

Гибридные численные модели волновых процессов в плазме

Г.И. Дудникова

Институт вычислительных технологий СО РАН

e-mail: dudn@ict.nsc.ru

Л.В. Вшивкова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

e-mail: lyudmila.vshivkova@gmail.com

В работе представлена гибридная модель волновых процессов в плазме для исследования динамики заряженных частиц в магнитосфере Земли. Общим свойством данных процессов является их бесстолкновительный характер по отношению к кулоновским столкновениям. Гибридная МГД-кинетическая модель распространения альфвеновских волн сдвига на открытых линиях магнитного поля основана на гидродинамическом приближении для ионов и кинетическом приближении для электронов. Для решения кинетического уравнения Власова используется метод частиц в ячейках.

Исследование процессов генерации и распространения волн в бесстолкновительной плазме имеет важное прикладное и фундаментальное значение, поскольку данные процессы связаны с переносом импульса и энергии, развитием неустойчивостей и ускорением заряженных частиц. Особое значение имеют волновые процессы в магнитосфере Земли, где распространение волн сопровождается магнитными суббурями, полярными сияниями и нарушением радиосвязи. Когда частицы солнечного ветра достигают магнитного поля Земли, они замедляются и меняют свое направление. Вследствие этого генерируется головная ударная волна структура которой определяется характеристиками плазмы и магнитного поля окружающего пространства. Результаты измерения в авроральной зоне, выполненные на спутниках, показали, что наблюдаемые низкочастотные колебания являются альфвеновскими волнами сдвига. Альфвеновская волна сдвига представляет собой электромагнитную волну в замагниченной плазме, которая имеет частоту ниже циклотронной частоты ионов [1], [2]. Распространение альфвеновских волн и взаимодействие волна-электроны играют важную роль в понимании динамики резонансов в магнитосфере Земли [3]. При этом наиболее важные процессы имеют место, когда поперечный размер альфвеновской волны существенно меньше, чем плазменный скин-слой или ларморовский радиус ионов. В каждом из этих случаев (называемых, соответственно, инерциальным и кинетическим) становятся важными эффекты, для описания которых необходимо привлекать кинетические модели, поскольку гидродинамические модели становятся неприменимыми. Существенная разница в пространственно-временных масштабах для электронов и ионов приводит к трудностям использования полностью кинетического описания и применения метода частиц (PIC) при численной реализации модели. Альтернативой полному PIC моделированию является использование гибридных (комбинированных) моделей, которые существенно сокращают время счета. Традиционные гибридные модели объединяют кинетические

уравнения для ионов и магнитогидродинамические уравнения для электронов и имеют длинную историю успешного применения при решении ряда проблем бесстолкновительной плазмы [4], [5]. При распространении альфвеновских волн сдвига важную роль играют эффекты их взаимодействия с электронами окружающего фона, которые приводят к необходимости кинетического описания электронной компоненты плазмы и создание другого типа комбинированных моделей. В данной работе представлена гибридная модель, в которой ионная компонента плазмы описывается МГД уравнениями, а электроны – кинетическим уравнением Власова. Данная модель может быть использована для численного моделирования распространения альфвеновских волн и динамики заряженных частиц в магнитосфере Земли.

1. Гибридная модель динамики альфвеновских волн сдвига

Рассмотрим двумерную задачу распространения альфвеновской волны в полярной области магнитосферы Земли. В начальный момент времени $t = 0$ в область, заполненной плазмой, с постоянной плотностью $n = n_0$ и магнитным полем дипольного типа входит альфвеновская волна с амплитудой A и частотой ω . При своем движении она возмущает первоначально максвелловскую функцию распределения электронов, формируя группу быстрых частиц, которые движутся в направлении к Земле. В направлении распространения альфвеновской волны имеется достаточно сильное магнитное поле, которое делает движение электронов практически одномерным.

Для описания электронов используется кинетическое уравнение Власова:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} - ev_r E_r \frac{\partial f}{\partial W} = 0, \quad (1)$$

где $f = f(t, r, W)$ – функция распределения электронов, v_r – скорость частицы в направлении оси r , e , m_e – заряд и масса электрона, E_r – r -компонента напряженности электрического поля \mathbf{E} , $W = \frac{1}{2}m_e v_r^2 + MB_r$ – кинетическая энергия частицы, $M = \frac{m_e v_\perp^2}{2B_r}$ – магнитный момент (для каждой частицы свой), B_r – r -компонента напряженности магнитного поля \mathbf{B} .

Система уравнений, описывающая движение ионной компоненты в приближении магнитной гидродинамики, имеет вид

$$\frac{dn_i}{dt} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{V}_i) = 0, \quad (2)$$

$$m_i n_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = -\nabla p_i + en_i \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_i \times \mathbf{B} \right], \quad (3)$$

где n_i , \mathbf{V}_i – плотность и скорость ионной компоненты, p_i – давление ионной компоненты, $p_i = p_i(n_i) = p_0 n_i^\gamma$, γ – показатель адиабаты, m_i – масса иона.

К этим уравнениям добавляются уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{j} = ne(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e)$ – плотность тока, где $\mathbf{V}_e = \langle v_e \rangle$ – средняя скорость электронной компоненты.

Рассмотрим двумерное течение в плоскости (r, φ) , то есть $\partial/\partial z = 0$. Исходная система уравнений в цилиндрических координатах (r, φ) и безразмерных переменных имеет вид:

$$\frac{dr}{dt} = v_r, \quad \frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\beta} v_r E_r, \quad (5)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rnV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (nV_\varphi) = 0, \quad (6)$$

$$E_\varphi = -V_z B_r + V_r B_z,$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} = -V_\varphi B_r, \quad (7)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial r} + E_r + V_\varphi B_z - V_z B_\varphi.$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\varphi),$$

$$V_\varphi = -\frac{1}{n} \frac{\partial B_z}{\partial r}, \quad V_{er} = V_r - \frac{1}{nr} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi}. \quad (8)$$

где $\mathbf{V}_e = \{V_{er}, 0, 0\}$, $\mathbf{V}_i = \{V_r, V_\varphi, V_z\}$, $\mathbf{B} = \{B_r, 0, 0\}$, $\mathbf{E} = \{E_r, E_\varphi, 0\}$, $\mathbf{v} = \{v_r, 0, 0\}$.

В качестве нормировочных выбраны следующие характерные величины: n_0 , B_0 , p_0 , $V_A = B_0/\sqrt{4\pi m_i n_0}$, $\omega_{pi} = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m_i}$, $L = c/\omega_{pi}$ и $t_0 = L/V_A$.

В соответствии с постановкой задачи начальные данные имеют следующий вид

$$n = n_0, \quad E_r = E_\varphi = 0, \quad V_r = V_\varphi = V_z = 0, \quad B_r = B_r(r) = \frac{1}{r^3}. \quad (9)$$

При решении задачи для всех функций выбираются периодические граничные условия по φ и невозмущенные граничные условия при $r = r_{min}$. На границе $r = r_{max}$ задаются условия входа альфвеновской волны

$$E_r = \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \left(1 - \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2}\right) A \sin \psi, \quad E_\varphi = A \sin \psi,$$

$$V_r = \frac{k_{\parallel}}{\omega k_{\perp}} \left(1 - \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2}\right) A \cos \psi, \quad V_\varphi = -A \omega \cos \psi,$$

$$V_z = -A \sin \psi, \quad V_{er} = -\frac{k_{\parallel}}{\beta \omega k_{\perp}} \left(1 - \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2}\right) A \cos \psi,$$

$$B_z = \frac{\omega}{k_{\parallel}} A \sin \psi, \quad n = -\left[k_{\perp} - \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2 k_{\perp}} \left(1 - \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2}\right)\right] A \cos \psi,$$

где A — амплитуда волны, $\psi = -\omega t + k_{\perp} \varphi + k_{\parallel} r$, а ω и k связаны соотношением

$$\omega^2 = \frac{k_{\parallel}^2 V_A^2}{1 + k^2 \lambda_e^2}.$$

2. Алгоритм решения

В расчетной области введена равномерная сетка с шагами h_1 , h_2 по осям φ и r соответственно, при этом функции определяются в различных точках ячейки. Функция B_z определяется в узлах сетки ($r_k = kh_2$, $\varphi_i = ih_1$), функции V_φ , E_φ , B_r , j_φ – в точках (φ_i , $r_{k-1/2} = (k - 0.5)h_2$), функции V_r , E_r , B_φ , j_r – в точках ($\varphi_{i-1/2} = (i - 0.5)h_1$, r_k), а функции n , V_z , E_z , j_z , p – в серединах ячеек ($\varphi_{i-1/2} = (i - 0.5)h_1$, $r_{k-1/2}$).

2.1. Решение кинетического уравнения

Для каждой частицы решается уравнение

$$\frac{dv_r}{dt} = -\frac{1}{\beta}E_r - M\frac{\partial B_r}{\partial r},$$

которое получается из уравнений характеристик при следующем предположении: момент каждой частицы определяется перед началом расчета и остается постоянным. Для решения данного уравнения используется разностная схема

$$\frac{v_r^{m+1} - v_r^m}{\tau} = -\frac{1}{\beta}E_{r,i-1/2,k}^m - M\frac{B_{r,i,k+1/2}^m - B_{r,i,k-1/2}^m}{h_2},$$

$$\frac{r^{m+1} - r^m}{\tau} = v_r^{m+1}.$$

Средние значения скоростей и плотности плазмы определяются по формулам

$$n_{e,i-1/2,k} = \sum_j R_\varphi(\varphi_{i-1/2} - \varphi_j) R_r(r_k - r_j),$$

$$V_{er,i-1/2,k} = \frac{\sum_j v_{r,j}(\varphi_{i-1/2} - \varphi_j) R_r(r_k - r_j)}{n_{e,i-1/2,k}},$$

где j – номер частицы. Ядро частицы имеет вид

$$R_r(r) = \begin{cases} \frac{1}{h_r} \left(1 - \frac{|r|}{h_r}\right), & \text{когда } |r| \leq h_r, \\ 0, & \text{когда } |r| > h_r. \end{cases}$$

Для решения остальных уравнений используются конечно разностные схемы первого порядка по времени и пространству.

2.2. Вычисление E_r

Основную сложность в данном алгоритме представляет вычисление продольной компоненты электрического поля E_r , поскольку оно находится из уравнения движения для электронов с использованием метода частиц в ячейках.

Так как поле E_r , действующее на частицу, интерполируется в местоположение частицы, то средние значения скорости V_{er} в узлах сетки зависят от значений E_r в окружающих узлах. Поэтому для определения E_r получается система линейных алгебраических уравнений, в каждом уравнении которой между собой связаны 15 значений. Для каждого узла получаем свое уравнение вида

$$V_{er} = f(E_r).$$

Поясним как возникает эта система уравнений. Для каждой частицы, находящейся в соседней с узлом (i, k) ячейке, поле E_r , действующее на частицу, определяется интерполяцией E_r из четырех соседних узлов. Но отдельные частицы могут пересекать границы ячеек, поэтому E_r они получают из окружающих узлов ячейки, а, пересекая границу ячейки, они свою скорость передают в узлы соседней ячейки, в том числе и в (i, k) .

Данная система решается следующим образом. Члены со значениями в трех центральных точках пятнадцатиточечного шаблона переносятся в левую часть системы, а остальные – в правую, и данная система решается методом прогонки для каждого i .

2.3. Заключение

Рассмотрим некоторые результаты численного решения рассматриваемой задачи. Структура параллельной компоненты скорости электронов альфвеновской волны сдвига представлена на Рис. 1 для моментов времени $t = 0.3t_0$ и $t = 0.6t_0$, где $t_0 = L/V_A$. Передний фронт волны распространяется с альфвеновской скоростью и имеет в соответствии с законом дисперсии осцилляторную структуру с характерным размером осцилляций $L = c/\omega_{0i}$. Таким образом представленная гибридная модель, основанная на кинетическом приближении для электронной компоненты плазмы и гидродинамическом описании ионов может быть использована при исследовании волновых процессов в магнитосфере Земли.

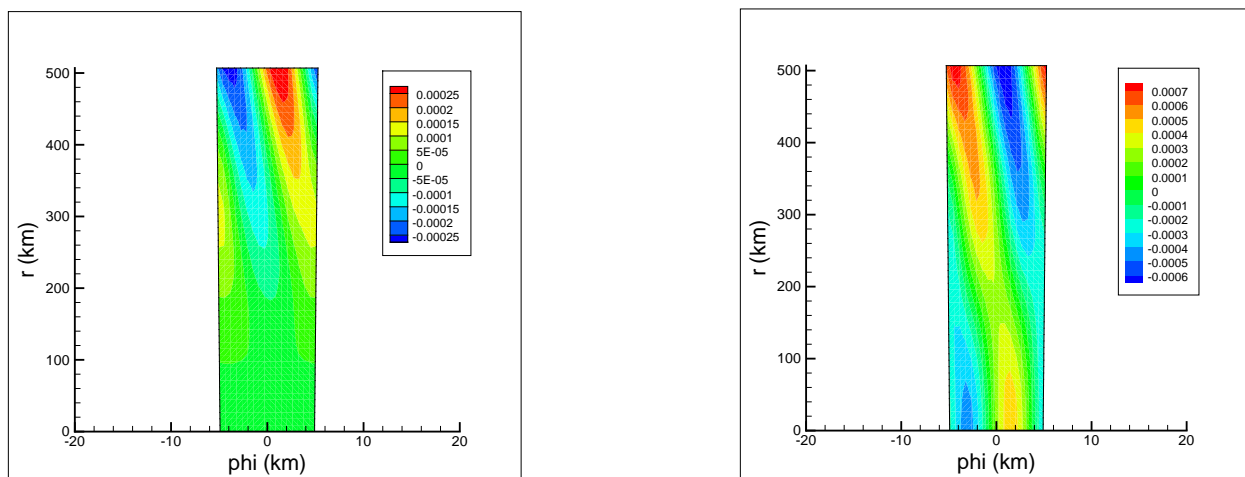


Рис. 1. Скорость электронов в моменты времени $t = 0.3t_0$ и $t = 0.6t_0$.

Список литературы

- [1] CROSS R. C. An Introduction to Alfvén Waves. Adam Hilger, IOP Publ., 1988.
- [2] STIX T. H. Waves in Plasmas. Springer, 1992.
- [3] ТИХОНЧУК, В. Т., РАНКИН, Р. Electron kinetic effects in standing shear Alfvén waves // Physics of plasmas. 2000. V. 7, N6, pp. 2630-2645.
- [4] БЕРЕЗИН Ю.А., ВШИВКОВ В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1980.
- [5] БЕРЕЗИН Ю.А., ДУДНИКОВА Г.И. Численные модели плазмы и процессы пересоединения. М.: Наука, 1985.