

# Системы неравенств и задачи оптимизации с двусторонними ограничениями на переменные

**Зоркальцев Валерий Иванович,**

проф., д.т.н.,

Заведующий лабораторией «Методов математического  
моделирования и оптимизации в энергетике»

Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,

г. Иркутск

# Исходные положения

1. При сужении класса рассматриваемых задач может расширяться набор их полезных свойств.
2. Разработчик любой математической модели способен оценить априори диапазон возможных значений искомых показателей.
3. Введение ограничений на диапазоны значений искомых показателей может дать новые, полезные свойства рассматриваемой задаче.

# Общая постановка рассматриваемых задач

Найти  $\mathbf{x} \in R^n$  такой, что:

$$\mathbf{x} \in X, \tag{1}$$

$$g \leq \mathbf{x} \leq d. \tag{2}$$

Здесь:  $X$  – исходное (как-то определяемое) множество решений задачи;  $g, d$  – заданные (в том числе экспертно вводимые) векторы  $R^n$ , характеризующие диапазоны возможных значений переменных.

Вводимое условие (2) означает в частности, что множество допустимых (даже по какой-то части исходных условий) переменных является ограниченным (возможно пустым).

# **I. Введение двусторонних ограничений на переменные может быть полезно для выяснения вопроса существования решения у задачи**

1. На базе теоремы Вейерштрасса, если исходная задача представляется в виде проблемы оптимизации непрерывной функции на замкнутом множестве.
2. На базе теорем о неподвижной точке (Бауэра, Какутани), если процедура поиска решения задачи представляется в виде непрерывного отображения векторов некоторого замкнутого множества, удовлетворяющих (2), в векторы этого же множества.

## **II. Введение двусторонних ограничений на переменные может быть полезно для идентификации ситуации отсутствия решения у задачи**

Доказать отсутствия решения у задачи (из-за несовместности ограничений и других причин) часто не просто. Только в редких случаях это сводится к выводу из условий задачи очевидных противоречий.

Для систем линейных уравнений и неравенств (и на базе этого для других классов задач) конструктивное доказательство отсутствия решения можно осуществлять на базе теорем об альтернативных системах линейных неравенств.

# Теоремы об альтернативных системах линейных неравенств

Системы линейных неравенств являются непосредственным и очень важным (для моделирования и вычислительной математики) обобщением систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Любую СЛАУ можно представить в виде системы линейных неравенств. Обратное не верно.

То, что теория систем линейных неравенств не изучается в базовых курсах университетов – большое, затянувшееся недоразумение.

Общий вид теорем об альтернативах: каждой системе  $S$  можно поставить в соответствие систему  $S^*$ , такую что заранее известно – одна и только одна из этих систем совместна.

# Теорема Фредгольма об альтернативных СЛАУ

*Либо разрешима система*

$$Ax = b, \tag{1}$$

*либо разрешима система*

$$A^T u = 0, \quad b^T u = 1. \tag{2}$$

Заданы:  $A$  – матрица  $m \times n$ , вектор  $b \in R^m$ .

**Алгоритм поиска решения систем (1) или (2):**

$$\sum_{i=1}^m (r_i)^2 \rightarrow \min, \quad r = b - Ax.$$

Пусть  $\bar{r}$ ,  $\bar{x}$  – решение указанной задачи. Тогда:

если  $\bar{r} = 0$ , то  $\bar{x}$  – решение системы (1),

если  $\bar{r} \neq 0$ , то  $\bar{u} = \frac{1}{\|\bar{r}\|^2} \bar{r}$  – решение системы (2).

# Модификация теоремы Фредгольма при ограничениях на абсолютные значения переменных (теорема Дакса)

Пусть задан вектор  $d \in R^n$ ,  $d > 0$ . Тогда либо при некотором  $x \in R^n$

$$Ax = b, \quad |x| \leq d, \quad (1)$$

либо при некотором  $u \in R^m$

$$b^T u - d^T |A^T u| > 0, \quad (2)$$

где  $|x|$ ,  $|A^T u|$  – векторы, составленные из абсолютных значений компонент векторов  $x$  и  $A^T u$ .

Здесь условие (2) является более слабым, чем в теореме Фредгольма. Если  $A^T u = 0$ ,  $b^T u > 0$ , то (2) выполняется. Обратное не верно.

Для выполнения условия (2) нет необходимости в достижении равенства  $A^T u = 0$ .



# Некоторые приложения теорем об альтернативных системах линейных неравенств

1. Для выявления ситуации отсутствия решения у задачи: если нашли какое-либо решение для системы  $S^*$ , то тем самым доказали противоречивость условий исходной системы  $S$ .
2. Для выявления избыточных ограничений (условий-следствий из других) избавление от которых не влияет на задачу.
3. Для выявления решений с минимальным набором активных ограничений.
4. Основа теории двойственности линейного (и на базе этого нелинейного) программирования

# Система линейных неравенств с двусторонними ограничениями на переменные (общий случай)

$$Ax = b, \quad g \leq x \leq d. \quad (S)$$

**Теорема.** Либо разрешима система  $S$ , либо при некотором  $u \in R^m$

$$b^T u - d^T (A^T u)_+ - g^T (A^T u)_- > 0, \quad (S^*)$$

где  $(\ )_+$   $(A^T u)_-$  – положительные и отрицательные срезки:

для  $y \in R^m$

$$(y_+)_j = \max\{0, y_j\}, \quad (y_-)_j = \min\{0, y_j\}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Неравенство  $S^*$  эквивалентно следующей системы линейных неравенств относительно  $u \in R^m$ ,  $v \in R^n$ ,  $w \in R^n$

$$\begin{aligned} b^T u - d^T v - g^T w &> 0, \\ A^T u - v - w &= 0, \quad v \geq 0, \quad w \leq 0. \end{aligned}$$

# Представление альтернативной системы в виде задачи линейного программирования

$$b^T u - d^T v - g^T w \rightarrow \max \quad (1)$$

$$A^T u - v - w = 0, v \geq 0, w \leq 0. \quad (2)$$

Задача всегда имеет допустимые условиям (2) решение. При любом  $u \in R^m$  векторы

$$v = (A^T u)_+ + e, w = (A^T u)_- - e \text{ (здесь } e \text{ – вектор из единиц)}$$

удовлетворяют (2) в строгой форме (могут служить стартовой точкой для алгоритмов внутренних точек)

Если задача (1), (2) не имеет решения (целевая функция не ограничена сверху при условиях (2)), то имеет решение неравенство  $S^*$ .

Если задача (1), (2) имеет оптимальное решения, то вектор множителей Лагранжа ограничений-равенств составляет решение исходной системы  $S$ .

# III. Модель расчета допустимых режимов электроэнергетических систем

**Исходная задача:** найти вектор  $y$

$$W(y) = 0, \quad \underline{y} \leq y \leq \bar{y}, \quad (1)$$

где  $W$  – квадратичная вектор-функция.

**Линеаризованная, упрощенная** (в результате применения к (1) метода приведенного градиента) **задача:** найти вектор  $x$

$$\underline{b} \leq Ax \leq \bar{b}, \quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x}. \quad (2)$$

# Сопоставление вариантов алгоритмов внутренних точек на задачах определения допустимых режимов электроэнергетических систем

Алгоритм	Число итераций на задачах				
	несовместных		совместных		
	6*7	40*80	2*7	19*19	201*201
А	1	10	7	23	116
В	1	15	6	24	107
С	1	1	16	13	28
Д	1	1	5	5	8
Е	1	4	26	24	88

А, В – прямые алгоритмы

С, Д – двойственные алгоритмы

Е – самосопряженный алгоритм

# Сопоставление вариантов алгоритмов внутренних точек на задачах определения допустимых режимов электроэнергетических систем

<b>Задачи/Алгоритм</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
<b>Совместные (30x80)–(41x80)</b>	9.5(3–13)	13.4(7–17)	10.2(6–13)	5.9(3–8)
<b>Несовместные (30x80)–(41x80)</b>	1.6(1–5)	1.6(1–7)	1(все 1)	1(все 1)
<b>Тестовый пример (19x19)</b>	13	8	11	6
<b>Тестовый пример (201x201)</b>	19	7	16	9

# Некоторые выводы из экспериментов

1. Высокая эффективность алгоритмов внутренних точек, усиливающаяся двусторонними ограничениями на переменные.
2. Высокая эффективность введенного критерия несовместности.
3. Большая польза от сочетания экспериментальных и теоретических исследований: новый вариант алгоритмов внутренних точек (D) гораздо эффективнее, чем *affine scaling method* (A) и *dual affine scaling method* (C), в т.ч. из-за того, что множители Лагранжа сходятся быстрее, чем исходные переменные

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u^k - \bar{u}\|}{\|x^k - \bar{x}\|} = 0.$$

# **Необходимо вводить в учебные курсы алгоритмы внутренних точек**

- 1.** Теперь общепризнано, что они высокоэффективны даже при решении задач линейного программирования.
- 2.** Проще и изящнее: алгоритмы симплекс-метода на их фоне подобны квадратному колесу на фоне круглого.
- 3.** Имеются наилучшие полиномиальные оценки объемов вычислений от размерности задачи.
- 4.** Легко переносятся на многие классы задач нелинейной оптимизации, естественно сочетаются с другими методами.
- 5.** Были созданы и активно используются с 70-х годов в СССР (ИМ СО РАН, СЭИ СО РАН, ВЦ РАН).



# IV. Задача линейного программирования с двусторонними ограничениями

$$c^T x \rightarrow \min, \quad Ax = b, \quad g \leq x \leq d.$$

**Двойственная задача**

$$b^T u - d^T v - g^T w \rightarrow \max,$$

$$A^T u - v - w = c, \quad v \geq 0, \quad w \leq 0.$$

Имеется только один случай отсутствия решения – противоречивость ограничений исходной задачи, неограниченность целевой функции двойственной задачи.

Легко сформировать стартовую точку для двойственного алгоритма внутренних точек: при любом  $u^0 \in R^m$

$$v^0 = (A^T u - c)_+ + e, \quad w^0 = (A^T u - c)_+ - e.$$

# V. Задача выпуклого программирования

Исходная задача

$$\begin{aligned} F(x) + c^T x &\rightarrow \min, & (\mathbf{P}) \\ Ax = b, \quad g &\leq x \leq d. \end{aligned}$$

Двойственная задача

$$\begin{aligned} b^T u - \Phi(y) - d^T v - g^T w &\rightarrow \min, & (\mathbf{D}) \\ A^T u - y - v - w &= c, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$F(x) = \sum_{j=1}^n F_j(x_j), \quad \Phi(y) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(y_j),$$

$F_j$ ,  $\Phi_j$  – сопряженные по Лежандру-Фенхелю строго выпуклые функции вещественного аргумента.

# Задача выпуклого программирования

Задачи (P) и (D) представляют случай симметричной двойственности в оптимизации – когда двойственная к двойственной задаче оптимизации совпадает с исходной задачей.

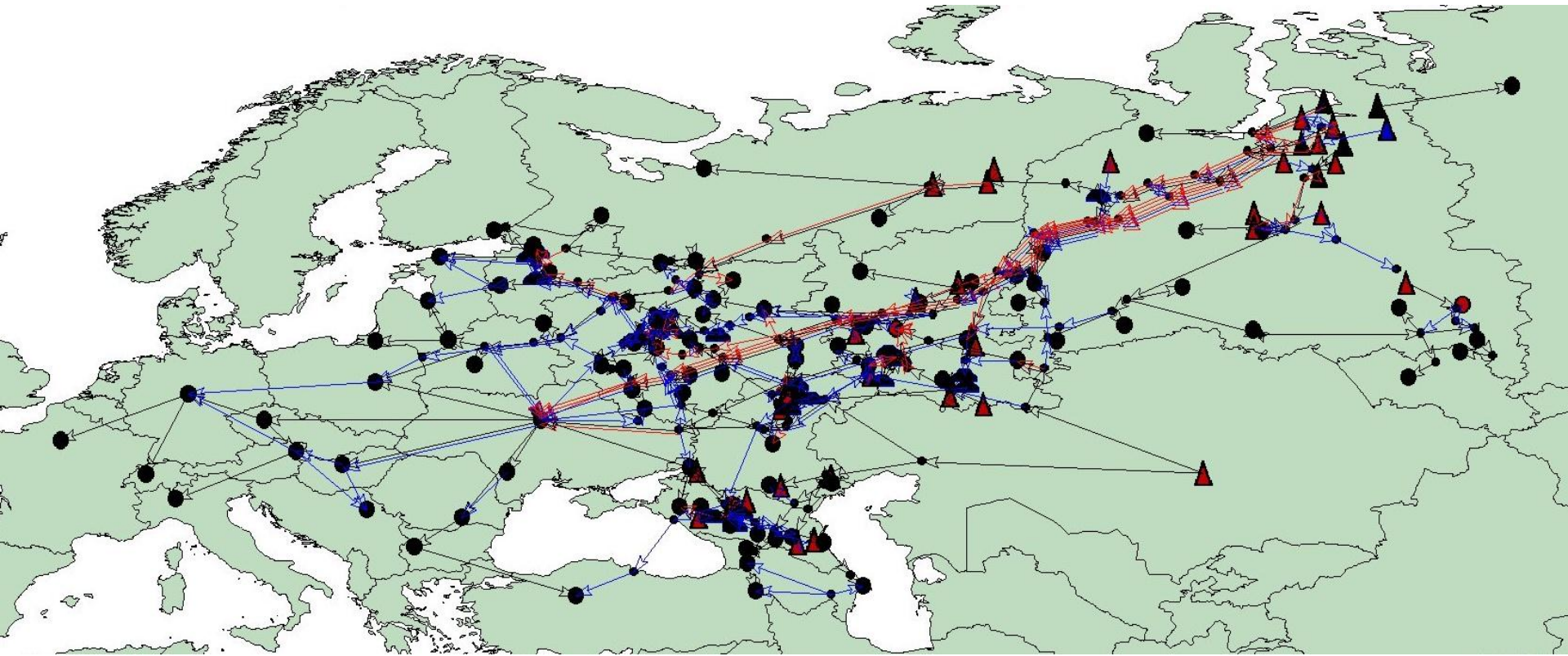
## Приложения.

1. Регуляризация в линейной оптимизации (ИММ УрО РАН, Еремин И.И.).
2. Решение большеразмерных систем линейных неравенств (ВЦ РАН, Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.).
3. Поиск равновесия Нэша.
4. Поиск термодинамического равновесия.
5. Модели потокораспределения (нелинейные транспортные задачи, электрические и гидравлические цепи).

# Задача определения "узких" мест в Единой системе газоснабжения с позиций обеспечения её живучести

- Были выполнены расчеты для двух реальных сетей:
  - Укрупненная сеть ЕСГ (21 узел, 28 ветвей)
  - Подробная сеть ЕСГ (337 узла, 589 ветвей)
- Цель расчетов:
  - 1) определить возможности системы по удовлетворению потребности узлов в ресурсе, когда возможен «нагруженный» режим передачи по ветвям сети
  - 2) определить «узкие» места ЕСГ – ветви, где передача осуществляется в «нагруженном» режиме
  - 3) проранжировать «узкие» места

# Расчет подробной сети ЕСГ



Количество узлов: 337

Количество ветвей: 589

Количество итераций метода внутренних точек: 51

Время счета: 2 сек (Процессор - Intel Core i-5 650, 3200МГц) 21

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**