# Модификации «универсальных решений» интервальной системы линейных уравнений

**Зоркальцев Валерий Иванович,**

проф., д.т.н.,

Заведующий лабораторией «Методов математического моделирования и оптимизации в энергетике»

Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,

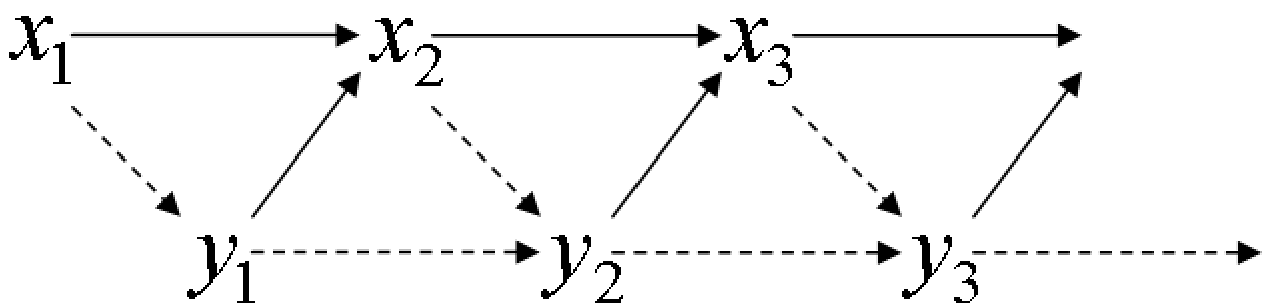
г. Иркутск

# Составляющие Интервального анализа

1. Аппарат для описания погрешностей данных (исходных, при вычислениях).
2. Инструмент для описания моделей принятия решений в условиях неопределенности (С.П. Шарый, Д.В. Давыдов).
3. Инструмент для повышения эффективности математических моделей и задач вычислительной математики.

# Общая постановка рассматриваемых задач

Принимаемые решения (эндогенные показатели) $x_t \in X_t$ на временном этапе $t = 1, 2, \ldots .$




Реализация экзогенных (априори неопределенных) условий $y_t \in Y_t$ на временном этапе $t = 1, 2, \ldots .$

$X_t -$ множество вариантов для выбора решения

$Y_t -$ область значений неопределенных показателей

# Процесс сужения исходной области выбора решения

<u>Одноэтапный процесс</u>

$$X_1^1 = \{x_1 \in X_1 : \forall y_1 \in Y_1 \ (x_1, y_1) \in D_1\}$$

$D_1$ – область допустимых сочетаний $x_1$ и $y_1$

<u>Двухэтапный процесс</u>

$$\tilde{X}_1^2 = \{x_1 \in X_1^1 : \forall y_1 \in Y_1 \ \exists x_2 \in X_2 \ (x_1, y_1, x_2) \in C_1\}$$

$C_1$ – область допустимых сочетаний $x_1, y_1, x_2$

$$X_1^2 = \{x_1 \in \tilde{X}_1^2 : \forall y_1 \in Y_1 \ \exists x_2 \in X_2, \ \forall y_2 \in Y_2 \ (x_1, y_1, x_2, y_2) \in D_2\}$$

$D_2$ – область допустимых сочетаний $x_1, y_1, x_2, y_2$

# Некоторые критерии принятия решения в условиях неопределенности

$F(x_1, y_1)$ – минимизируемая функция

1. <u>Математическое ожидание (в т.ч. критерий Лапласса)</u>

$$\sum_{y_1 \in Y_1} P_1(y_1) F(x_1, y_1) \to \min_{x_1 \in X_1^1}$$

2. <u>Критерий Вальда</u>

$$\max_{y_1 \in Y_1} F(x_1, y_1) \to \min_{x_1 \in X_1^1}$$

3. <u>Критерий Гурвица</u>

$$\alpha \max_{y_1 \in Y_1} F(x_1, y_1) + (1-\alpha) \min_{y_1 \in Y_1} F(x_1, y_1) \to \min_{x_1 \in X_1^1}$$

4. <u>Байесовский критерий</u>

$$\sum_{y_1 \in Y_1} P_1(y_1 / x_1) F(x_1, y_1) \to \min_{x_1 \in X_1^1}$$

# Две области приложения интервального анализа в моделях принятия решений в условиях неопределенности

1. Инструментарий для описания области выбора решений в многоэтапных процессах принятия решений (Шарый С.П. Докторская диссертация «Интервальные алгебраические задачи и их численные решения», 2002 г.)

2. Способ описания критериев оптимизации решений в условиях неопределенности (Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В. «Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления». – М.: Наука, 2006 г.; докторская диссертация Давыдова Д.В., 2009 г.)

# «Универсальные» решения Ащепкова-Давыдова

$$\sum_{i=1}^{m} \max_{y \in Y} \left| f_i(x, y) - \overline{f}_i \right| \to \min_{x \in X}$$

$\overline{f}_i$ – желаемый уровень показателя, $i = 1, 2, \ldots, m$

$f_i(x, y)$ – фактическое значение

Такая постановка тесно связана:

1) с проблематикой многокритериальности;

2) с регуляризацией некорректных задач;

3) с критерием Вальда

$$\max_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \left( f_i(x, y) - \overline{f}_i \right) \to \min_{x \in X}$$

# Универсальные решения интервальной системы линейных уравнений

Исходная система (недоопределенная задача)

$$Ax = b, \tag{1}$$

где $A-$ $m \times n$ матрица, $b-$ вектор из $R^m$,

$$\underline{A} \le A \le \overline{A}, \ \underline{b} \le b \le \overline{b}. \tag{2}$$

<u>Доопределение</u>: решением системы (1) предлагается считать такой вектор $x$, при котором достигается решение задачи

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \to \min, \tag{3}$$

$$|Ax - b| \le \varepsilon \tag{4}$$

при всех $A$, $b$, удовлетворяющих (2).

# Предлагаемые модификации

I. <u>В описании интервалов возможных отклонений</u>

Вместо интервала $[-\varepsilon, \varepsilon]$ предлагается ввести интервал $[-g, d]$ при $g \geq 0$, $d \geq 0$.

Вектор $x$ назовем $d$, $g$ решением ИСЛАУ (1), если

$$-g \leq Ax - b \leq d \tag{5}$$

при любых $A$ и $b$, удовлетворяющих (2).

Такое представление сужает интервал возможных отклонений.

# Предлагаемые модификации

II. <u>В способах определения минимальных интервалов</u>

Класс штрафных функций $F$, состоящий из непрерывных функций $f$ от двух векторов из $R_+^m$ таких, что при

$$0 \le \tilde{g} \le g, \;\; 0 \le \tilde{d} \le d, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{g}_j + \sum_{j=1}^{m} \tilde{d}_j < \sum_{j=1}^{m} g_j + \sum_{j=1}^{m} d_j \tag{7}$$

выполняется неравенство

$$f(\tilde{g}, \tilde{d}) < f(g, d). \tag{8}$$

<u>Примеры</u>: при заданных $p \ge 1, \; h, \; k \in R_{++}^m$

$$f(g, d) = \sum_{j=1}^{m} k_j (d_j)^p + \sum_{j=1}^{m} h_j (g_j)^p,$$

$$\tilde{f}(g, d) = \sum_{j=1}^{m} k_j (d_j + h_j)^p.$$

# Модифицированное универсальное решение, порождаемое функцией $f$ из $F$

Так назовем тройку векторов $x(f)$, $g(f)$, $d(f)$, являющихся решением задачи

$$f(g,\ d) \to \min \tag{9}$$

при ограничениях

$$g \ge 0,\ d \ge 0, \tag{10}$$

$$-g \le Ax - b \le d, \tag{11}$$

для всех $A$ и $b$, удовлетворяющих (2).

**Теорема 1**. *Для любого* $f \in F$ *существует* $x(f)$, $g(f)$, $d(f)$. *Если* $f$ *строго выпуклая функция по обоим аргументам, то* $g(f)$, $d(f)-$ *единственные.*

# Парето-оптимальные решения

Многокритериальная задача:

$$d_j \to \min, \quad g_j \to \min, \quad j = 1, \ . \ . \ . \ , \ m, \qquad (12)$$

при ограничениях (10), (11)

**Теорема 2**. *Множество Парето-оптимальных решений многокритериальной проблемы* (12) *совпадает с множеством модифицированных универсальных решений, порождаемых функциями f из F*.

# Замыкание множества модифицированных универсальных решений

**Теорема 3**. *Замыкание множества модифицированных универсальных решений* $x(f)$, $g(f)$, $d(f)$ *при*

$$f(g, d) = \sum_{j=1}^{m} k_j (d_j)^2 + \sum_{j=1}^{m} h_j (g_j)^2$$

*для разных* $k_j > 0$, $h_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$, *совпадает с множеством Парето-оптимальных решений*.

Вывод: Старый друг (метод наименьших квадратов) не хуже новых двух.

Любое модифицированное универсальное решение можно получить на базе метода наименьших квадратов за счет подбора весовых коэффициентов $k_j$, $h_j$.

# Выводы

Приведенный и другие факты являются переложением на проблематику универсальных решений ИСЛАУ результатов исследований свойств наименее удаленных от начала координат точек линейных многообразий и полиэдров (в т.ч. ортоэдрических, евклидовых, гёльбертовых, чебышевских проекций).

Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. – Новосибирск: Наука, 1995 г.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!