

Моделирование волн-убийц: обнаружение, предсказание и разрушение

Р. В. Шамин

Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН

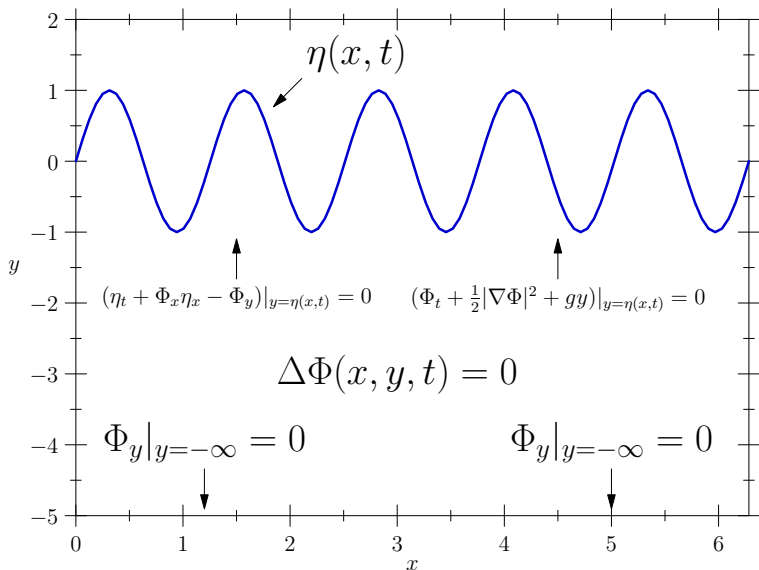
Новосибирский государственный университет

Новосибирск, 2011

Неустойчивость Релея-Тейлора

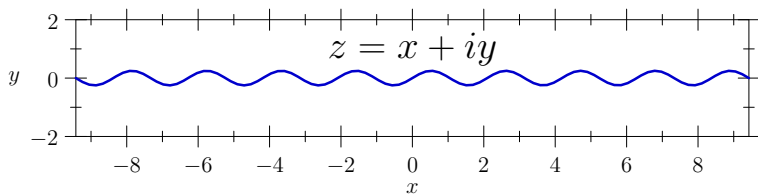
"Под термином "волны-убийцы" понимаются волны большой амплитуды, неожиданно появляющиеся на морской поверхности как бы из ниоткуда и так же быстро исчезающие. На английском языке для их обозначения используют термины "freak, rogue or giant waves". Долгое время волны-убийцы являлись предметом морского фольклора. В рассказах бывалых моряков о волнах-убийцах их форма представляется разной: иногда говорят о "стене воды" или о "дырке в море или о нескольких больших волнах ("трех сестрах")... За последние примерно 30-50 лет волны убийцы перешли из разряда фольклора в реальность, и их существование, после получения инструментальных данных, можно считать доказанным." (Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. — Нижний Новгород: Нижегородский гос. тех. университет, 2004.)

Основные уравнения



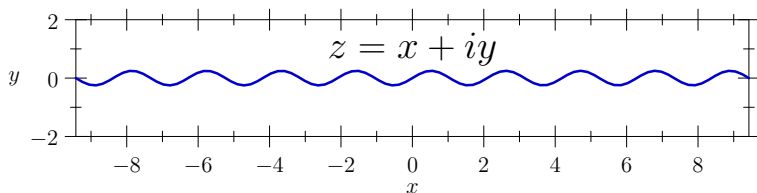
Основные уравнения

Исходная ситуация:

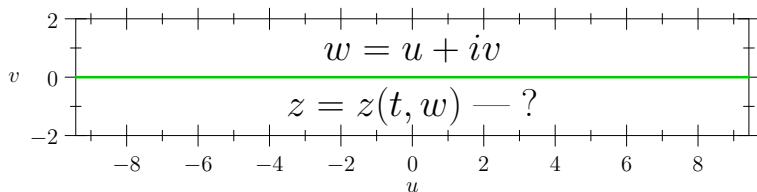


Основные уравнения

Исходная ситуация:



После конформного преобразования:



Основные уравнения

Динамические уравнения формулируются для переменных $R(u, t)$ и $V(u, t)$, аналитичных и ограниченных в нижней полуплоскости:

$$R = \frac{1}{z'_u}, \quad V = i \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad \Pi = \psi(u, t) + iH[\psi](u, t), \quad \psi(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$$

и имеют вид

$$\begin{aligned} R_t(u, t) &= i(UR_u - U_u R), \\ V_t(u, t) &= i(UV_u - B_u R) + g(R - 1), \\ U &= P(VR^* + RV^*), \\ B &= P(VV^*), \end{aligned} \tag{1}$$

где P — оператор проектирования на нижнюю полуплоскость $P = \frac{1}{2}(1 + iH)$, H — оператор Гильберта для периодического случая

$$H[f](u) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_0^{2\pi} \frac{f(u')}{\tan\left(\frac{u'-u}{2}\right)} du'$$

Для $s \geq 0$ обозначим неограниченную область $Q_s = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < s\}$. Рассмотрим пространство E_s функций аналитических в Q_s , представленные в виде: $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-ikw}$ с нормой $\|f\|_{E_s}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 e^{2sk}$.

Мы выбираем множество M_T^s следующим образом:

$$\begin{aligned} A(t, u) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) e^{-iku}, \\ \max_{t \in [0, T]} |a_k(t)| &\leq C e^{-s|k|}, \\ a_k &\in C^2[0, T]. \end{aligned} \tag{2}$$

На практике

В практических вычислениях условие (2) означает экспоненциальное убывание по модулю коэффициентов a_k , что является необходимым условием для эффективного проведения расчетов.

Аппроксимация дифференциальными включениями

Будем рассматривать следующую задачу: для заданных $\varepsilon \geq 0$ и $s > 0$ найти:

$$0 < T_\varepsilon < \mathbb{T}, \quad R, V \in M_{T_\varepsilon}^s, \quad \delta_R, \delta_V \in L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0),$$

$$\|\delta_R\|_{L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0)} \leq \varepsilon, \quad \|\delta_V\|_{L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0)} \leq \varepsilon,$$

удовлетворяющие уравнениям:

$$R_t(u, t) = i(UR_u - U_u R) + \delta_R(u, t)$$

$$V_t(u, t) = i(UV_u - B_u R) + g(R - 1) + \delta_V(u, t)$$

или записанные как включения:

$$R_t(u, t) \in B_\delta(i(UR_u - U_u R))$$

$$V_t(u, t) \in B_\delta(i(UV_u - B_u R) + g(R - 1))$$

Теорема

Пусть $LT(\varepsilon) = \sup\{T_\varepsilon\}$, тогда

$$LT(\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} LT(\varepsilon) = LT(0) > 0.$$

Начальные условия определялись как ансамбль бегущих в одну сторону волн со средним значением волнового числа $K_0 = 25$. Мы предполагали, что начальное возмущение поверхности задается суммой гармоник со случайными фазами

$$\eta_0(x) = \sum_{-\frac{1}{2}K_{max}}^{\frac{1}{2}K_{max}} \phi(k - k_0) \cos(kx - \xi_k), \quad (3)$$

где K_{max} — полное число спектральных мод, ξ_k — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $-\frac{1}{2}K_{max} < k < \frac{1}{2}K_{max}$. Начальные значения поля скоростей предполагались связанными с формулами линейной теории.

Функция $\phi(k)$ определялась по формуле

$$\phi(k) = \begin{cases} \delta_k, & |k| > K_w; \\ \kappa \exp(-\alpha k^2) + \delta_k, & |k| \leq K_w. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь δ_k — независимые случайные параметры, равномерно распределенные на интервале $-\frac{1}{2}K_{max} < k < \frac{1}{2}K_{max}$. Число $1 \leq K_w \leq 10$ определяло спектральную ширину, κ , α — «внутренние» параметры спектра, определенные так, чтобы «внешние» параметры — квадрат средней крутизны

$$\mu^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_x^2 dx \text{ и дисперсия } D = \frac{\left(\int_{-K_w}^{K_w} k^2 e^{-\alpha k^2} dk \right)}{\left(\int_{-K_w}^{K_w} e^{-\alpha k^2} dk \right)}$$
 принимали

заданные значения. Вклад в полную энергию случайного шума составлял не более трех процентов.

Вычислительные эксперименты

Было проделано 5000 «элементарных» экспериментов. В каждом эксперименте время менялось до 10^4 , что соответствовало приблизительно 500 периодам волн. Если происходило обрушение волн, счет прекращался досрочно. В расчетах полное число гармоник было $K_{max} = 2048$ или $K_{max} = 4096$ в зависимости от квадрата средней крутизны. Регистрация волн-убийц производилась с помощью амплитудного критерия $\frac{H_{max}}{H_s} \geq 2.1$, где H_{max} — амплитуда самой высокой волны, а H_s — существенная высота волн, т.е. средняя амплитуда одной трети самых высоких волн. Требовалось также, чтобы локальная крутизна волны $|\eta_x|$ превышала критическое значение, т.е. было выполнено условие $\max_{0 < x < 2\pi} |\eta_x| \geq 0.3$. Это требование вызвано физическими соображениями и является весьма существенным.

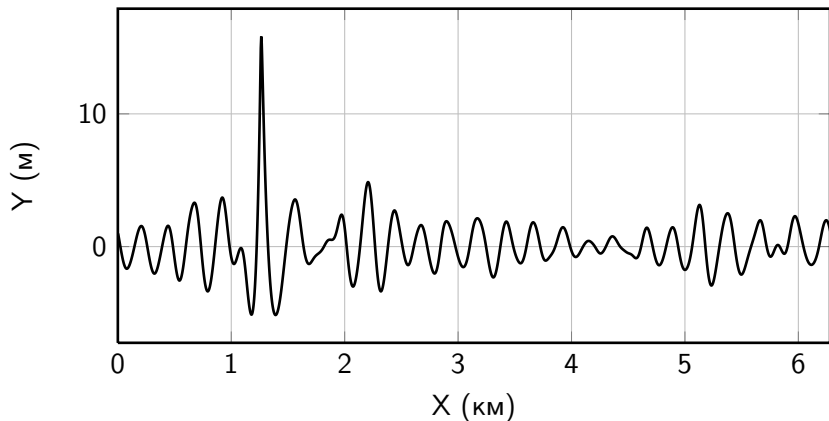


Рис.: Профиль волны-убийцы. Время $t = 3360$ с; крутизна — 0.558

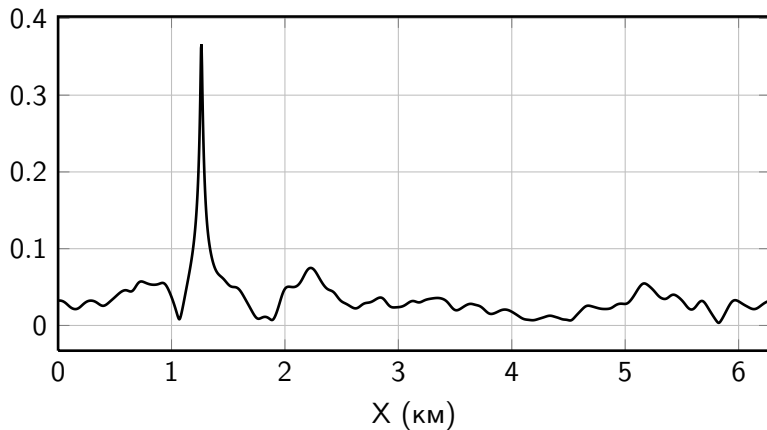


Рис.: Плотность импульса в момент образования волны-убийцы

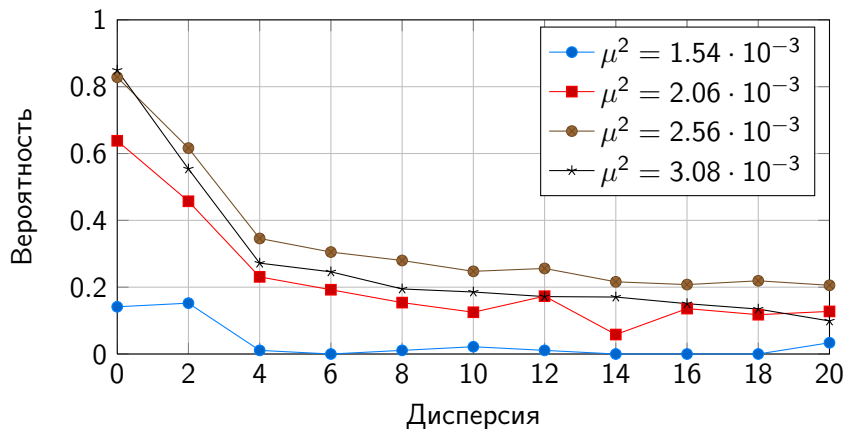


Рис.: Вероятности возникновения волн-убийц

Предложен метод краткосрочного прогноза возникновения волны убийцы. Метод основан на анализе изменения величин

$$H(t) = \frac{H_{max}(t)}{H_s(t)}, \quad \mu_{max}(t)$$

где $H_{max}(t)$ — максимальная амплитуда в момент времени t , а $H_s(t)$ — существенная высота волн, $\mu_{max}(t)$ — максимальная крутизна свободной поверхности в момент t . Прогноз возникновения волны-убийцы регистрируется если выполнены условия:

$$\frac{H(t + \Delta) - H(t)}{\Delta} \geq \alpha,$$
$$\frac{\mu_{max}(t + \Delta) - \mu_{max}(t)}{\Delta} \geq \beta,$$

где $\Delta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — параметры метода. Наилучший выбор параметров метода прогноза возникновения волн-убийц показал точность прогноза в 68.94%.

Оперативный прогноз

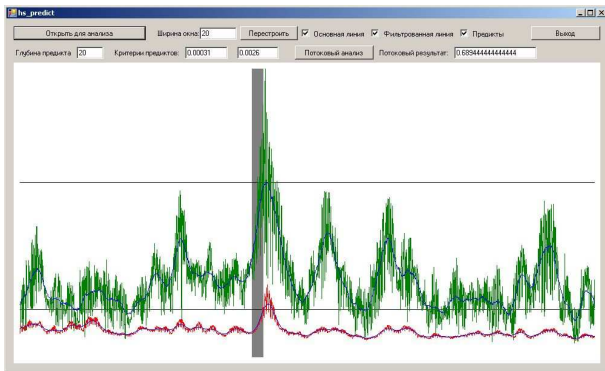


Рис.: Рабочий экран программы для предсказания возникновения волны-убийцы

Принципиальный момент!

Поскольку волна-убийца представляет собой экстремальный эффект, то возникает вопрос: будет ли он устойчивым по отношению к начальным данным и внешним возмущениям?

Принципиальный момент!

Поскольку волна-убийца представляет собой экстремальный эффект, то возникает вопрос: будет ли он устойчивым по отношению к начальным данным и внешним возмущениям?

Теоретический ответ:

С помощью аппроксимации дифференциальными включениями доказано, что решения, представляющие волны-убийцы, устойчивы по начальным данным и внешним воздействиям на любом конечном временном интервале $[0, T]$.

Принципиальный момент!

Поскольку волна-убийца представляет собой экстремальный эффект, то возникает вопрос: будет ли он устойчивым по отношению к начальным данным и внешним возмущениям?

Теоретический ответ:

С помощью аппроксимации дифференциальными включениями доказано, что решения, представляющие волны-убийцы, устойчивы по начальным данным и внешним воздействиям на любом конечном временном интервале $[0, T]$.

Вычислительный ответ:

С помощью вычислительных экспериментов убедимся в вычислительной устойчивости.

Устойчивость волн-убийц

Рассмотрим эволюционные уравнения, описывающие поверхностные волны на воде при наличии возмущающей силы

$$\begin{aligned}F_x(t, x) &= A\xi_x(t) \sin(K(t)x), \\F_y(t, x) &= A\xi_y(t) \sin(K(t)x),\end{aligned}$$

где ξ_x, ξ_y — независимые случайные процессы равномерно распределенные на $[-0.5, 0.5]$, K — случайный процесс, принимающий значения $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ с одинаковой вероятностью, $A = 10^{-6}$.

Хотя возмущенное решение заметно отличается от исходного решения, но профили максимальной волны весьма похожи, и время образование волны-убийцы совпадает. Данная вычислительная устойчивость была подтверждена в ходе масштабных вычислительных экспериментов.

Устойчивость волн-убийц

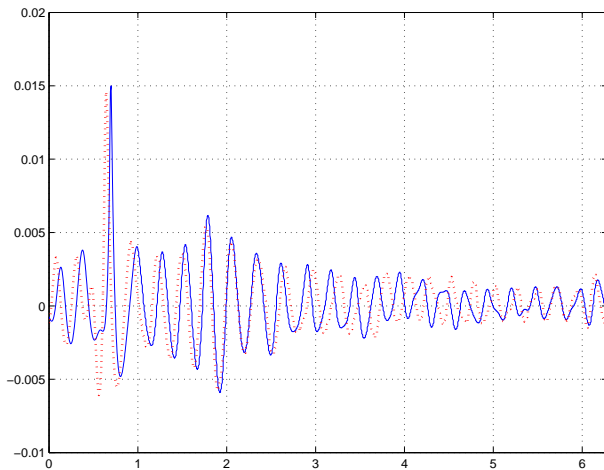


Рис.: Сплошная линия волна без возмущений, точечная линия — волна с возмущением, $t = 41.5$

Устойчивость волн-убийц

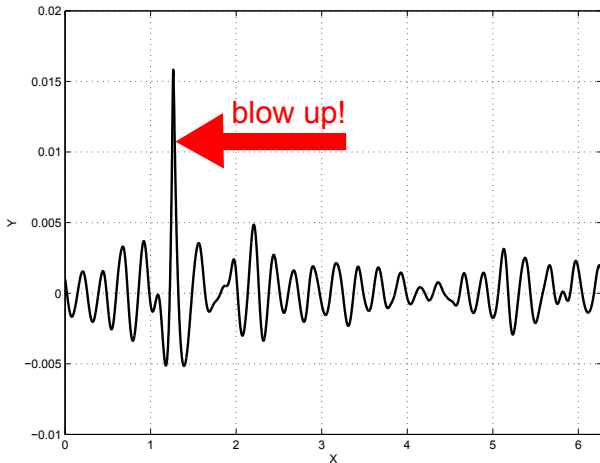


Рис.: Попытка разрушения волны-убийцы