

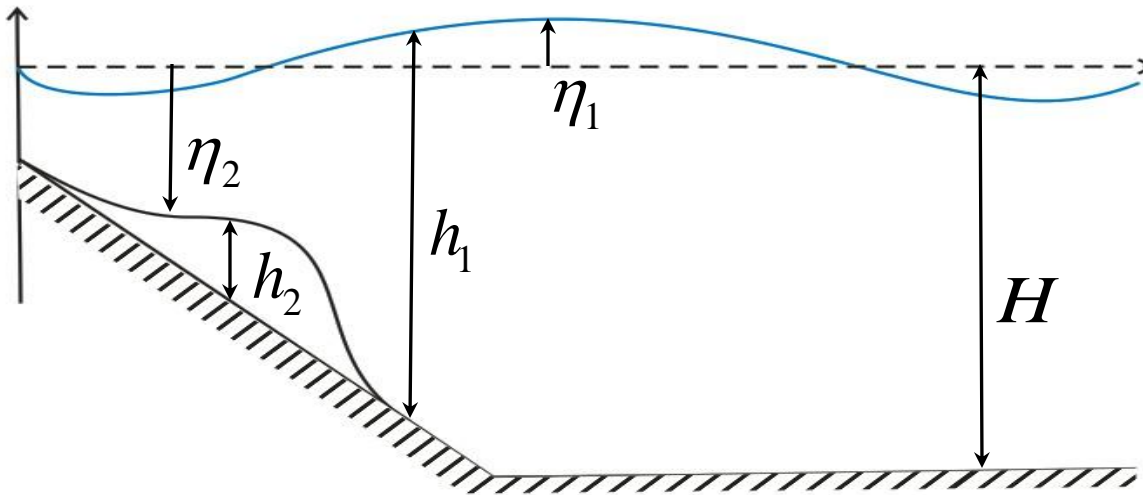
# Моделирование оползневых цунами в рамках двухслойной модели мелкой воды

Бейзель С.А.  
Худякова В.К.

Институт вычислительных технологий СО РАН  
Новосибирский государственный университет

# Основные обозначения

Индекс «1» соответствует верхнему слою – воде, «2» – нижнему слою – оползню.



$H$  – глубина дна, положительная величина,

$u_i$  – скорость  $i$ -го слоя,

$h_i$  – толщина  $i$ -го слоя,

$q_i = h_i u_i$  – поток в  $i$ -ом слое,

$\rho_i$  – плотность  $i$ -го слоя.

$\eta_1 = h_1 + h_2 - H$  – свободная поверхность,

$\eta_2 = h_2 - H$  – поверхность раздела двух жидкостей

# Основные уравнения

Нелинейные уравнения двухслойной мелкой воды:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} = 0 \\
 \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( q_1 u_1 + \frac{1}{2} g h_1^2 \right) = g h_1 \frac{\partial H}{\partial x} - \boxed{g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x}} - \frac{\tau_1}{\rho_1} \\
 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0 \\
 \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( q_2 u_2 + \frac{1}{2} g h_2^2 \right) = g h_2 \frac{\partial H}{\partial x} - \boxed{\frac{\rho_1}{\rho_2} g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x}} - \frac{\tau_2 - \tau_1}{\rho_2}
 \end{array} \right.$$

}  
 Описывают  
 верхний  
 слой  
  
 }  
 Описывают  
 нижний слой

$h_i$  – толщина  $i$ -го слоя,

$u_i$  – скорость  $i$ -го слоя,

$q_i = h_i u_i$  – поток в  $i$ -ом слое,

$H$  – глубина дна, положительная величина,

$\rho_i$  – плотность  $i$ -го слоя,

$\tau_1$  – трение между слоями,  $\tau_1 = 0$

$\tau_2$  – трение оползня о дно.

# Закон трения

Трение оползня о дно вычисляется следующим образом:

$$\tau_2 = \rho_2 \left( \underbrace{K \frac{W^2}{(u_2)^2 + W^2}}_{\text{сухое трение}} + \underbrace{\lambda_2 |u_2| u_2}_{\text{вязкое трение}} \right), \text{ где}$$

$$K = \begin{cases} -gh_2 \left( \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial h_1}{\partial x} \right), & \text{если } |u_2| = 0 \text{ и } |K| \leq gh_2 \operatorname{tg} \delta \\ -gh_2 \operatorname{tg} \delta \left( \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) / \left| \left( \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) \right|, & \text{если } |u_2| = 0 \text{ и } |K| > gh_2 \operatorname{tg} \delta \\ gh_2 \operatorname{tg} \delta \frac{u_2}{|u_2|}, & \text{если } |u_2| \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотренный закон движения предполагает, что:

- (1) для низких скоростей оползня (близких к нулю) касательное напряжение определяется только сухим трением;
- (2) для больших скоростей оползень ведет себя как жидкость, то есть касательное напряжение определяется вязким трением;
- (3) сила трения направлена против вектора скорости при движении оползня и против градиента давления при равновесии.

# Вычислительный алгоритм

## Конечно-разностная схема с искусственной вязкостью

Разнесенная сетка:  $\eta_i, H, h_i$  – в полуцелых узлах,  $u_i, q_i$  – в целых.

$$\frac{(h_1^{m+1} - h_1^m)_{j+1/2}}{\Delta t_m} + \frac{q_1^m_{j+1} - q_1^m_j}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{(q_1^{m+1} - q_1^m)_j}{\Delta t_m} + \frac{\Lambda_j(q_1^m, u_1^m)}{2\Delta x} + g \frac{[(h_1^{m+1}_{j+1/2} + h_1^{m+1}_{j-1/2})(\eta_1^{m+1}_{j+1/2} - \eta_1^{m+1}_{j-1/2})]}{2\Delta x} + (F_1^{fr})_j = 0$$

$$\frac{(h_2^{m+1} - h_2^m)_{j+1/2}}{\Delta t_m} + \frac{q_2^m_{j+1} - q_2^m_j}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{(q_2^{m+1} - q_2^m)_j}{\Delta t_m} + \frac{\Lambda_j(q_2^m, u_2^m)}{2\Delta x} + g \frac{(h_2^{m+1}_{j+1/2} + h_2^{m+1}_{j-1/2})}{2} \left( \frac{\eta_2^{m+1}_{j+1/2} - \eta_2^{m+1}_{j-1/2}}{\Delta x} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{h_1^{m+1}_{j+1/2} - h_1^{m+1}_{j-1/2}}{\Delta x} \right) + (F_2^{fr})_j = 0$$

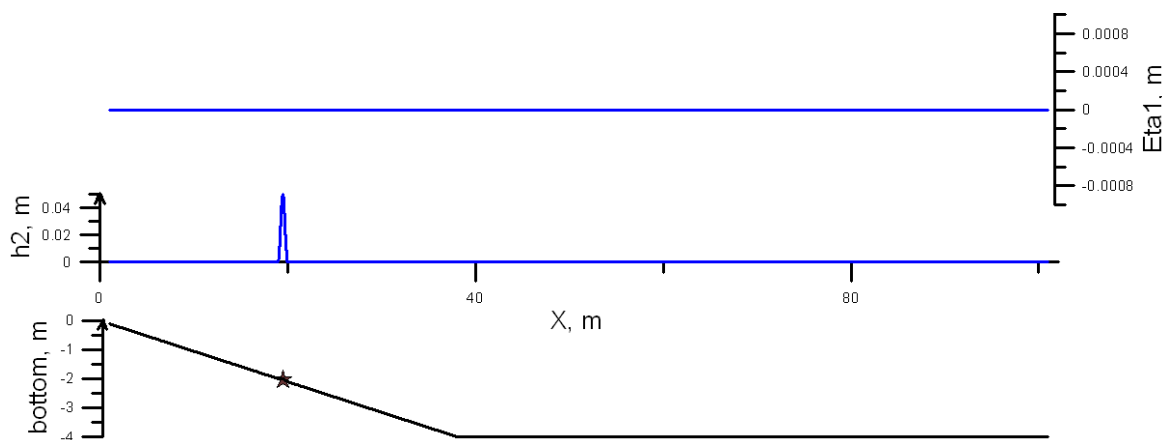
где  $\Lambda_j(q, u) = \left\{ \left[ (q \cdot u)_{j+1} - (q \cdot u)_{j-1} \right] - \left[ (u \cdot |q|)_{j+1} - 2(u \cdot |q|)_j + (u \cdot |q|)_{j-1} \right] \right\}$ ,  $(F_1^{fr})_j = \left( \frac{\tau_1}{\rho_1} \right)_j$ ,

Порядок схемы – первый.

$$(F_2^{fr})_j = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\rho_2} \right)_j$$

# Постановка задачи

Акватория и начальные данные:



Угол наклона склона  $6^\circ$

Длина области 100 м

Минимальная глубина – 0,1 м

Максимальная глубина – 4 м

Граничные условия для воды:  
левая граница – условие  
непротекания;

правая граница – свободный  
проход волн.

Базовые значения параметров оползня:

- Начальное заглубление  $y_0 = 2$  м ( $x_{c0} = 19.5$  м)
- Длина оползня  $L = 1$  м
- Высота оползня  $a = 0,05$  м
- Относительная плотность оползня  $\rho_2 = 1,85$

Базовые значения параметров трения:

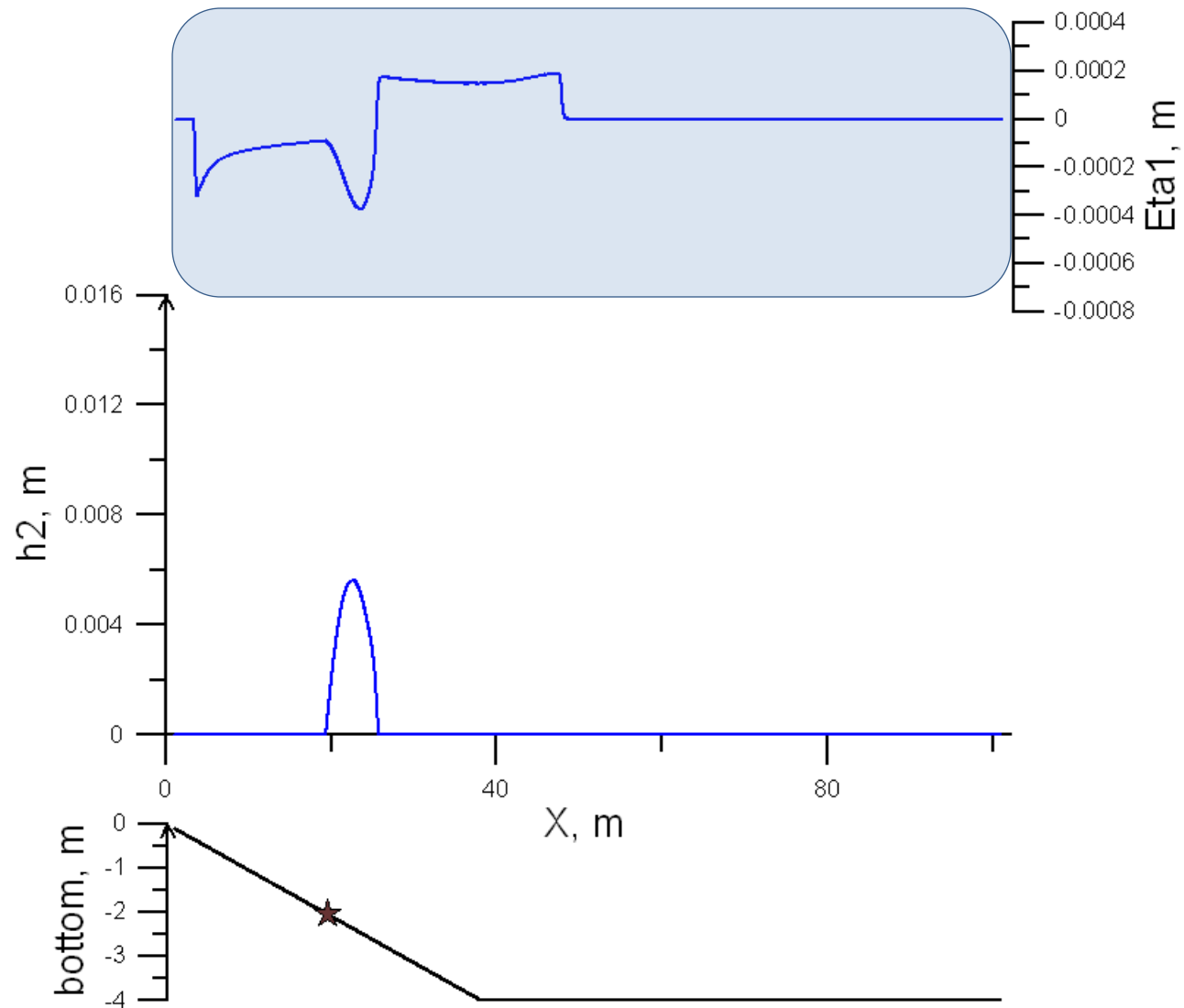
- Вязкое трение:  $\lambda_2 = 0$
- Сухое трение:  $W = 4$  м/сек,  $\delta = 1,5^\circ$

## Основные параметры задачи:

- относительная плотность оползня
- размеры оползня
- начальное заглубление

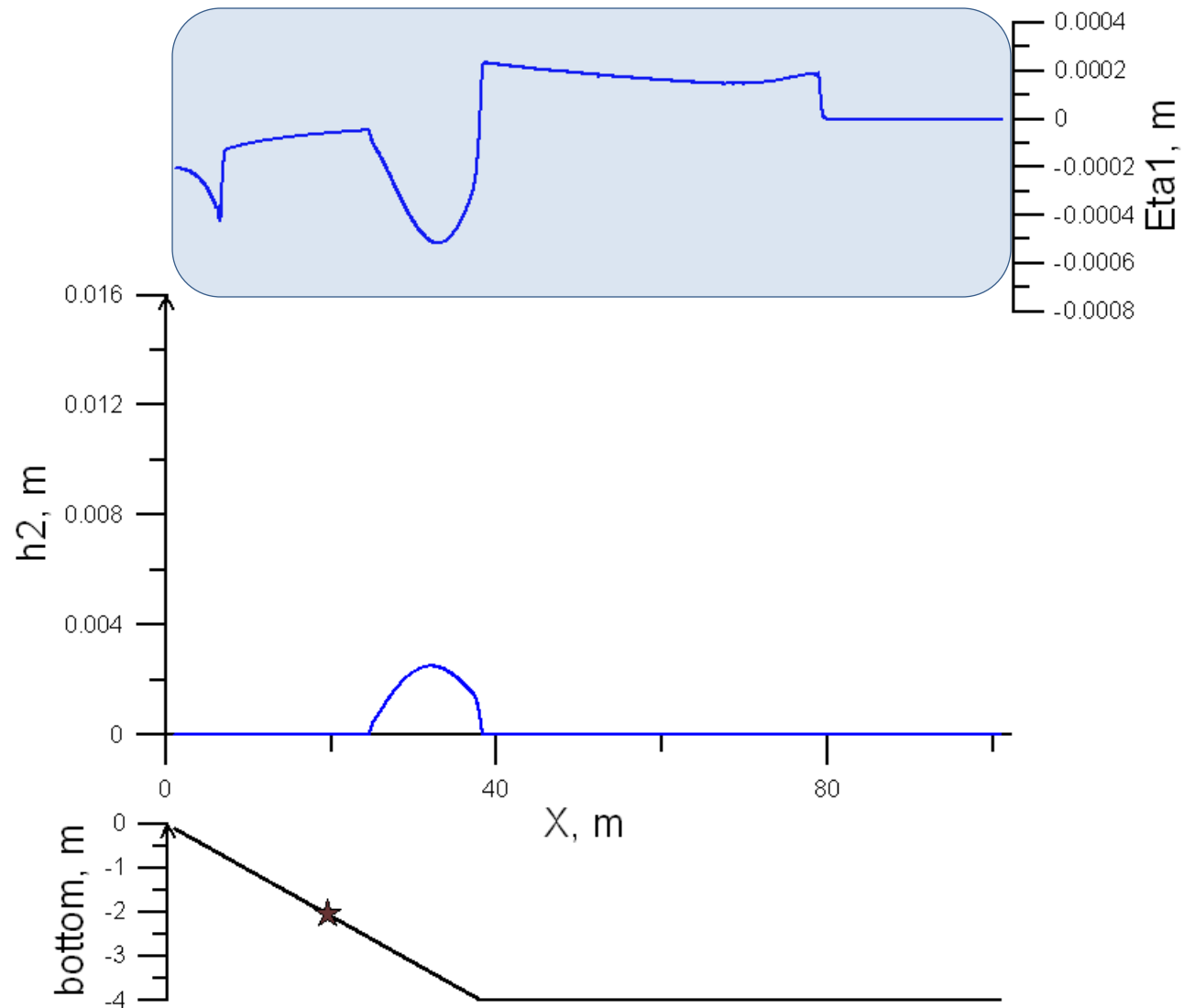
# Базовый численный эксперимент

$T=5$  сек.



# Базовый численный эксперимент

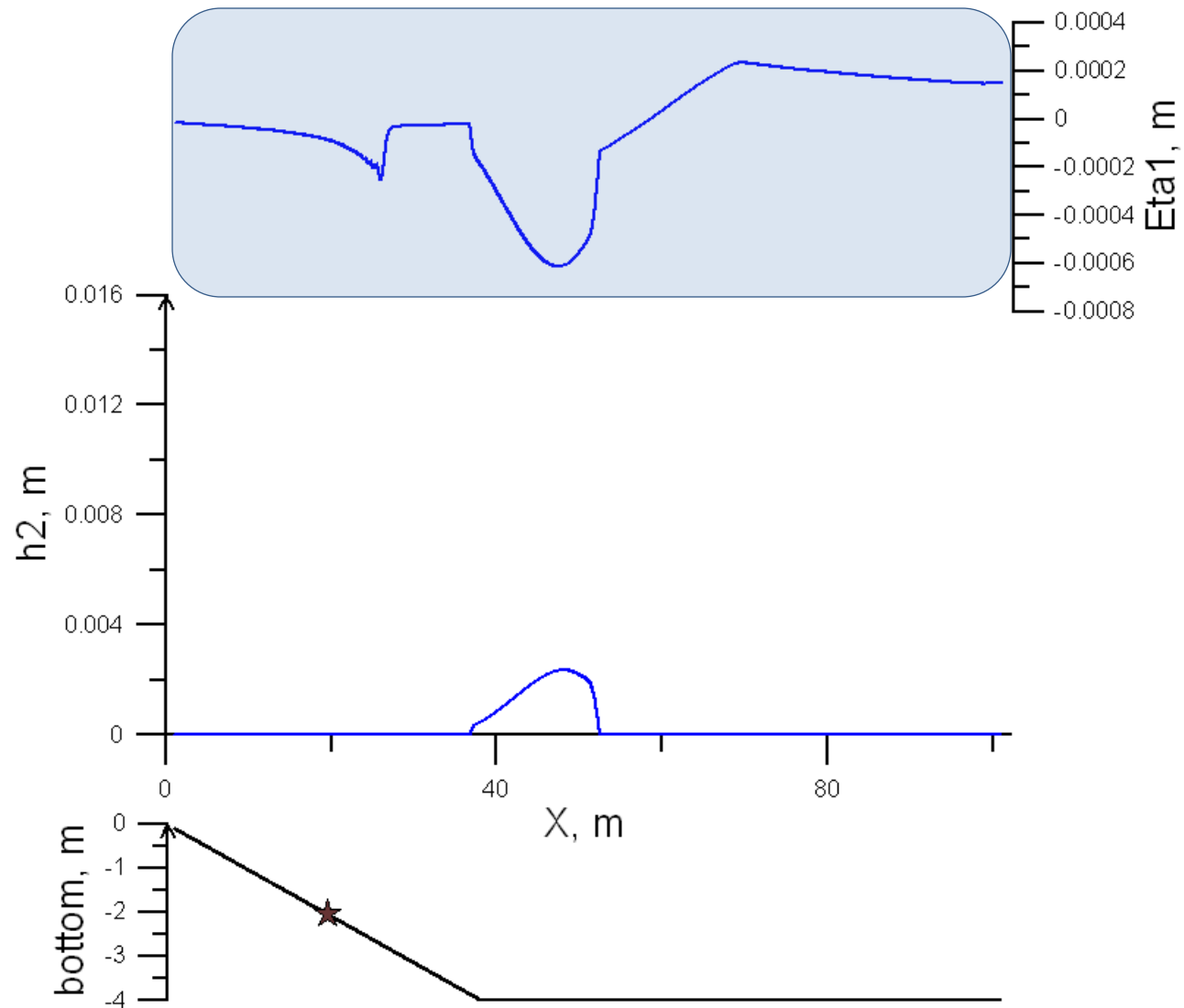
$T=10$  сек.





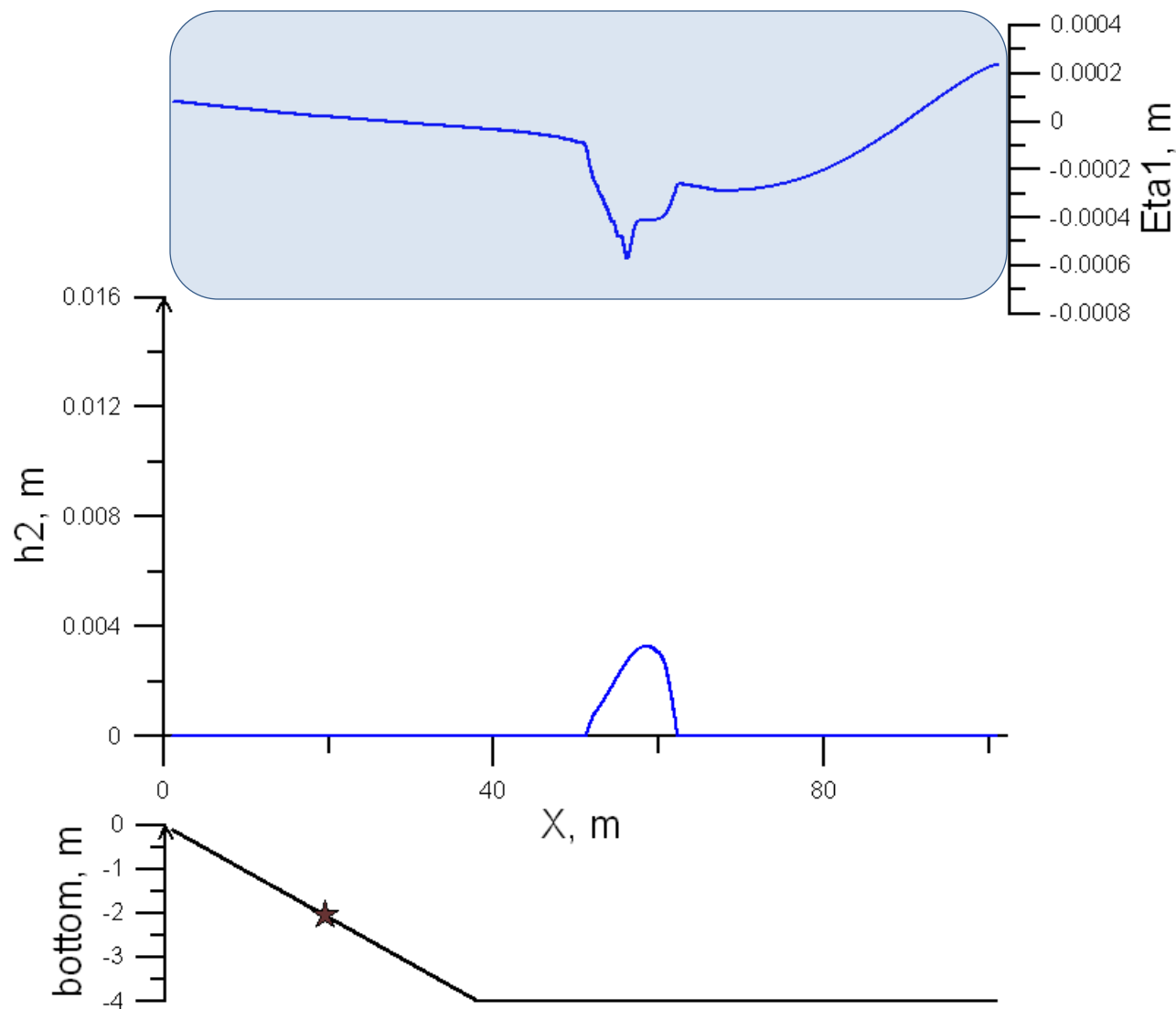
# Базовый численный эксперимент

T=15 сек.



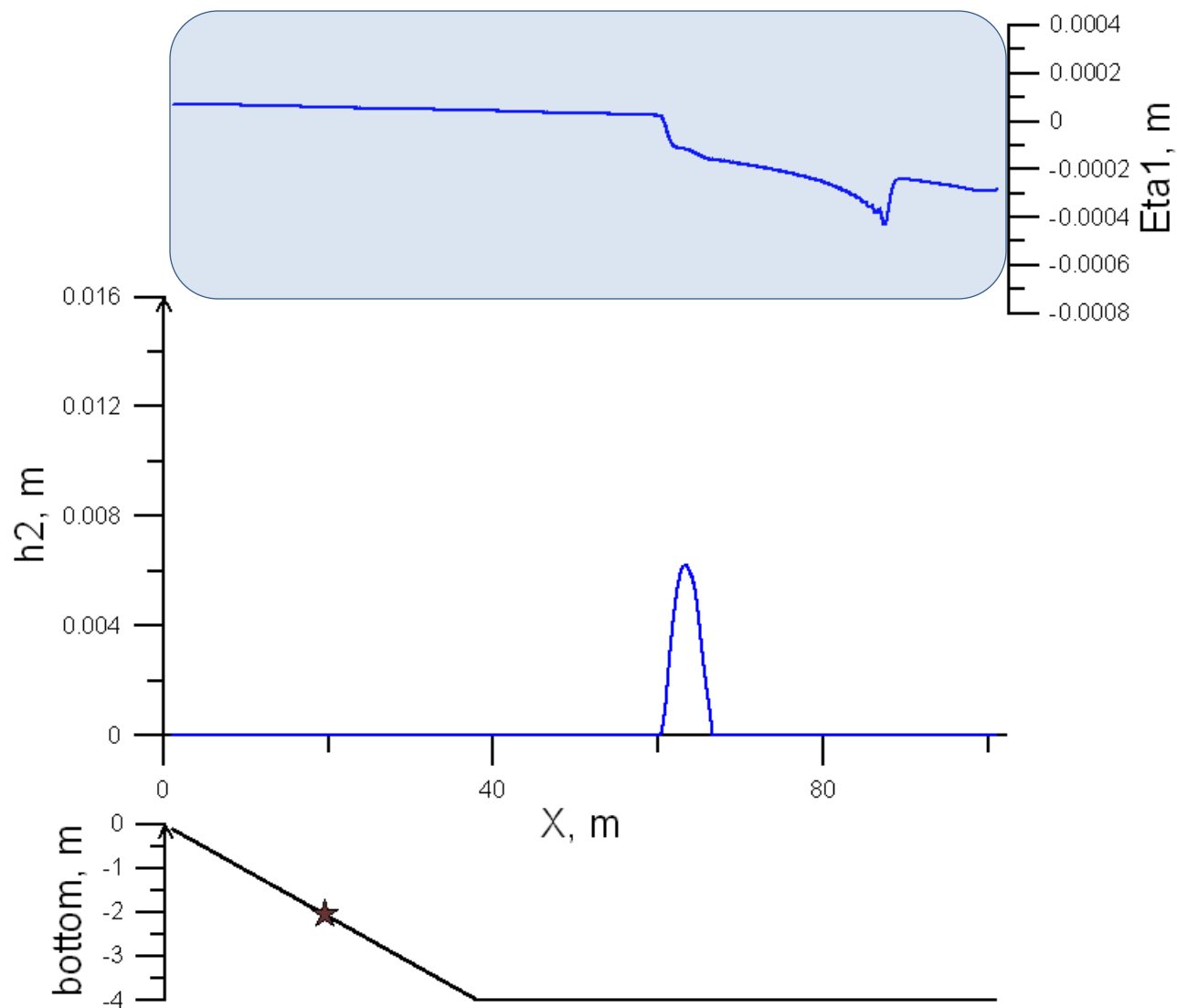
# Базовый численный эксперимент

T=20 сек.



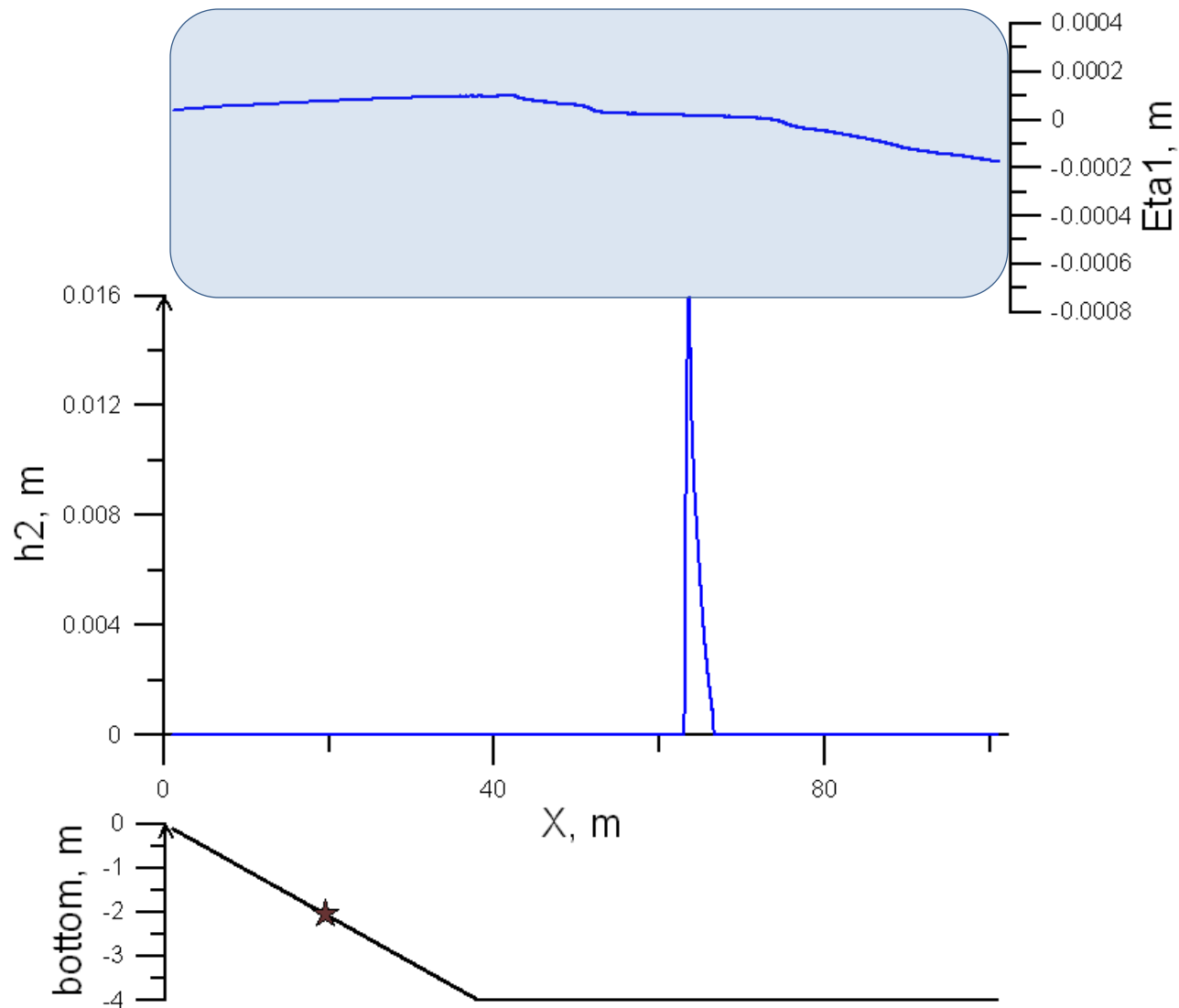
# Базовый численный эксперимент

T=25 сек.



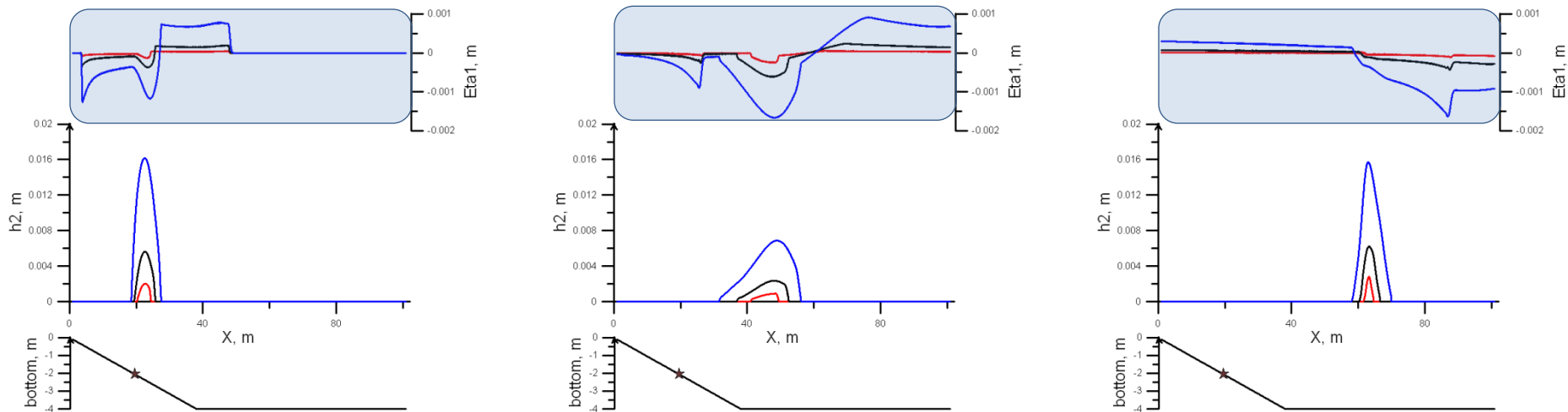
# Базовый численный эксперимент

T=30 сек.



# Разные размеры оползня

Поверхности:

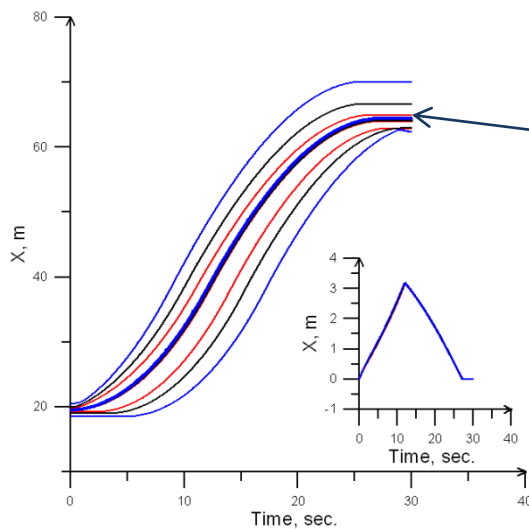


— Стандартный размер

— В 2 раза больше

— В 2 раза меньше

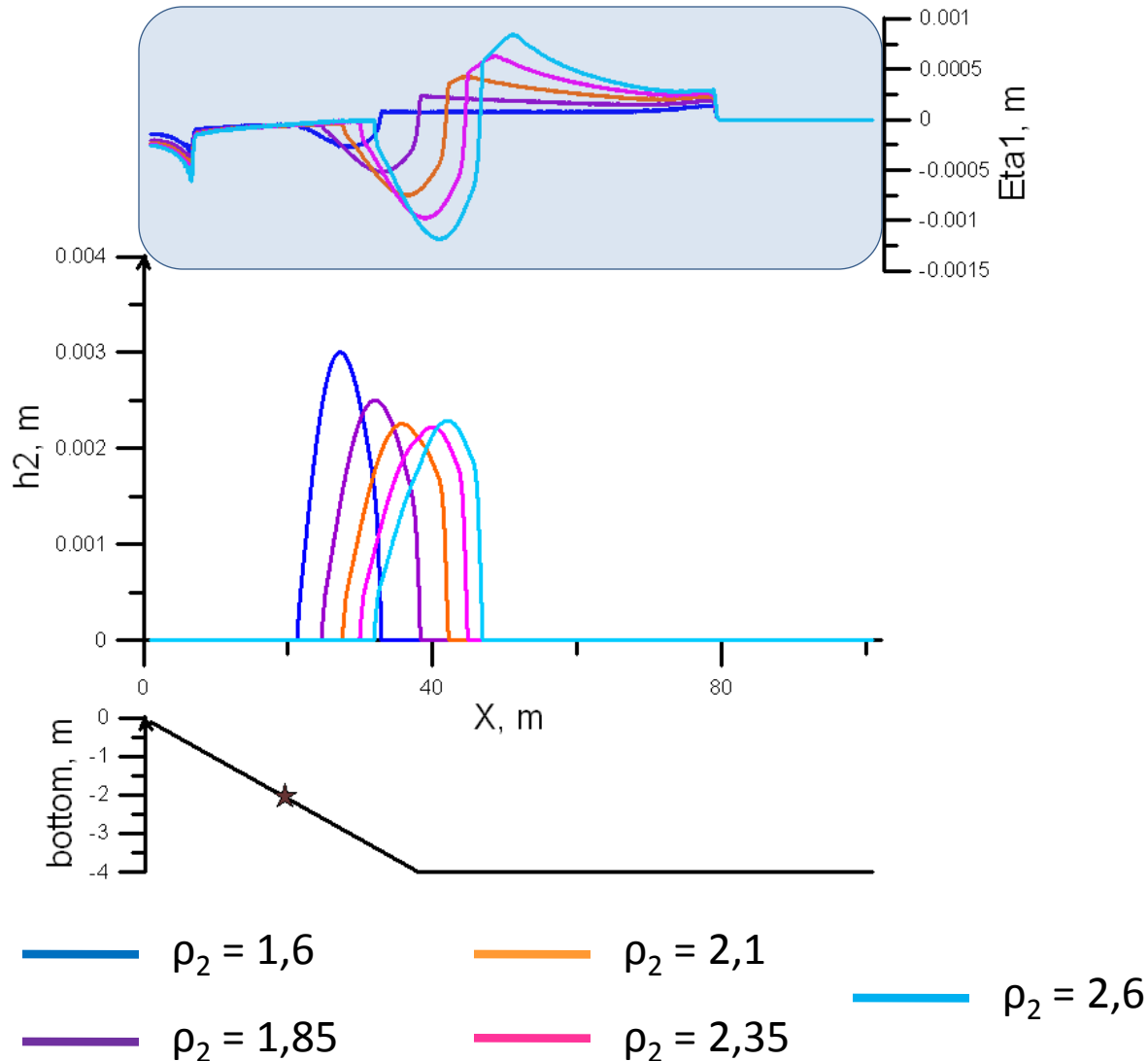
Траектории фронтов и центра масс; скорость центра масс.



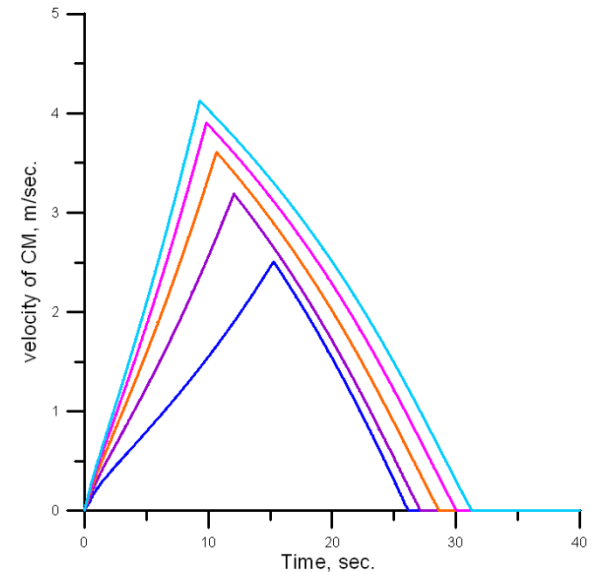
Траектория движения центра масс: одинакова во всех трех случаях

# Разные плотности

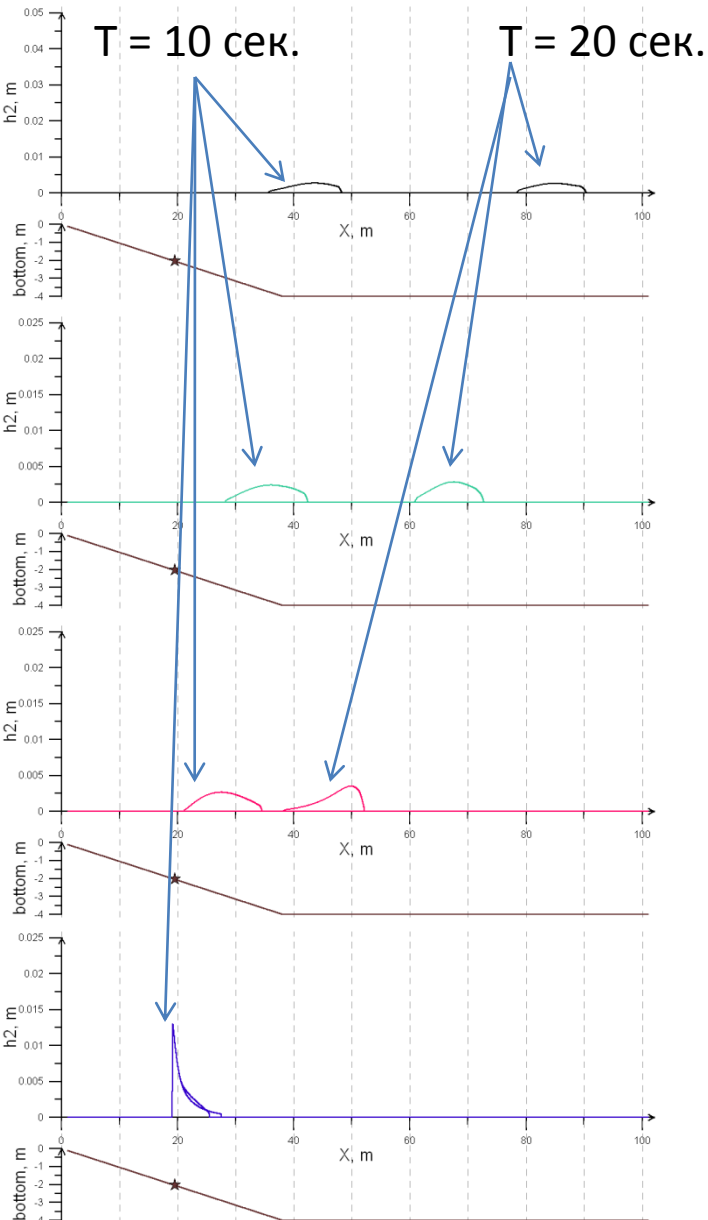
T=10 сек.



Увеличение плотности приводит к развитию больших скоростей и увеличению амплитуд на свободной поверхности

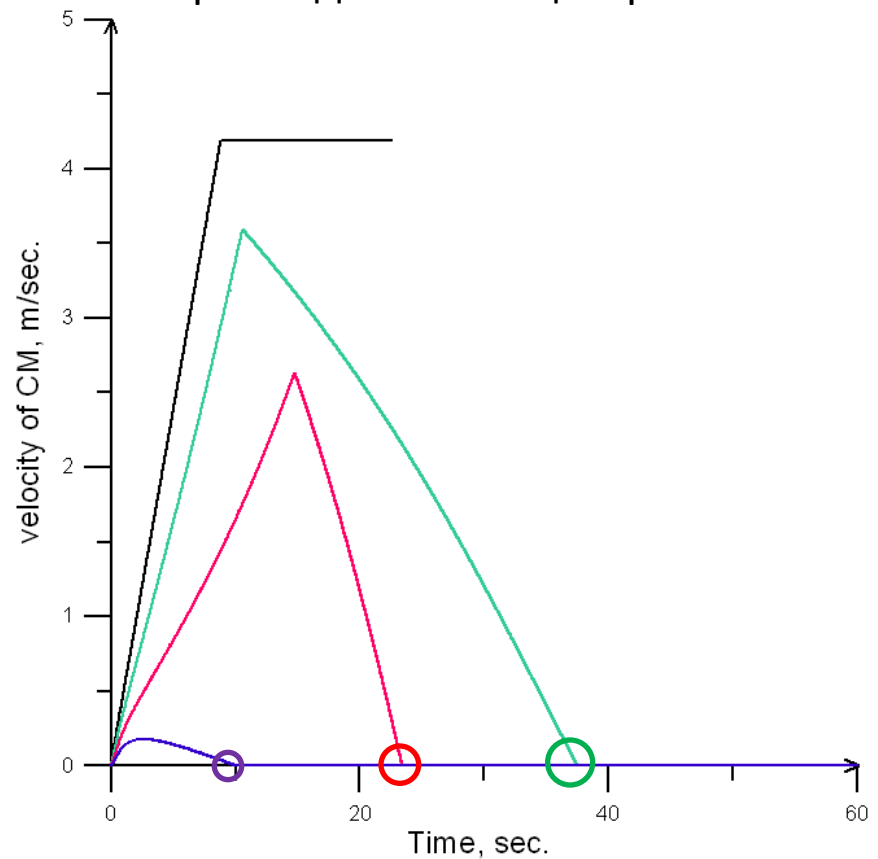


# Сухое трение, параметр $\delta$



$W = 4$  м/сек  
 $\lambda_2 = 0$

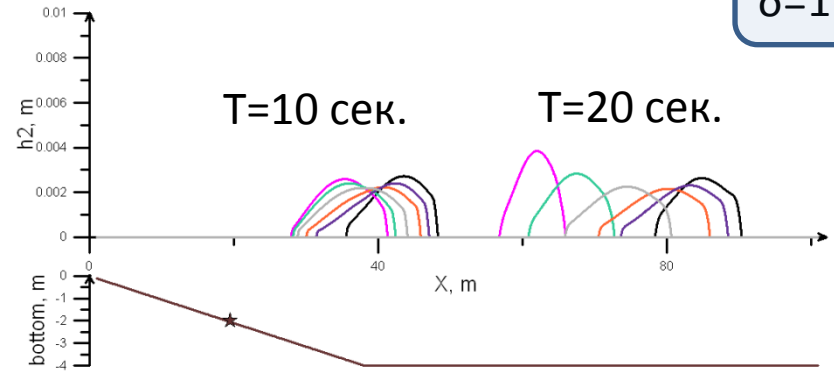
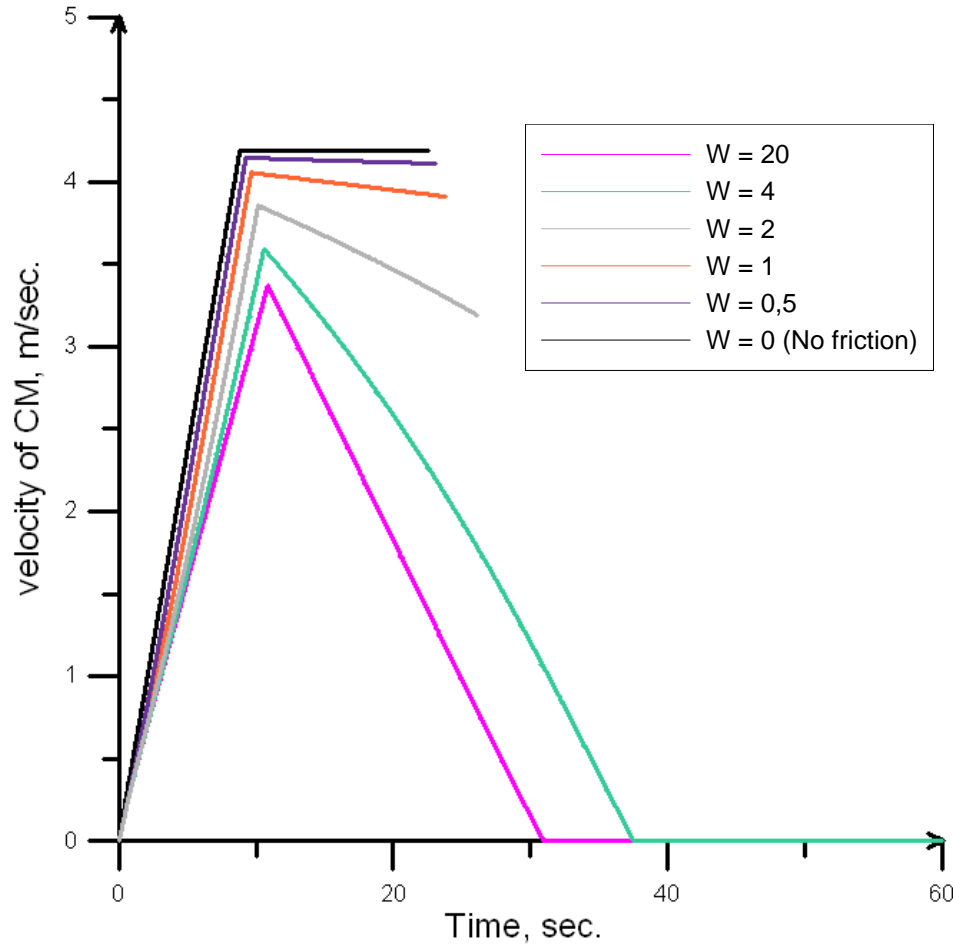
Скорость движения центра масс:



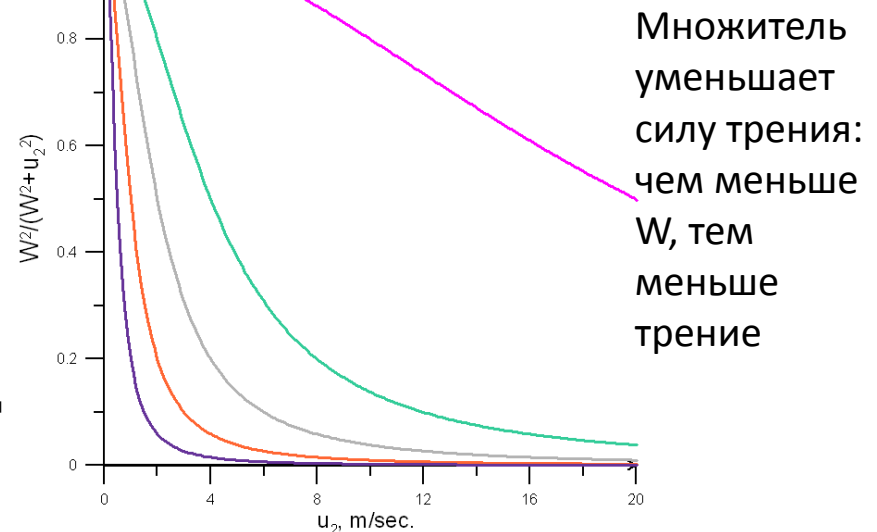
# Сухое трение, параметр W

$$\lambda_2 = 0$$

$$\delta = 1^\circ$$



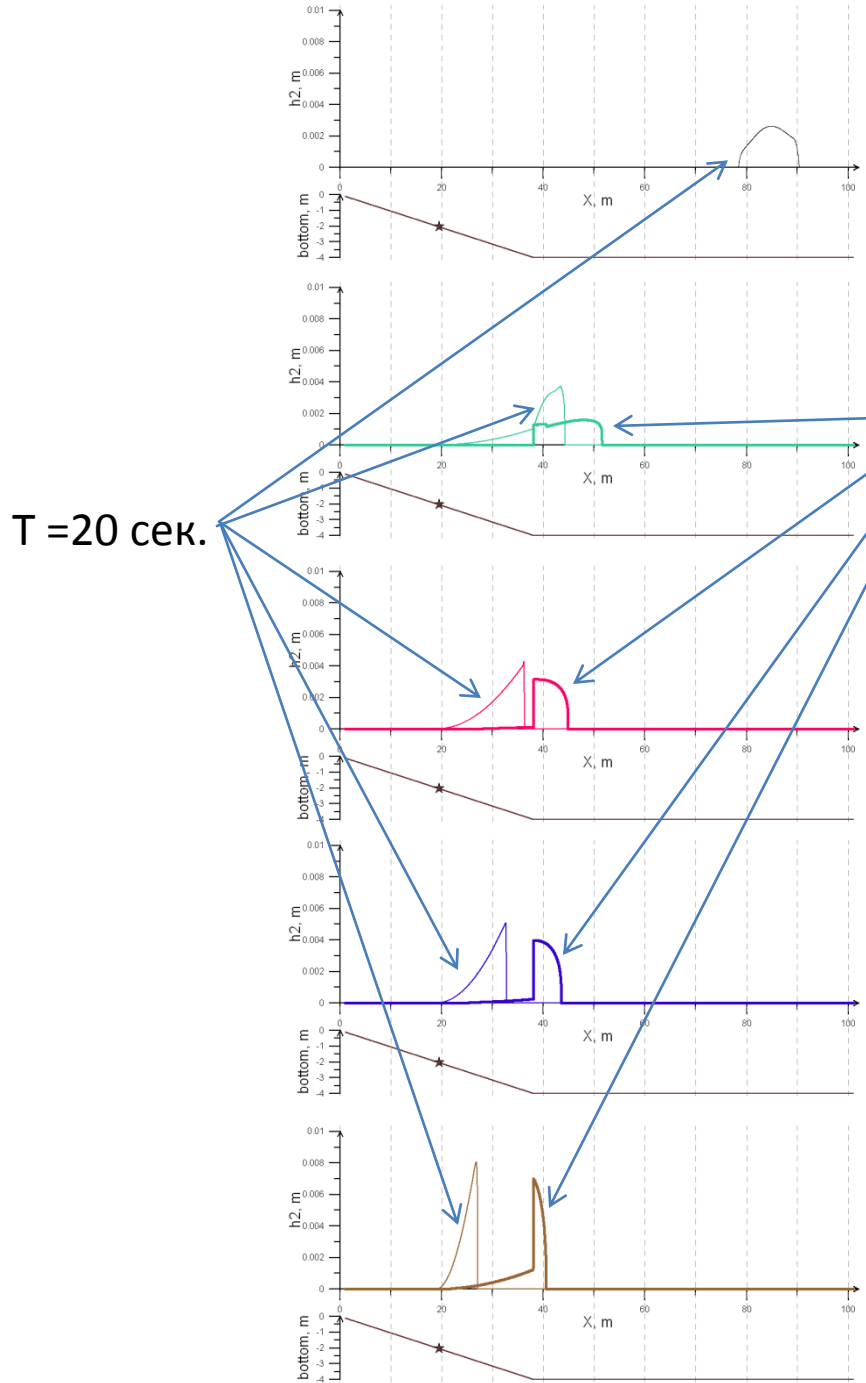
$$\tau_2 = \rho_2 \left( K \underbrace{\frac{W^2}{(u_2)^2 + W^2}}_{\text{сухое трение}} + \underbrace{\lambda_2 |u_2| u_2}_{\text{вязкое трение}} \right)$$



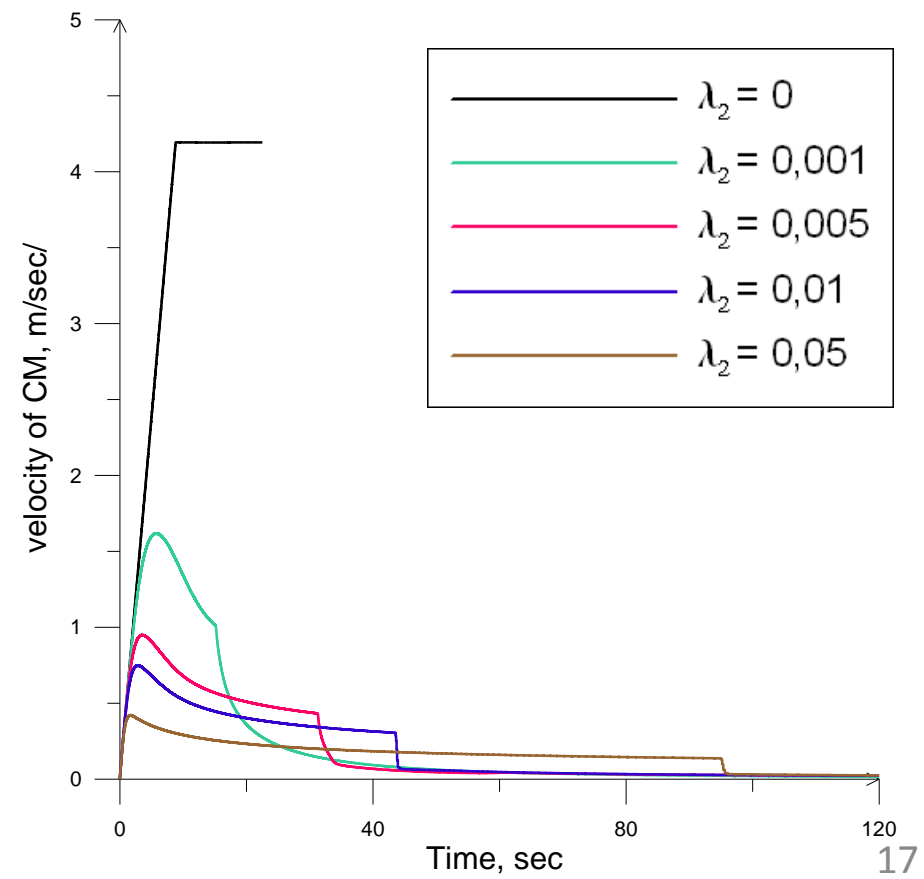


# Вязкое трение, параметр $\lambda_2$

$W = 0$   
 $\delta = 0^\circ$



$T = 120$  сек.



# Сравнение подходов: МОДЕЛЬ ТВЕРДОГО ОПОЛЗНЯ

$$\rho_{sl} V \frac{d^2 S}{dt^2} = F_a + F_g + F_b + F_d + F_n$$

$S$  – путь, пройденный центром масс оползня,

$F_a$  – сила присоед. массы,  $F_g$  – сила тяжести,  $F_n$  – сила трения,

$F_b$  – сила выталкивания,  $F_d$  – сила гидродин. сопротивления.

$$(\rho_{sl} + C_w \rho_w) V \frac{d^2 S}{dt^2} = (\rho_{sl} - \rho_w) W g I_1 - W \left[ (\rho_{sl} - \rho_w) I_2 + \frac{1}{2} C_d \rho_w T \right] \left( \frac{dS}{dt} \right)^2$$

$$I_1 = \int_{x_l(t)}^{x_r(t)} h_2(x + x_{c0} - x_c(t)) \left[ \sin \theta(x) - C_f \cos \theta(x) \right] dx$$

$$I_2 = C_f \int_{x_l(t)}^{x_r(t)} h_2(x + x_{c0} - x_c(t)) K(x) dx$$

$$K(x) = H''(x) \left( \sqrt{1 + [H'(x)]^2} \right)^{-3} - \text{кривизна}$$

$C_w$  – коэф. присоед. массы

$C_d$  – коэф. сопротивления

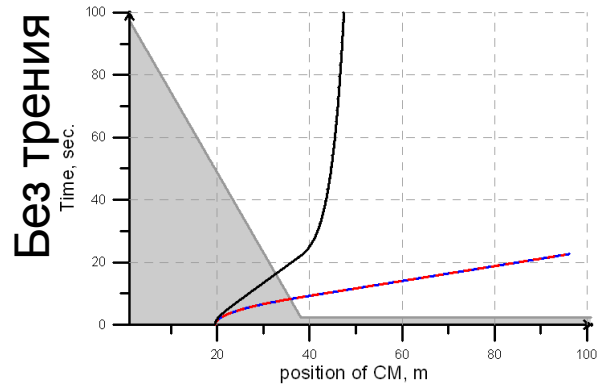
$C_f = \tan \theta_*$

$\theta_*$  – угол трения

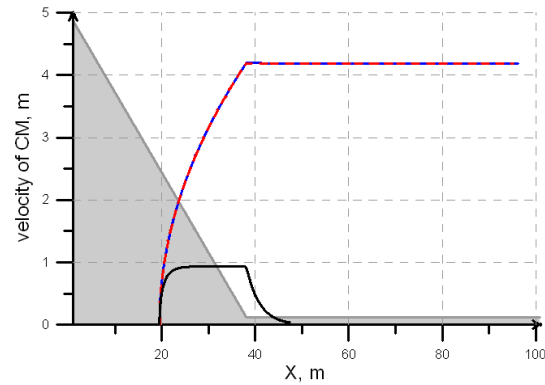
$$C_w = C_d = 1.0$$

# Характеристики движения оползня

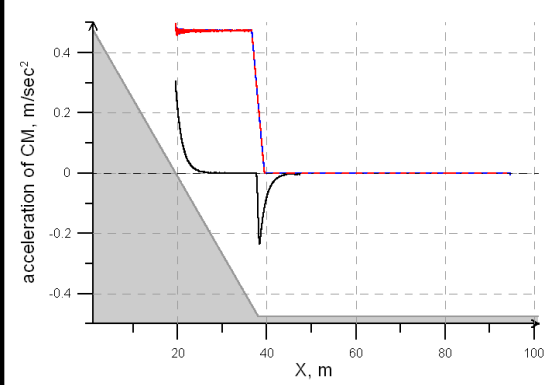
Траектория центра масс



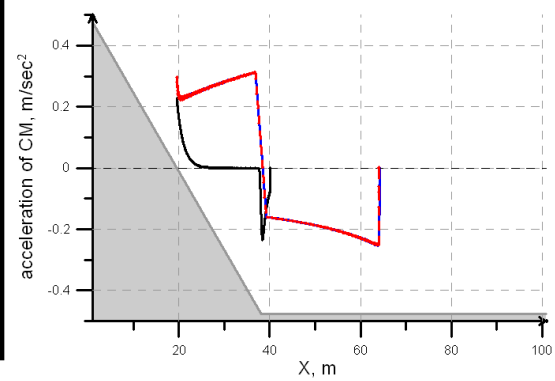
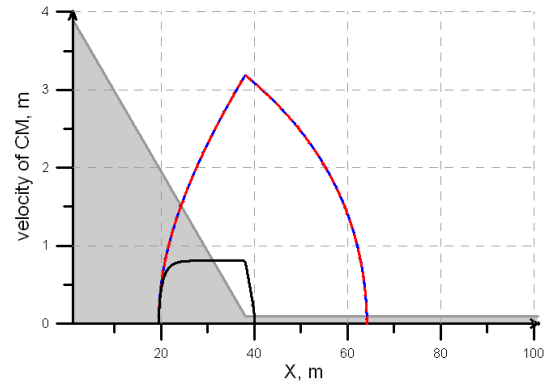
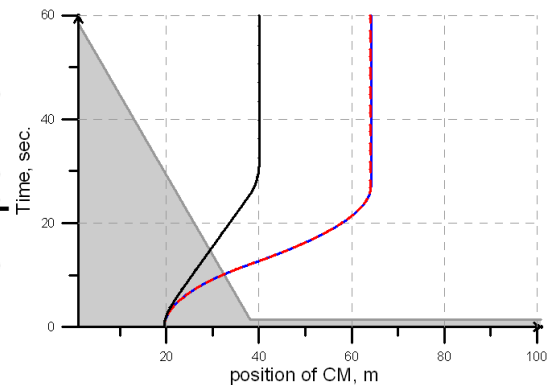
Скорость



Ускорение



С трением



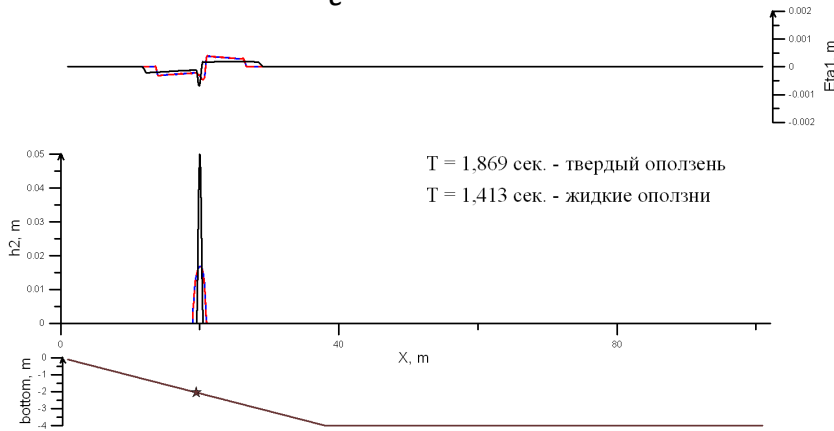
черная линия – модель твердого оползня,  
красно-синий пунктир – модель жидкого оползня

$$C_w = C_d = 1.0$$

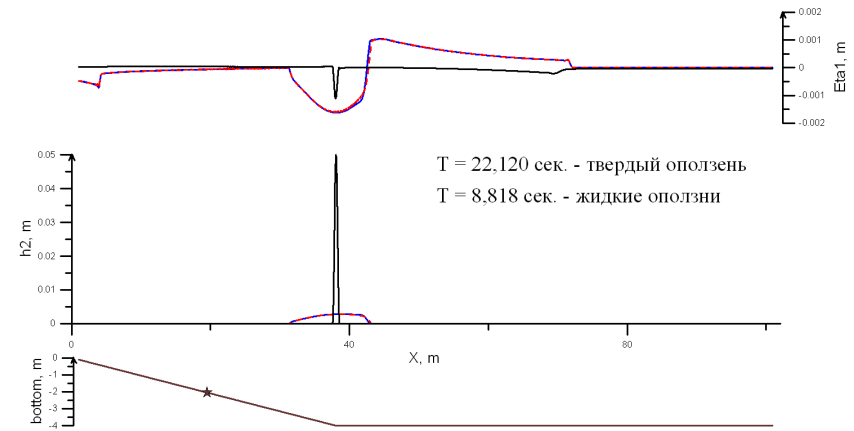
# Поверхности оползня и воды

Без трения

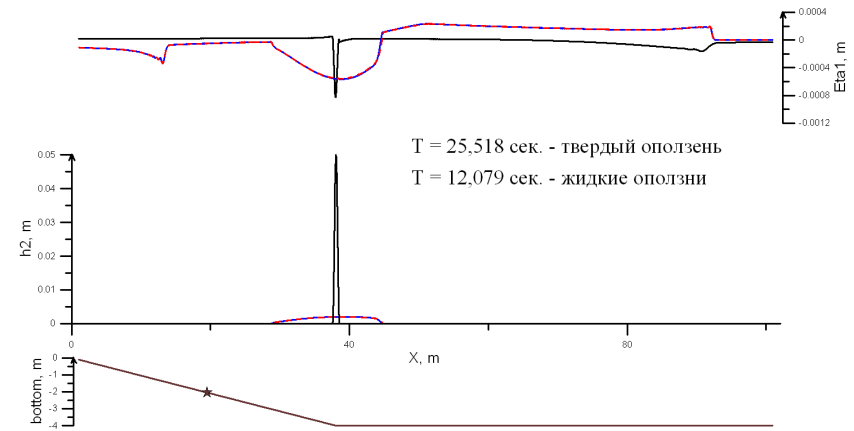
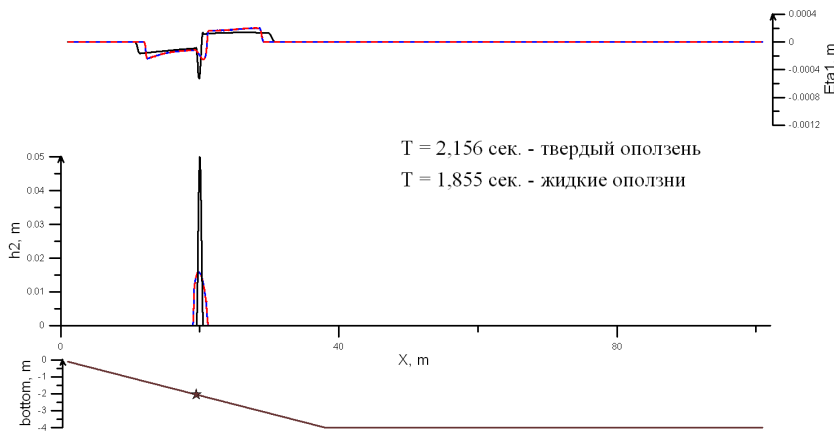
$x_c = 20.0$  м



$x_c = 40.0$  м



С трением

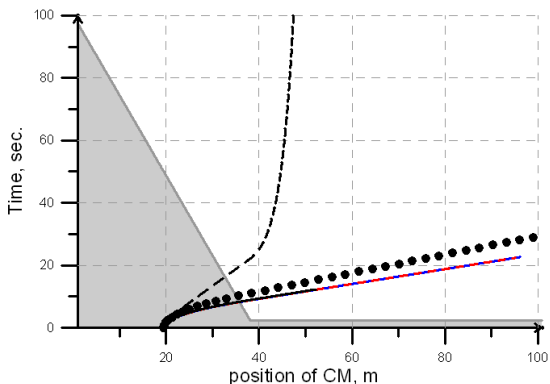


черная линия – модель твердого оползня,  
 красно-синий пунктир – модель жидкого оползня

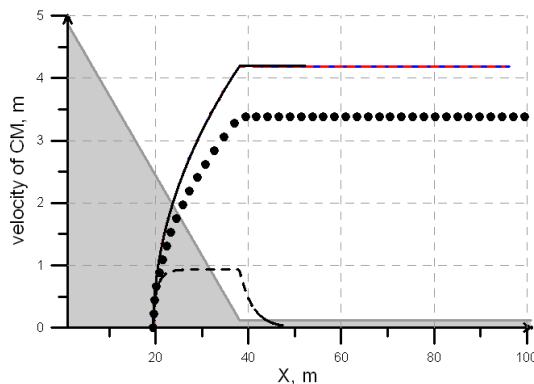
$$C_w = C_d = 1.0$$

# Характеристики движения оползня

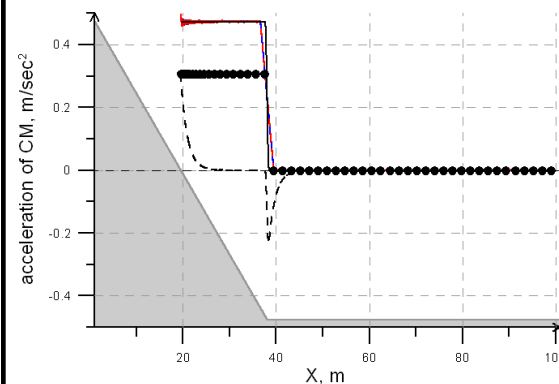
Траектория центра масс



Скорость

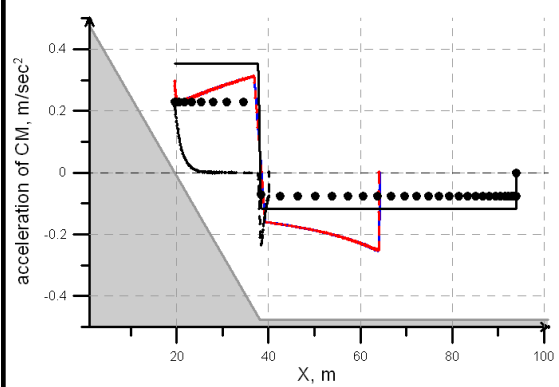
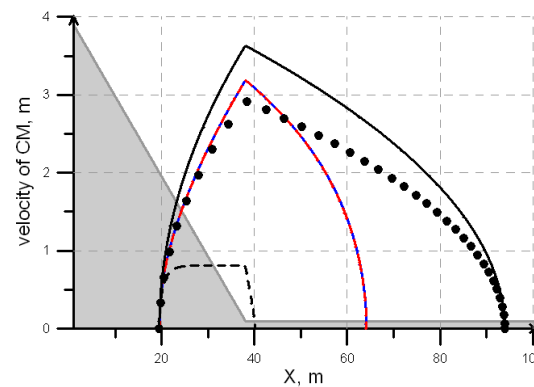
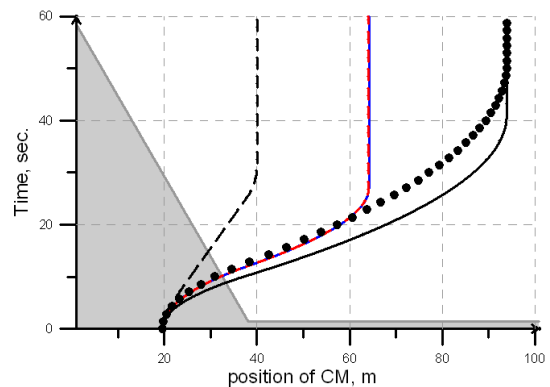


Ускорение



Без трения

С трением



Черная пунктирная линия – базовая модель твердого оползня ( $C_w = C_d = 1$ ),  
 черные кружки – модель твердого оползня **без силы гидр. сопротивления** ( $C_w = 1, C_d = 0$ ),  
 черная сплошная – модель твердого оползня **без силы гидр. сопротивления и присоединенной массы** ( $C_w = C_d = 0$ ),  
 красно-синий пунктир – модель жидкого оползня.

# Результаты

- Построена численная модель оползневого механизма генерации волн цунами на основе двухслойной модели мелкой воды.
- Показаны зависимости характеристик волнового процесса от основных параметров задачи: плотности и размеров оползня, параметров трения.
- Продемонстрированы различия между подходами, представляющими оползень как жидкость и как твердое тело.