рёбер.

Две вершины $x, y \in V$ соединены если $(x, y) \in E$.

Граф как алгебраическая система

Пусть V — произвольное множество.

Граф Γ это пара (V, E).

V это множество вершин.

$E \subseteq V \times V$ множество рёбер.

Две вершины $x, y \in V$ соединены если $(x, y) \in E$.

Язык графов: $\mathcal{L} = \{E^2, =^2\}$, где E^2 это предикат соседства, а $=^2$ это предикат равенства для вершин.

Расширяем язык константными символами - вершинами графа: $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{L} \cup \{V\}$.
Мы можем рассматривать Γ как алгебраическую систему над множеством вершин V в языке $\mathcal{L}(\Gamma)$.

Уравнения над графами

Уравнения: $E(x, y),\ E(x, v),\ E(u, v),\ x = y,\ x = v,\ u = v.$

Уравнения над графами

Уравнения: $E(x,y),\ E(x,v),\ E(u,v),\ x=y,\ x=v,\ u=v.$
Система уравнений:

$$\begin{cases} E(x,y) \\ E(x,z) \\ E(z,v) \end{cases}$$

Нётеровость по уравнениям

Определение. *Алгебраическая система A является нетеровой по уравнениям, если для любого натурального числа n любая система уравнений $S(\boldsymbol{x})$ от n неизвестных $\boldsymbol{x}$ эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(\boldsymbol{x}) \subset S(\boldsymbol{x})$.*

- Э.Ю. Даниярова, А.Г. Мясников, В.Н. Ремесленников, Универсальная алгебраическая геометрия, Издательство СО РАН, Новосибирск, 2016
  Available at
  http://iitam.omsk.net.ru/ remesl/articles/monography.pdf (in Russian)
- G. Baumslag, A.Miasnikov, V.Roman'kov Two theorems about equationally noetherian groups, JoA, 1997
- Ch. K. Gupta, N. S. Romanovskii, "The property of being equationally Noetherian for some soluble groups", Algebra and Logic, 46:1 (2007), 28–36
- M. Shahryari, A.Shevlyakov Direct products, varieties, and compactness conditions, GCC, 2017

Примеры

Нётеровы по уравнениям алгебраические системы:

- Все конечные алгебраические системы;
- Абелевы группы;
- Линейные группы;
- Жесткие группы, разрешимые группы;
- Гиперболические группы без кручения;

Примеры

Нётеровы по уравнениям алгебраические системы:

- Все конечные алгебраические системы;
- Абелевы группы;
- Линейные группы;
- Жесткие группы, разрешимые группы;
- Гиперболические группы без кручения;
- Локально конечные графы;

Примеры

Нётеровы по уравнениям алгебраические системы:

- Все конечные алгебраические системы;
- Абелевы группы;
- Линейные группы;
- Жесткие группы, разрешимые группы;
- Гиперболические группы без кручения;
- Локально конечные графы;

Ненётеровы по уравнениям алгебраические системы:

- $A wr B$, A – неабелева, B – бесконечна.
- G^{ω}, G – неабелева группа.
- некоторые бесконечнопорожденные нильпотентные группы.
- некоторые монойды, полугруппы

Примеры

Нётеровы по уравнениям алгебраические системы:

- Все конечные алгебраические системы;
- Абелевы группы;
- Линейные группы;
- Жесткие группы, разрешимые группы;
- Гиперболические группы без кручения;
- Локально конечные графы;

Ненётеровы по уравнениям алгебраические системы:

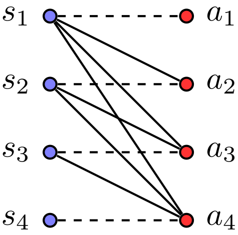
- $A wr B$, A – неабелева, B – бесконечна.
- G^{ω}, G – неабелева группа.
- некоторые бесконечнопорожденные нильпотентные группы.
- некоторые моноиды, полугруппы
- некоторые бесконечные графы

Лемма Котова

Лемма. *Алгебраическая система* $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L} \rangle$ *ненетерова по уравнениям тогда и только тогда, когда, когда существуют последовательность* $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $a_i \in A^n$, *и последовательность уравнений* $(s_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ *языка* $\mathcal{L}$ *такие что* $\mathcal{A} \not\models s_i(a_i)$ *для любых* i, *и* $\mathcal{A} \models s_j(a_i)$ *для любых* $j < i$.

Лемма Котова

Лемма. *Алгебраическая система* $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L} \rangle$ *ненетерова по уравнениям тогда и только тогда, когда, когда существуют последовательность* $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $a_i \in A^n$, *и последовательность уравнений* $(s_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ *языка* $\mathcal{L}$ *такие что* $\mathcal{A} \not\models s_i(a_i)$ *для любых* i, *и* $\mathcal{A} \models s_j(a_i)$ *для любых* $j < i$.



$\dots$

Проблема Баумслага, Мясникова, Ремесленникова

Существует ослабленная версия понятия нетеровсти по уравнениям:

Проблема Баумслага, Мясникова, Ремесленникова

Существует ослабленная версия понятия нетеровсти по уравнениям:

Определение. Пусть n натуральное число. Будем называть алгебраическую систему A, n-нетеровой по уравнениям если любая система уравнений от n переменных эквивалентна своей конечной подсистеме.

G. Baumslag, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups I. Algebraic sets and ideal theory. Journal of Algebra, **219** *(1999) 16-79.*

Проблема Баумслага, Мясникова, Ремесленникова

Существует ослабленная версия понятия нетеровсти по уравнениям:

Определение. Пусть n натуральное число. Будем называть алгебраическую систему A, n-нетеровой по уравнениям если любая система уравнений от n переменных эквивалентна своей конечной подсистеме.

G. Baumslag, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups I. Algebraic sets and ideal theory. Journal of Algebra, **219** *(1999) 16-79.*

Вопрос. *Пусть группа* $G = \langle G, L_G \rangle$ *является* 1*-нетеровой. Следует ли, что* G *нетерова по уравнениям в целом?*

Этот же вопрос актуален для других алгебраических систем.

Графы

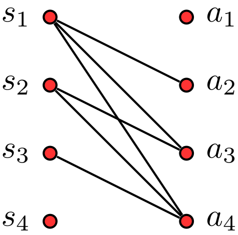
Теорема (Бучинский, Т)

Понятия 1-нетеровости по уравнениям и нетеровости по уравнениям эквивалентны для графов.

Графы

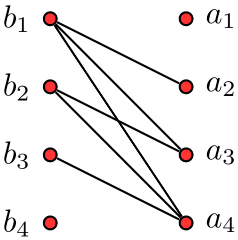
Теорема (Бучинский, Т)

Понятия 1-нетеровости по уравнениям и нетеровости по уравнениям эквивалентны для графов.



$\ldots$

Пусть N это следующий граф. Мы называем его базисным ненетеровым графом.



$\ldots$

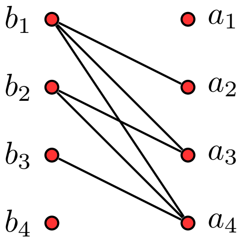
Определение

Вложение ϕ графа N в граф Γ ненетерово если оно сохраняет смежность между парными вершинами(a_i и b_i) в графе N.

Теорема (Бучинский, Т)

Произвольный простой граф Γ не является нётеровым по уравнениям тогда и только тогда, когда он содержит бесконечную клику как подграф, либо граф N может быть вложен в G с помощью ненетерового вложения.

Доказательство



$\dots$

Мощность множества ненетеровых графов

Следствие (ВТ)

Множество всех ненетеровых графов имеет мощность континуума.

Мощность множества ненетеровых графов

Следствие (ВТ)

Множество всех ненетеровых графов имеет мощность континуума.

Спасибо за внимание!