К длинноволновой неустойчивости стационарных плоскопараллельных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей в поле силы тяжести

Ю.Г. Губарев

Учреждение РАН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

ГОУ ВПО Новосибирский государственный университет

Новосибирск 630090, Российская Федерация

Контактный телефон: (383) 333–34–07 (сл.)

Адрес электронной почты: gubarev@hydro.nsc.ru

Постановка точной задачи
В слое жидкости:

$$u_t + uu_x + vu_y = -\,gh_x,\ u_x + v_y = 0$$

На дне $(y = 0)$:

$$v = 0$$

На свободной поверхности слоя $(y = h)$:

$$h_t + uh_x - v = 0$$

Начальные данные:

$$u\,(x,\ y,\ 0) = u_0\,(x,\ y)\,,\ h\,(x,\ 0) = h_0\,(x)$$

Смешанные эйлерово–лагранжевы переменные

$$(t',\ x',\ \lambda):\ t=t',\ x=x',\ y=\Phi\left(t',\ x',\ \lambda\right);\ \lambda\in[0,\ 1]$$

$$\Phi_{t'}+u\Phi_{x'}=v$$

Переформулированная точная задача

$$u_t+uu_x+gH_x=0,\ \rho_t+\left(u\rho\right)_x=0;\ H\equiv\int\limits_0^1\rho d\lambda$$

$$\rho\equiv\Phi_\lambda\left(t,\ x,\ \lambda\right);\ u\left(0,\ x,\ \lambda\right)=u_0\left(x,\ \lambda\right),\ \rho\left(0,\ x,\ \lambda\right)=\rho_0\left(x,\ \lambda\right)$$

Закон сохранения энергии

$$E\equiv\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1\rho u^2d\lambda dx+\frac{g}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}H^2dx=\mathrm{const}$$

Дополнительный интеграл движения

$$C\equiv\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 u_\lambda F\left(\kappa\right)d\lambda dx=\mathrm{const};\ \kappa\equiv\frac{\rho}{u_\lambda}:\ \kappa_t+u\kappa_x=0$$

$F\left(\kappa\right)$ — произвольная функция своего аргумента

Установившиеся течения

$$u=u^0(\lambda),\ \rho=\rho^0(\lambda),\ H=H^0\equiv\mathrm{const}$$

Постановка линеаризованной задачи

$$u'_t + u^0 u'_x + gH'_x = 0,\ \rho'_t + u^0 \rho'_x + \rho^0 u'_x = 0$$

$$H' = \int\limits_0^1 \rho' d\lambda;\ u'\left(0,\ x,\ \lambda\right) = u'_0\left(x,\ \lambda\right),\ \rho'\left(0,\ x,\ \lambda\right) = \rho'_0\left(x,\ \lambda\right)$$

Линейный аналог функционала энергии

$$E_1 \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^1 \left[\rho^0 u'^2 + 2u^0 u' \rho' + \frac{du^0}{d\lambda} \frac{d^2 F}{d\kappa^2}\left(\kappa^0\right) \kappa'^2\right] d\lambda dx +$$

$$+ \frac{g}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H'^2 dx = \mathrm{const}$$

$$\kappa^0 \equiv \rho^0 \left(\frac{du^0}{d\lambda}\right)^{-1}$$

$$\kappa' \equiv \left(\rho' \frac{du^0}{d\lambda} - \rho^0 u'_\lambda\right) \left(\frac{du^0}{d\lambda}\right)^{-2} :\ \kappa'_t + u^0 \kappa'_x = 0$$

$$\frac{dF}{d\kappa}\left(\kappa^0\right) = -\frac{u^{02}}{2} - gH^0$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[F\left(\kappa^0\right) + \kappa^0 \left(\frac{u^{02}}{2} + gH^0\right)\right] \delta u\Big|_{\lambda=1} dx\ =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[F\left(\kappa^0\right) + \kappa^0 \left(\frac{u^{02}}{2} + gH^0\right)\right] \delta u\Big|_{\lambda=0} dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[F\left(\kappa^0\right)+\kappa^0\left(\frac{u^{02}}{2}+gH^0\right)\right]\delta^2 u\Big|_{\lambda=1}dx\ =$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[F\left(\kappa^0\right)+\kappa^0\left(\frac{u^{02}}{2}+gH^0\right)\right]\delta^2 u\Big|_{\lambda=0}dx$$

$$F\left(\kappa^0\right)=-\,\kappa^0\int\limits_{\kappa^0(0)}^{\kappa^0}\frac{F_1\left(\kappa_1^0\right)}{\kappa_1^{02}}d\kappa_1^0$$

$$F_1\left(\kappa^0\right)\big|_{\kappa^0=\kappa^0(0)}=0,\ F_1\left(\kappa^0\right)\big|_{\kappa^0=\kappa^0(1)}=0$$

Отсутствие достаточных условий линейной устойчивости

$$E_1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1\left(A\mathbf{f},\ \mathbf{f}\right)d\lambda dx;\ \mathbf{f}\equiv\left(u',\ \rho',\ \kappa',\ H'\right)^{\mathrm{T}}$$

$$A=||a_{ik}||\ \left(i,\ k=\overline{1,\ 4}\right):\ a_{11}=\frac{\rho^0}{2},\ a_{12}=a_{21}=\frac{u^0}{2}$$

$$a_{24}=a_{42}=\frac{g}{4},\ a_{33}=\frac{1}{2}\frac{du^0}{d\lambda}\frac{d^2F}{d\kappa^2}\left(\kappa^0\right)$$

$$\Delta_2=-\,\frac{u^{02}}{4}<0$$

Пример

$$u=u^0(\lambda)\equiv 3\sqrt{I}\,\mathrm{th}\left[100\left(\lambda-0,5\right)\right],\ \rho=\rho^0(\lambda)\equiv 1,\ H=H^0\equiv 1$$

$$g \equiv 1,\ I \equiv \int\limits_0^1 \frac{9\mathrm{th}^2\left[100\left(\lambda - 0,5\right)\right] - 1}{\left(9\mathrm{th}^2\left[100\left(\lambda - 0,5\right)\right] + 1\right)^2} d\lambda \approx 0,0767 > 0$$

$$u'\left(t,\ x,\ \lambda\right) = u_1(\lambda)\exp\left(\alpha t + i\beta x\right)$$

$$\rho'\left(t,\ x,\ \lambda\right) = \rho_1(\lambda)\exp\left(\alpha t + i\beta x\right)$$

$$H'\left(t,\ x\right) = \exp\left(\alpha t + i\beta x\right)\int\limits_0^1 \rho_1(\lambda) d\lambda;\ \alpha \equiv \alpha_1 + i\alpha_2$$

$$\chi(k) \equiv 1 - \int\limits_0^1 \frac{d\lambda}{\left(u^0 - k\right)^2},\ k \equiv \frac{i\alpha}{\beta}$$

$$\frac{du^0}{d\lambda} = \frac{300\sqrt{I}}{\mathrm{ch}^2\left[100\left(\lambda - 0,5\right)\right]} > 0$$

$$\alpha_2 \equiv 0,\ \alpha_1 \equiv \beta k_1\ \Rightarrow\ k = ik_1$$

$$\mathrm{Im}\chi(k) = -2k_1 \int\limits_0^1 \frac{u^0 d\lambda}{\left(u^{02} + k_1^2\right)^2} \equiv 0$$

$$\chi(k) \equiv \mathrm{Re}\chi(k) = 1 - \int\limits_0^1 \frac{u^{02} - k_1^2}{\left(u^{02} + k_1^2\right)^2} d\lambda$$

$$k = ik_1 \equiv i\sqrt{I}$$

$$\mathrm{Re}\chi\left(i\sqrt{I}\right) = 1 - \int\limits_0^1 \frac{9I\mathrm{th}^2\left[100\left(\lambda - 0,5\right)\right] - I}{\left(9I\mathrm{th}^2\left[100\left(\lambda - 0,5\right)\right] + I\right)^2} d\lambda = 1 -$$

$$- \frac{1}{I}\int\limits_0^1 \frac{9\mathrm{th}^2\left[100\left(\lambda - 0,5\right)\right] - 1}{\left(9\mathrm{th}^2\left[100\left(\lambda - 0,5\right)\right] + 1\right)^2} d\lambda = \frac{1}{I}(I - I) \equiv 0$$

Список литературы

1. **Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд–во СО РАН, 2000.

2. **Benney D.J.** Some properties of long nonlinear waves. Stud. Appl. Math. Vol. 52. No. 1. 1973. P. 45–50.

3. **Тешуков В.М.** О гиперболичности уравнений длинных волн. Докл. АН СССР. Т. 284. № 3. 1985. С. 555–562.

4. **Захаров В.Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи. Функцион. анализ и его прил. Т. 14. Вып. 2. 1980. С. 15–24.

5. **Губарев Ю.Г.** К аналогии между уравнениями Бенни и уравнениями Власова–Пуассона. Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. РАН, Сиб. отд–ние, Ин–т гидродинамики. Вып. 110. Акустика неоднородных сред. 1995. С. 78–90.

6. **Якубович В.А., Старжинский В.М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.

7. **Годунов С.К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!