

ВАРИАНТЫ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИЙ И
НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПОВЫШЕННОЙ
ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Построение новых вариантов высокого порядка точности метода коллокаций и наименьших квадратов (КНК) для численного решения уравнений Навье-Стокса, исследование их возможностей на решении эталонных задач.

- 1 Введение
- 2 Варианты метода КНК для уравнений Навье-Стокса
 - Постановка задачи
 - Описание метода
 - Численные эксперименты
- 3 Ускорение сходимости итераций решения СЛАУ

- Пусть решается задача приближенного восстановления функции $f(x)$, заданные дискретные значения которой

$$\hat{f}_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

имеют случайные погрешности ε_i , превышающие по величине допустимую погрешность интерполирования.

- Известно, что аппроксимант $\Phi(x)$, построенный по таким данным **методом наименьших квадратов (МНК)**, может приближать $f(x)$ точнее, чем интерполянт (в частности, многочлен Лагранжа).

В МНК лучшая точность решения достигается за счет минимизации функционала невязок $\sum_{i=0}^n (\Phi(x_i) - \hat{f}_i)^2$.

Примечание. Аппроксимант $\Phi(x)$ находится в результате решения переопределенной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Пусть

$$L(u) = 0$$

— дифференциальная задача,

$$L_h(u_h) = 0$$

— соответствующая ей алгебраическая задача, построенная аппроксимацией уравнений и краевых условий дифференциальной задачи.

Здесь

$$u$$

— решение дифференциальной задачи,

$$u_h$$

— решение соответствующей алгебраической задачи, которую принимают за приближенное решение дифференциальной.

В методе коллокаций и наименьших квадратов

$$L_h(u_h) = 0$$

— переопределенная СЛАУ. Ее решение ищется путем минимизации функционала невязок.

Аналогично, как в приведенном выше примере, численное решение краевых задач для дифференциальных уравнений, полученное методом коллокаций и наименьших квадратов (КНК) обладает лучшими свойствами, чем решения, построенные просто методом коллокаций.

Метод коллокаций успешно применялся для численного решения

- обыкновенных дифференциальных уравнений
(Russel R.D., Shampine L.F., 1972; de Boor C., Swartz B., 1973; Ascher U., Christiansen J., Russel R.D., 1978; ...),
- эллиптических и параболических уравнений
(Плясунова А.В., Слепцов А.Г., 1987; Leyk Z., 1993; ...).

Суть метода коллокаций заключается в следующем.

- Приближенное решение ищется в конечномерном линейном пространстве функций.
- Неизвестные коэффициенты его разложения по базису пространства определяются из уравнений коллокаций и краевых условий.
- Уравнения коллокаций — требования того, чтобы приближенное решение удовлетворяло дифференциальным уравнениям задачи в конечном множестве точек области постановки задачи (точках коллокаций).
- Краевые условия получаются из соответствующих условий исходной постановки задачи, записанных в нескольких точках на границе области.

- В методе коллокаций записывается ровно столько уравнений, сколько имеется неизвестных.
- В методе коллокаций и наименьших квадратов (КНК) число уравнений превосходит число неизвестных, то есть система, из которой ищутся неизвестные коэффициенты, является переопределенной.
- Для ее решения используется метод наименьших квадратов.

Постановка задачи

В области $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$ рассмотрим краевую задачу для стационарных уравнений Навье-Стокса

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 \frac{\partial v_j}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_j}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta v_j = f_j, \quad j = 1, 2, \\ \text{div} \vec{v} = 0, \\ \vec{v}|_{\partial\Omega} = \vec{V}, \quad \int_{\Omega} p d\Omega = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где

- $\vec{v} = (v_1, v_2)$ — вектор скорости,
- $p(x_1, x_2)$ — давление,
- Re — Число Рейнольдса.

- Область Ω покрывается сеткой, состоящей из N прямоугольных ячеек $\Omega_1, \dots, \Omega_N$.
- Решение задачи (1) строится с помощью итерационного процесса¹. В нем каждая итерация состоит из последовательного решения локальных краевых задач в подобластях $\Omega_1, \dots, \Omega_N$.

¹ **Мацокин А.М., Непомнящих С.В.** Метод альтернирования Шварца в подпространстве // Известия ВУЗов, 1985.

На итерации по подобласти Ω_i рассматривается локальная задача

$$\begin{aligned}
 (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p &= \frac{1}{Re} \Delta \vec{v} + \vec{f}, & (x_1, x_2) \in \Omega_i, \\
 \operatorname{div} \vec{v} &= 0, & (x_1, x_2) \in \Omega_i, \\
 v_n + \frac{\partial v_n}{\partial n} - p &= \hat{v}_n + \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial n} - \hat{p}, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega, \\
 v_\tau + \frac{\partial v_\tau}{\partial n} &= \hat{v}_\tau + \frac{\partial \hat{v}_\tau}{\partial n}, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega, \\
 \vec{v} &= \vec{V}, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\
 \int_{\Omega_i} p d\Omega &= - \int_{\Omega \setminus \Omega_i} p d\Omega,
 \end{aligned}$$

где

- \vec{n} и $\vec{\tau}$ — векторы внешней нормали и касательной к границе ячейки $\partial\Omega_i$ соответственно,
- $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$, $v_\tau = \vec{v} \cdot \vec{\tau}$,
- \hat{v}_n , \hat{v}_τ , \hat{p} — приближения для компонент решения, имеющиеся в соседних ячейках при построении решения на текущей итерации по подобласти Ω_i .

- Приближенное решение локальной задачи строится в каждой ячейке с помощью метода КНК.
- Скорость (v_1, v_2) ищется в пространстве

$$V_{m_v}(\tilde{\Omega}_i) = \{(v_1, v_2) : v_1 \in P_{m_v}(\Omega_i), v_2 \in P_{m_v}(\Omega_i), \operatorname{div} \vec{v} = 0\},$$

где $P_{m_v}(\Omega_i)$ — пространство, состоящее из всех полиномов степени не выше m_v , определенных в Ω_i .

- Давление p ищется в пространстве $P_{m_p}(\Omega_i)$.

Приближенное решение тождественно удовлетворяет уравнению неразрывности $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ внутри каждой ячейки. Это одно из достоинств вариантов метода КНК, предложенных в данной работе.

В ячейке Ω_i приближенное решение представляется в виде

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{d_v} C_{ik}^v \vec{\varphi}_k^v, \quad p = \sum_{k=1}^{d_p} C_{ik}^p \varphi_k^p,$$

где

- $\vec{\varphi}_k^v$ и C_{ik}^v , $k = 1, \dots, d_v$ — базис и коэффициенты для скорости,
- φ_k^p и C_{ik}^p , $k = 1, \dots, d_p$ — базис и коэффициенты для давления.

Соленоидальный базис для компонент скорости

Базисные элементы для скорости $\vec{\varphi}_1^v, \dots, \vec{\varphi}_{d_v}^v$ выбирались здесь следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \xi_2^{\alpha_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1^{\alpha_1} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq m_v,$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha_1} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \\ \frac{1}{\alpha_2+1} \xi_1^{\alpha_1-1} \xi_2^{\alpha_2+1} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq \alpha_1 \leq m_v, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq m_v - \alpha_1.$$

где (ξ_1, ξ_2) — локальная система координат в ячейке Ω_i :

$$\xi_1 = \frac{x_1 - x_{1ci}}{h_i}, \quad \xi_2 = \frac{x_2 - x_{2ci}}{h_i},$$

(x_{1ci}, x_{2ci}) — центр ячейки, $h_i = (h_{1i} h_{2i})^{1/2}$, $2h_{1i}$, $2h_{2i}$ — размеры ячейки по направлениям осей x_1 и x_2 соответственно.

В качестве базиса для p используются мономы

$$\xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq m_p, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq m_p - \alpha_1.$$

Коэффициенты разложения приближенного решения локальной задачи по базису находятся из переопределенной СЛАУ, состоящей из

- **уравнений коллокаций** — требования того, чтобы приближенное решение удовлетворяло уравнениям Навье-Стокса в конечном множестве точек ячейки (точках коллокаций),
- **условий согласования** — краевые условия локальной задачи, которые записываются на границах между соседними ячейками,
- **краевых условий** задачи (1), записанных в конечном числе точек (для ячеек, примыкающих к границе $\partial\Omega$),
- **интегрального условия для давления.**

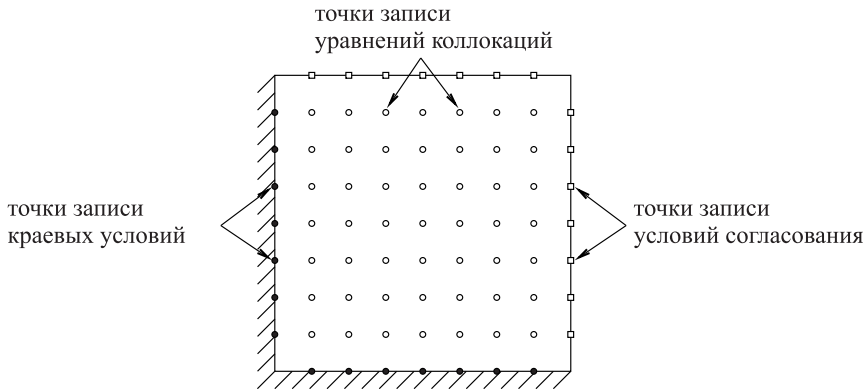


Рис.: Схема расположения точек записи уравнений коллокаций (o), условий согласования (□) и краевых условий (●) в ячейке сетки.

- Линеаризация уравнений коллокаций производится по Ньютону. Итерации по подобластям и по нелинейности совмещаются.
- Коэффициенты приближенного решения находится из условия минимума функционала

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n_c} \Psi_{ck}^2 + \sum_{k=1}^{n_m} \Psi_{mk}^2 + \sum_{k=1}^{n_b} \Psi_{bk}^2,$$

где Ψ_{ck} , Ψ_{mk} , Ψ_{bk} — невязки, а n_c , n_m , n_b — количества уравнений коллокаций, условий согласования и граничных условий, записанных в ячейке, соответственно.

- Вместо МНК, который использовался в ранних версиях метода КНК, здесь используется ортогональный метод линейной алгебры. Он дает то же решение, что и МНК при отсутствии ошибок округления. Ортогональный метод не ухудшает обусловленность системы в процессе решения в отличие от МНК.

Проверка сходимости на последовательности сеток

Эксперименты проводились с тестовым решением

$$v_1(x_1, x_2) = \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2),$$

$$v_2(x_1, x_2) = -\sin(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2),$$

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right) \right) - \frac{2}{\pi}.$$

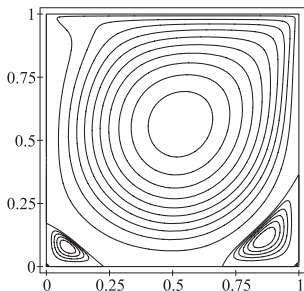
Таблица: Погрешности компонент приближенного решения метода КНК на последовательности сеток, $Re=100$.

Сетка	$\ \vec{v} - \vec{v}_h\ _{C(\Omega)}$	$\frac{\ \vec{v} - \vec{v}_{2h}\ _{C(\Omega)}}{\ \vec{v} - \vec{v}_h\ _{C(\Omega)}}$	$\ p - p_h\ _{C(\Omega)}$	$\frac{\ p - p_{2h}\ _{C(\Omega)}}{\ p - p_h\ _{C(\Omega)}}$
$m_v=2, m_p=1$				
10×10	$6.02 \cdot 10^{-2}$	—	$6.64 \cdot 10^{-2}$	—
20×20	$1.37 \cdot 10^{-2}$	4.4	$1.66 \cdot 10^{-2}$	4.0
40×40	$3.11 \cdot 10^{-3}$	4.4	$4.41 \cdot 10^{-3}$	3.8
$m_v=3, m_p=2$				
10×10	$7.22 \cdot 10^{-3}$	—	$1.22 \cdot 10^{-2}$	—
20×20	$1.42 \cdot 10^{-3}$	5.1	$2.37 \cdot 10^{-3}$	5.1
40×40	$2.83 \cdot 10^{-4}$	5.0	$4.71 \cdot 10^{-4}$	5.0
$m_v=4, m_p=3$				
10×10	$7.24 \cdot 10^{-4}$	—	$9.83 \cdot 10^{-4}$	—
20×20	$3.39 \cdot 10^{-5}$	21.4	$6.20 \cdot 10^{-5}$	15.9
40×40	$1.97 \cdot 10^{-6}$	17.2	$3.85 \cdot 10^{-6}$	16.1
$m_v=5, m_p=4$				
5×5	$8.71 \cdot 10^{-3}$	—	$1.34 \cdot 10^{-2}$	—
10×10	$2.82 \cdot 10^{-4}$	30.9	$4.14 \cdot 10^{-4}$	32.4
20×20	$8.31 \cdot 10^{-6}$	34.0	$1.30 \cdot 10^{-5}$	31.9

Таблица: Погрешности компонент приближенного решения метода КНК на последовательности сеток, $Re=100$.

Сетка	$\ \vec{v} - \vec{v}_h\ _{C(\Omega)}$	$\frac{\ \vec{v} - \vec{v}_{2h}\ _{C(\Omega)}}{\ \vec{v} - \vec{v}_h\ _{C(\Omega)}}$	$\ p - p_h\ _{C(\Omega)}$	$\frac{\ p - p_{2h}\ _{C(\Omega)}}{\ p - p_h\ _{C(\Omega)}}$
$m_v=6, m_p=5$				
5×5	$6.30 \cdot 10^{-4}$	—	$9.4 \cdot 10^{-4}$	—
10×10	$7.53 \cdot 10^{-6}$	83.7	$1.15 \cdot 10^{-5}$	82.0
20×20	$6.48 \cdot 10^{-8}$	116	$1.05 \cdot 10^{-7}$	109
$m_v=7, m_p=6$				
5×5	$2.57 \cdot 10^{-5}$	—	$3.73 \cdot 10^{-5}$	—
10×10	$2.68 \cdot 10^{-7}$	95.8	$4.08 \cdot 10^{-7}$	91.3
20×20	$2.08 \cdot 10^{-9}$	129	$3.27 \cdot 10^{-9}$	125
$m_v=8, m_p=7$				
5×5	$6.10 \cdot 10^{-6}$	—	$7.17 \cdot 10^{-6}$	—
10×10	$1.79 \cdot 10^{-8}$	340	$2.81 \cdot 10^{-8}$	255
20×20	$4.01 \cdot 10^{-11}$	447	$6.69 \cdot 10^{-11}$	420

Задача о течении в каверне



- Задача о течении в каверне считается многими авторами эталонной проблемой для тестирования численных методов решения уравнений Навье-Стокса.
- Присутствие особенностей в углах каверны порождает сложную картину течения, представленную многочисленными вихрями, интенсивность и расположение которых зависят от числа Рейнольдса.
- Эта задача используется здесь для демонстрации возможностей метода КНК для моделирования течений вязких жидкостей.

Botella O. and Peyret R. (1998)

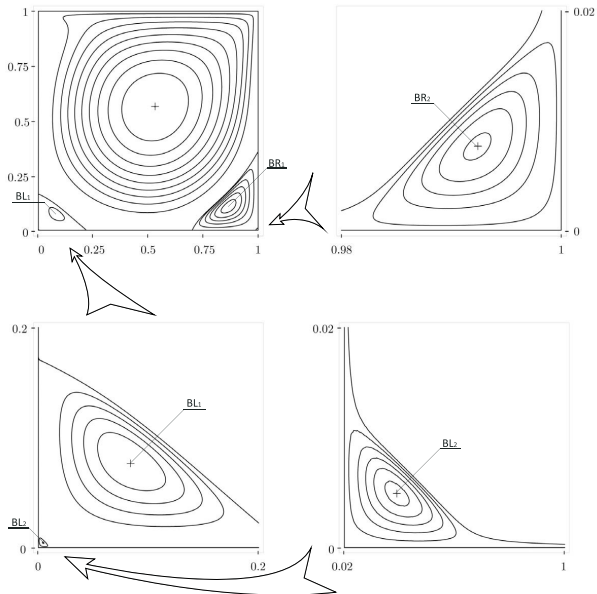
В этой работе решение строится спектральным методом. Для повышения точности расчета используется исключение главных членов асимптотики решения в верхних углах каверны, где оно имеет особенности (скорость терпит разрыв на границе).

Garanzha V.A., Konshin V.N. (1999)

Решение получено с помощью компактной конечно-разностной схемы высокого порядка.

Shapeev A.V., Lin P. (2009)

Используется высокоточный метод конечных элементов с экспоненциальным сгущением сетки около углов каверны. В окрестности всех углов выписываются асимптотики точного решения, которые затем используются при построении приближенного.



Картина течения в каверне при $Re = 1000$ и ее увеличенные фрагменты. Приближенное решение получено методом КНК ($m_v = 2$, $m_p = 2$) на модифицированной сетке Гаусса-Лобатто 320×320 .

Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using ... // J. Comput. Phys. 1982.

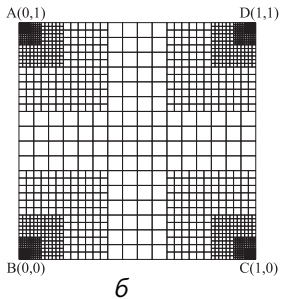
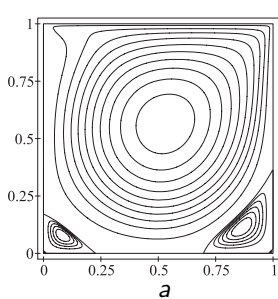


Рис.: Картина течения в каверне при $Re = 1000$ (а). Расчетная сетка M_1 (б).

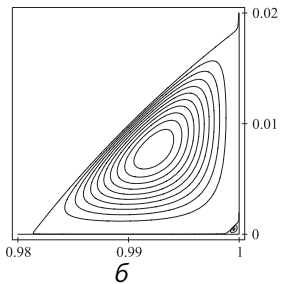
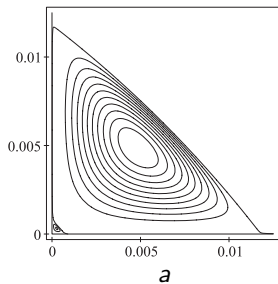
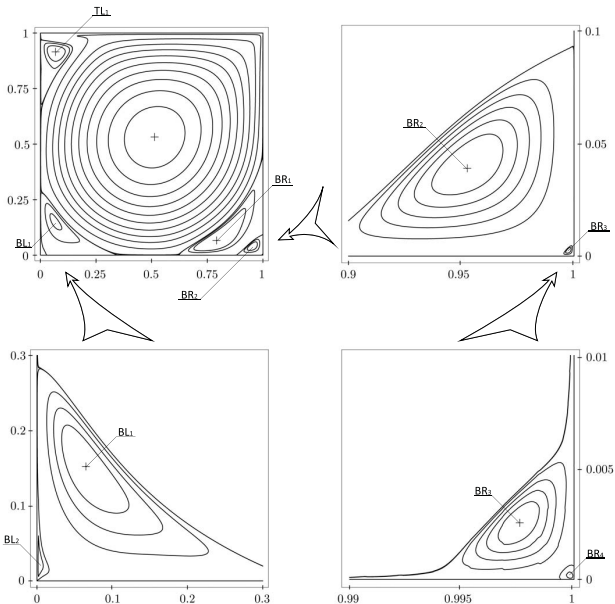


Рис.: Угловые вихри BL_2, BL_3 (а) и BR_2, BR_3 (б) при $Re = 1000$.



Картина течения в каверне при $Re = 7500$ и ее увеличенные фрагменты.

Приближенное решение получено методом КНК ($m_v = 2$, $m_p = 1$) на равномерной сетке 1280×1280 .

Экстремумы компонент скорости на средних линиях каверны, $Re = 1000$.

Работа	Сетка	$u_{1 \min}$	$u_{2 \min}$	$u_{2 \max}$
Гаранжа В.А., Коньшин В.Н.	160 × 160	-0.388569	—	—
Botella O., Peyret R.	160 × 160	-0.3885698	-0.5270771	0.3769447
эта работа ¹	сетка M_1 (1843 ячейки)	-0.3882982	-0.5266935	0.3766800
эта работа ¹	сетка M_2 (7372 ячейки)	-0.3885672	-0.5270754	0.3769419
эта работа ¹	сетка M_3 (29488 ячеек)	-0.3885697	-0.5270771	0.3769446

¹Приближенное решение получено методом КНК при $m_v = 6$, $m_p = 5$.

Интенсивность и положение центров вихрей в каверне при $Re = 1000$.

работа	ψ	x_1	x_2
центральный вихрь PE			
эта работа ¹ , сетка M_1	-0.11885323	0.53067831	0.56523414
эта работа ¹ , сетка M_2	-0.11893562	0.53078734	0.56523714
эта работа ¹ , сетка M_3	-0.11893658	0.53079012	0.56524057
Botella, Peyret	-0.1189366	0.5308	0.5652
Shapeev, Lin	-0.1189366	0.5307901	0.5652406
левый нижний угловой вихрь BL ₁			
эта работа ¹ , сетка M_3	0.0002334526	0.08327317	0.07809572
Botella, Peyret	0.0002334528	0.0833	0.0781
Shapeev, Lin	0.0002334529	0.08327318	0.07809572
правый нижний угловой вихрь BR ₁			
эта работа ¹ , сетка M_3	0.001729716	0.8640401	0.1118062
Botella, Peyret	0.001729717	0.8640	0.1118
Shapeev, Lin	0.001729717	0.8640401	0.1118062
левый нижний угловой вихрь BL ₂			
эта работа ¹ , сетка M_3	$-6.398534 \cdot 10^{-9}$	0.004842807	0.004845128
Botella, Peyret	$-6.39800 \cdot 10^{-9}$	0.00484	0.00484
Shapeev, Lin	$-6.398554 \cdot 10^{-9}$	0.004842696	0.004845241
правый нижний угловой вихрь BR ₂			
эта работа ¹ , сетка M_3	$-5.040767 \cdot 10^{-8}$	0.9923249	0.007651025
Botella, Peyret	$-5.03944 \cdot 10^{-8}$	0.99232	0.00765
Shapeev, Lin	$-5.039380 \cdot 10^{-8}$	0.9923249	0.007650979
левый нижний нижний угловой вихрь BL ₃			
эта работа ¹ , сетка M_3	$2.18 \cdot 10^{-13}$	0.000271	0.00032
Shapeev, Lin	$1.764264 \cdot 10^{-13}$	0.0002923789	0.0002923791
правый нижний нижний угловой вихрь BR ₃			
эта работа ¹ , сетка M_3	$1.44 \cdot 10^{-12}$	0.9995307	0.000456
Shapeev, Lin	$1.389493 \cdot 10^{-12}$	0.9995375	0.0004625364

¹ Приближенное решение получено методом КНК при $m_v = 6$, $m_p = 5$.

Isaev V.I., Shapeev V.P.

High-Accuracy Versions of the Collocations and Least Squares Method for the Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations // *Computational Mathematics and Mathematical Phys.* 2010. Vol. 50, No. 10. P. 1670–1681.

- 1 Число неизвестных в методе КНК при $m_v = 2$, $m_p = 2$ составляет $6 \cdot 10^6$ для равномерной сетки 640×640 и $25 \cdot 10^6$ для 1280×1280 .
- 2 Несмотря на большое число неизвестных, наблюдается сходимость приближенного решения на последовательности сеток 320×320 , 640×640 , 1280×1280 .
- 3 Использование в методе КНК таких подробных сеток при счете на однопроцессорной ПЭВМ стало возможным, благодаря улучшениям, сделанным в данной работе: применению ортогональных алгоритмов линейной алгебры вместо МНК и метода ускорения сходимости итераций решения СЛАУ.

Ускорение сходимости итераций решения СЛАУ

Рассматривается итерационный процесс решения СЛАУ $Ax = b$

$$x_{n+1} = Tx_n + f, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Здесь A , T — это квадратные матрицы, b — вектор правых частей. Для ускорения сходимости через каждые k шагов к текущему приближению x_n добавляется поправка y_n :

$$\tilde{x}_n = x_n + y_n. \quad (3)$$

Поправка y_n ищется в подпространстве Крылова $K_{k-1}(r_{n-k+1}, T)$ в виде

$$y_n = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i r_{n-k+i}, \quad (4)$$

где $r_i = Tx_i + f - x_i = x_{i+1} - x_i$ — векторы невязок.

Слепцов А.Г. Об ускорении сходимости линейных итераций // Моделирование в механике. Новосибирск, 1989. Т. 3(20), № 3. С. 132–147.

Karamyshev V.B., Kovenya V.M., Sleptsov A.G., Cherny S.G. Variational Method of Accelerating Linear Iterations and Its Applications // Computers & Fluids, Vol. 25, No. 5, pp. 467-484, 1996.

Из требования минимизации нормы невязки

$$\| \mathbf{T}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{f}) \|_2^2 \rightarrow \min$$

получается переопределенная СЛАУ для нахождения неизвестных коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$

$$\alpha_1 \left(\mathbf{r}_{n-k+1} - \mathbf{r}_{n-k} \right) + \dots + \alpha_{k-1} \left(\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_{n-2} \right) = - \left(\mathbf{r}_{n-1} \right). \quad (5)$$

В работе (Слепцов А.Г., 1989) для решения этой системы используется метод наименьших квадратов.

- 1 Система (5) становится плохо обусловленной после достаточно большого количества итераций.
- 2 Иногда необходимо уменьшать число невязок, используемых для поправки (в случае, когда среди невязок есть близкие к линейно зависимым).
- 3 Для решения переопределенной системы (5) здесь используется ортогональный метод, основанный на QR разложении. Число линейно независимых невязок, которые можно использовать для поправки, определяется автоматически в ходе процесса ортогонального исключения. Критерий выбора числа невязок основан на контроле величины ведущего элемента исключения.

Теорема

При $k = 2$ поправка (3), (4) совпадает с поправкой δ^2 -процесса Эйткена.

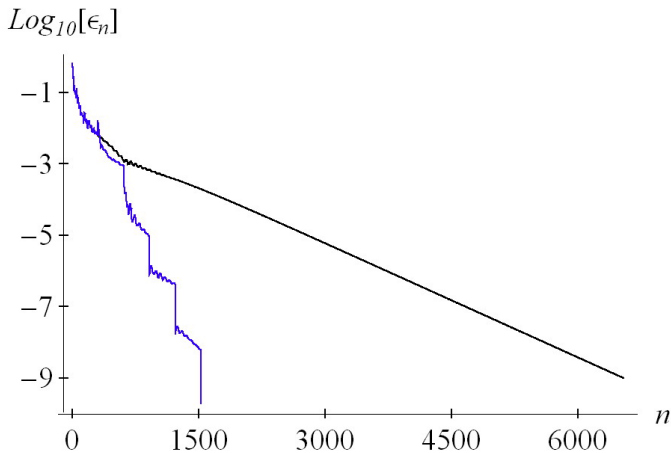


Рис.: Зависимость псевдопогрешности ϵ_n от номера итерации n с (синий график) и без (черный график) использования ускорения ($k = 10$).

Число итераций, необходимых для достижения заданного уровня псевдопогрешности, сократилось в 4 раза после использования ускорения.

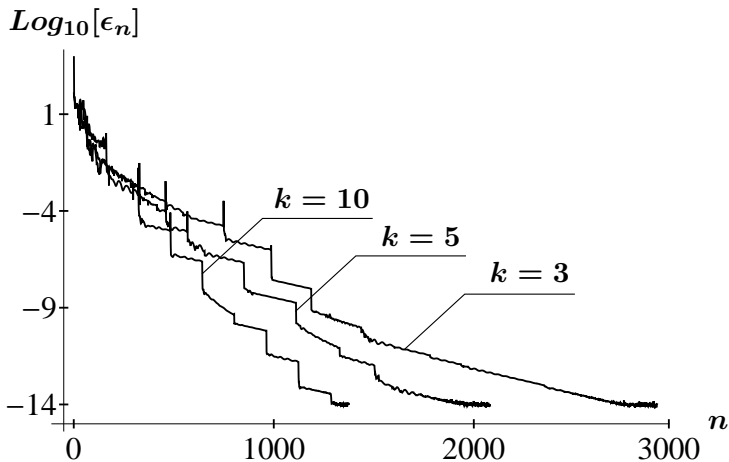
















Рис.: Зависимость псевдопогрешности ϵ_n от номера итерации n при использовании разного числа невязок в методе ускорения сходимости ($k = 3, 5, 10$).

Число итераций, необходимых для достижения заданного уровня псевдопогрешности, сократилось в 2 раза с увеличением k от 3 до 10.

Спасибо за внимание.

Список литературы

-  **Moffatt H.K.** Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. 1964. No. 18. P. 1–18.
-  **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 С.
-  **Russell R.D., Shampine L.F.** A collocation method for boundary value problems // Numer. Math. 1972. Vol. 10. P. 582–606.
-  **de Boor C., Swartz B.** Collocation at Gaussian points // SIAM J. Numer. Anal. 1973. Vol. 10, №. 4. P. 582–606.
-  **Ascher U., Christiansen J., Russel R.D.** A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems // Math. Comp. 1979. Vol. 33. P. 659–679.
-  **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
-  **Съярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 511 с.

-  **Carey G.G., Cheung Y.K., Lau S.L.** Mixed operator problems using least squares finite element collocation // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1980. Vol. 22. P. 121–130.
-  **Темам Р.** Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 С.
-  **Мысовских И.П.** Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981. 336 с.
-  **Saad Y.** Krylov Subspace Methods for Solving Large Unsymmetric Linear Systems // Mathematics of computation. July 1981. Vol 37, №. 155. P. 105–126.
-  **Mizusawa T., Kajita T.** Application of point least squares method with B-splines in solid mechanics problems // Int. J. Numer. Methods Eng. 1982. Vol. 18, No. 6. P. 897–907.
-  **Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.** High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the NavierStokes Equations and a Multigrid Method // J. Comput. Phys. 1982, No. 48. P. 387–411.
-  **Беклемишев Д.В.** Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983. 335 с.
-  **Burgess G., Mahajerin E.** Rotational fluid flow using a least squares collocation technique // Comput. Fluids. 1984. Vol. 12. P. 311–317.



Chen C.J., Chen H.J. Finite analytic numerical method for unsteady two-dimensional Navier Stokes equations // J. Computational Physics. 1984. Vol. 53, №. 2. P. 209–226.



Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Метод альтернирования Шварца в подпространстве // Известия ВУЗов. Математика. 1985. № 10. С. 61–66.



Dong S.B., Lopez A.E. Natural vibrations of a clamped circular plate with rectilinear orthotropy by least-squares collocation // Int. J. Solids Struct. 1985. Vol. 21. P. 515–526.



Плясунова А.В., Слепцов А.Г. Коллокационно-сеточный метод решения нелинейных параболических уравнений // Моделирование в механике. Новосибирск, 1987. Т. 1(18), № 4 — С.116 – 137.



Jiang B.-N., Carey G.F. Adaptive refinement for least-squares finite elements with element-by-element conjugate gradient solution // Int. J. Numer. Meth. Engineering. 1987. Vol. 24. P. 569–580.



Слепцов А.Г. Об ускорении сходимости линейных итераций // Моделирование в механике. Новосибирск, 1989. Т. 3(20), № 3. С. 132–147.



Слепцов А.Г. Об ускорении сходимости линейных итераций 2// Моделирование в механике. Новосибирск, 1989. Т. 3(20), № 5. С. 132–147.



Schild K.H. Gaussian collocation via defect correction // Numerische Mathematik. 1990. 58. P. 369–386.



Bentley L.R., Pinder G.F., Herrera I. Solution of the advective-dispersive transport equation using a least squares collocation, Eulerian-Lagrangian method // Numer. Methods Partial Differ. Equations. 1989. Vol. 5, No. 3. P. 227–240.



Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990. 230 С.



Bruneau C.H., Jouron C. An efficient scheme for solving steady incompressible Navier Stokes equations // J. Computational Physics. 1990. Vol. 89, №. 2. P. 389–413.



Saad Y. Numerical methods for large eigenvalue problems. Manchester University Press. 1991. 358 pp.



Leyk Z. A C0-Collocation-like method for elliptic equations on rectangular regions // The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics, 38, pp 368-387



Слепцов А.Г., Летова Е.Ю., Саломатов К.Г., Шмыков И.В.
Переопределенные системы конечно-разностных уравнений для задач типа диффузии-конвекции // В сб. Вычислительные технологии. 1993. Т. 2, № 5. С. 192–201.



Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994. 528 с.



Deng G.B., Piquet J., Queutey P., Visonneau M. A new fully coupled solution of the Navier-Stokes equations // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 1994. Vol. 19, №. 7. P. 605–639.



Karamyshev V.B., Kovenya V.M., Sleptsov A.G. Adaptive Projection-Grid Methods and Their Applications // Book of Briefs of 15th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. 1996. P. 296-297.



Karamyshev V., Kovenya V., Sleptsov A. Adaptive Methods for Navier-Stokes Equations // Computational Fluid Dynamics. Proc. of the Third ECCOMAS Conference on Computational Fluid Dynamics. 1996. V. 1 (Paperback) P. 301-307.



Семин Л.Г., Слепцов А.Г., Шапеев В.П. Метод коллокаций-наименьших квадратов для уравнений Стокса // Вычислительные технологии. 1996. Том 1, № 2. С. 90–98.



Karamyshev V.B., Kovenya V.M., Sleptsov A.G., Cherny S.G. Variational method of accelerating linear iterations and its applications // Computers & Fluids. 1996. Vol. 25, №. 5. P. 467–484.



Barragy E., Carey G.F. Stream function-vorticity driven cavity solution using p finite elements // Computers & Fluids. 1997. Vol. 26, No. 5, P. 453–468.



Сёмин Л.Г., Шапеев В.П. Коллокационно - сеточный метод решения краевых задач для уравнений Навье-Стокса // Сибирская школа - семинар «Математические проблемы механики сплошных сред», тезисы докладов. Новосибирск, 1997. С. 125–126.



Сёмин Л.Г., Шапеев В.П. Метод коллокаций и наименьших квадратов для уравнений Навье-Стокса // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3, № 3. С. 72–84.



Bochev P., Cai Z., Manteuffel T.A., McCormick S.F. Analysis of velocity-flux first-order system least-squares principles for the Navier-Stokes equations. Part I // SIAM J. Numer. Anal., 1998, vol. 35, №. 3, P. 990–1009.



Botella O., Peyret R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow // Computers & Fluids. 1998. Vol. 27, No. 4. P. 421–433.



Jiang B.-N. On the Least Squares Method // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 152 (1998) 239-257.



Semin L.G., Shapeev V.P. Collocation-grid method for solving boundary problems for Navier Stokes equations // International Conference on the Methods of Aerophysical Research, 29 June – 3 July, 1998, Novosibirsk, Russia. Proceedings. Part II. Novosibirsk, 1998. P. 186–191.



Гаранжа В.А., Коньшин В.Н. Численные алгоритмы для течений вязкой жидкости, основанные на консервативных компактных схемах высокого порядка аппроксимации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т. 39, № 8. С. 1378–1392.



Shankar P.N., Deshpande M.D. Fluid Mechanics in the Driven Cavity // Annu. Rev. Fluid Mech. 2000. No. 32. P. 93–136.



Беляев В.В., Шапеев В.П. Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 4. С. 12–21.



Шапеев А.В. Разностная схема четвертого порядка для уравнений Навье-Стокса на пятиточечном шаблоне // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 2000. Вып. 116. С. 119–122.



Chetverushkin B.N. Introductory word and plenary talk // V International congress on mathematical modelling, 29 Sep – 6 Oct, 2002, Dubna, Moscow Region, Russia.



Shapeev V.P., Semin L.G., Belyaev V.V. The Collocation and Least Squares Method for Numerical Solution of Navier-Stokes Equations // Proc. of the Steklov Inst. of Math. Suppl. 2, 2003. P. S115–S137.



Sahin M., Owens R.G. A novel fully implicit finite volume method applied to the lid-driven cavity problem Part I: High Reynolds number flow calculations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2003, No. 42. P. 57–77.



Shapeev V.P., Semin L.G., Belyaev V.V. The Collocation and Least Squares Method for Numerical Solution of Navier-Stokes Equations // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl.2, 2003. P.S115-S137.



Tee W., Sobey I.J. Spectral Method for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations in gauge formulation // OU Computing Laboratory Report NA04/09. 2004.



Wu Y., Liao S. Solving high Reynolds-number viscous flows by the general BEM and domain decomposition method // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2005, No. 47. P. 185–199.



Erturk E., Corke T.C., Gokcol C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2005, No. 48. P. 747–774.










Erturk E., Gokcol C. Fourth Order Compact Formulation of Navier-Stokes Equations and Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2006. Vol 50. P. 421–436.



Heinrichs W. Least-Squares Spectral Collocation with the Overlapping Schwarz Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations // Numer. Alg. 2006. № 43. P. 61-73.



Bruneau C.H., Saad M. The 2D lid-driven cavity problem revisited Computers&Fluids. 2006. No. 35, P. 326–348.

-  **Ольшанский М.А.** Равномерные по параметру многосеточные и итерационные методы // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М., 2006.
-  **Cheng M., Hung K.C.** Vortex structure of steady flow in a rectangular cavity // Computers & Fluids. 2006, No. 35. P. 1046–1062.
-  **Semin L.G.** Collocation and least squares method for 2D heat conductivity equation // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 1. С. 18–25.
-  **Василевский Ю.В., Ольшанский М.А.** Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. 100 с.
-  **Garcia S.** The Lid-Driven Square Cavity Flow: From Stationary to Time Periodic and Chaotic. // Communications in computational physics. 2007. Vol. 2, № 5, P. 900–932.
-  **Shapeev A.V., Lin P.** An asymptotic fitting finite element method with exponential mesh refinement for accurate computation of corner eddies in viscous flows // SIAM J. Sci. Comput. 2009. 31(3). P. 1874–1900.
-  **Isaev V.I., Shapeev V.P.** High-Accuracy Versions of the Collocations and Least Squares Method for the Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. Vol. 50, No. 10. P. 1670–1681.