

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ НОВОЙ ВЫСОКОЭФФЕКТИВНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ДВИЖЕНИЯ

А.М.Бубенчиков<sup>1</sup>, В.В.Становской<sup>2</sup>, Н.Р.Щербаков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Томский государственный университет, Томск

<sup>2</sup>«ЗАО Технология маркет», Томск

## A MATHEMATICAL MODEL OF THE DYNAMIC STATE OF A NEW HIGHLY EFFECTIVE SYSTEM OF MOTION TRANSMISSION

A.M.Bubenchikov<sup>1</sup>, V.V.Stanovskoy<sup>2</sup>, N.R.Shcherbakov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Tomsk State University, Tomsk

<sup>2</sup>«Technology Market», Tomsk

*The mathematical model of a dynamic state of essentially new transfer mechanism with sinusoidal path of trundling on the cylinder is constructed. Surfaces of teeth are volume equidistant an ellipse and a sinusoidal curve. The exact equations of families of these surfaces formed at work of the mechanism are received. Contact points are defined, formulas for calculation of efforts in contact points are deduced.*

### Введение

В современном машиностроении определяющую роль играют передаточные механизмы, преобразующие вращение ведущего вала во вращательное движение другого вала с изменением угловых скоростей и крутящих моментов. Для получения оптимальных вариантов конструкции передаточных механизмов нового поколения необходимо создание математических моделей динамического состояния этих устройств, компьютерное моделирование геометрии зацепления основных деталей, визуализация процесса работы механизма. В работе построена математическая модель работы механизма оригинальной конструкции – виткового механизма. Основным техническим результатом при использовании таких механизмов, является устранение проскальзывания профилей, т.е. обеспечение режима чистого качения.

### Поверхности основных деталей зацепления

Внешний вид рассматриваемого виткового механизма изображён на рис. 1.

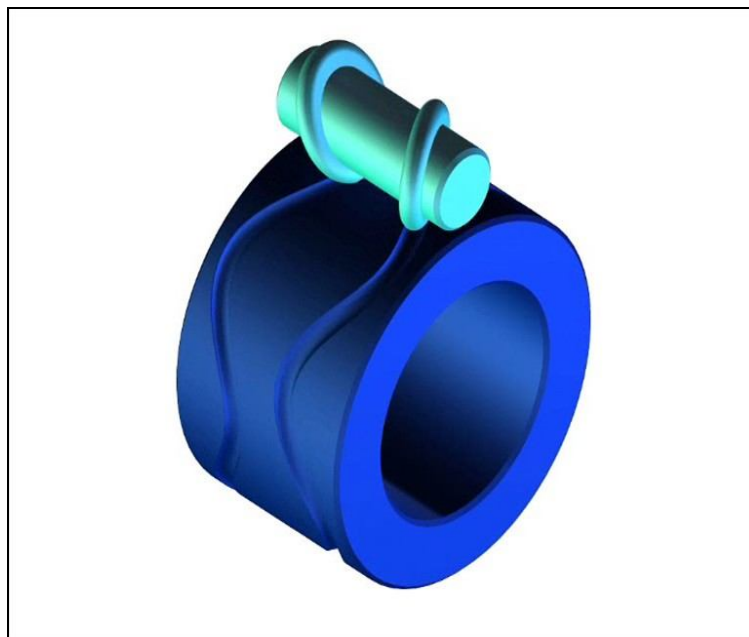


Рис. 1. Общий вид виткового механизма с дорожками качения на цилиндре

Механизм предназначен для передачи движения от одного звена к другому с преобразованием скорости, в котором одно из звеньев выполнено в виде вала вращения с жестко закрепленной косой шайбой (витком). На рабочей поверхности другого звена выполнена периодически изогнутая вдоль оси вращения вала канавка, профиль сечения которой сопрягается с профилем сечения косой шайбы. Таким образом, на одном звене профиль имеет один зуб в виде выступа, который образует косая шайба. На втором профиле зубья образованы периодической канавкой.

Такой вид зацепления будет иметь достаточно большие осевые составляющие, которые, как и в обычном косозубом зацеплении можно устранить, выполняя профили шевронными с двумя комплектами зацепляющихся элементов, смещенных друг относительно друга на фазовый угол, равный половине периода. В данном случае это будет две встречно направленные косые канавки или наклонные шайбы на первом звене и соответственно по два периодических профилированных противофазных элемента на втором звене.

Роль генератора выполняет малый цилиндр. Он передает движение цилиндру гораздо большего размера при помощи двух наклонных роликов (витков), контактирующих с большим цилиндром по синусоидальным дорожкам. Здесь передача движения происходит при помощи силы трения. Цилиндр, от которого передается вращение, принято называть ведущим, а цилиндр, получающий движение, — ведомым. Поверхность каждого ролика представляет из себя объемную эквидистанту [1] эллипса, являющегося наклонным сечением цилиндра, радиус которого больше радиуса ведущего цилиндра на половину толщины ролика. Поверхность каждой дорожки – это часть объемной эквидистанты синусоидальной кривой, которую вычерчивает точка наклонного эллипса на большом цилиндре при движении.

### Уравнения движения контактирующих деталей; точки контакта

Для вывода уравнений поверхностей роликов необходимо сначала получить уравнения наклонных эллипсов и синусоидальных кривых в каждый момент времени, т.е. для каждого угла поворота генератора.

Рассмотрим два цилиндра разных радиусов, которые, касаясь друг друга, вращаются вокруг своих неподвижных осей (рис. 2).

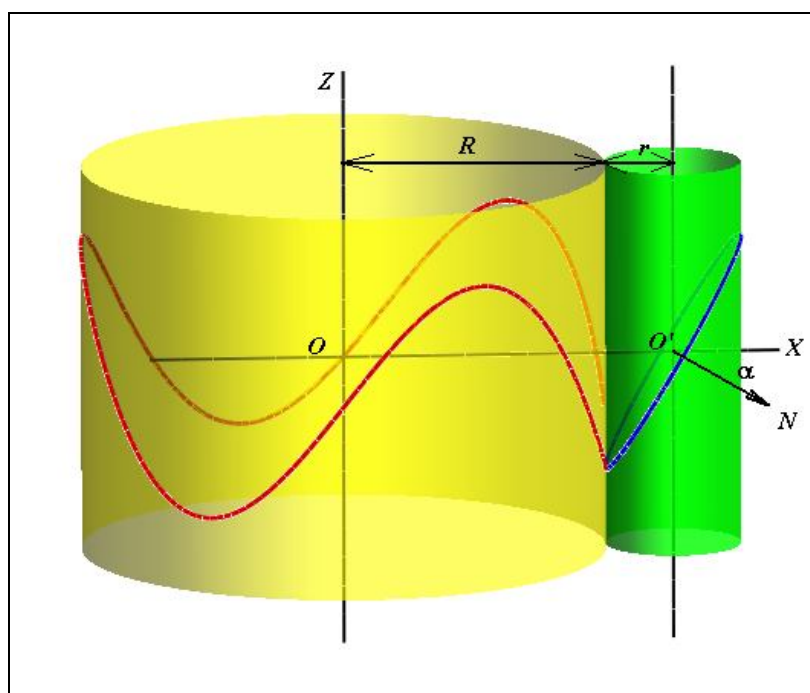


Рис. 2. Построение синусоидальной кривой на цилиндре

Будем считать, что передача вращательного движения происходит без проскальзывания, т. е. общая точка цилиндров при повороте малого цилиндра на некоторый угол опишет на обоих цилиндрах равные дуги. Если малый цилиндр с радиусом  $r$  повернется на угол  $\tau$ , то большой цилиндр с радиусом  $R$  повернется в противоположную сторону на угол  $\varphi(\tau)$ , причём эти углы относятся как радиусы цилиндров. Таким образом, угол поворота ведомого цилиндра равен:

$$\varphi(\tau) = -\frac{r}{R}\tau.$$

При работе механизма эллипс наклонного сечения малого цилиндра будет совершать прецессионное движение, т.е. вращаться вокруг оси, проходящей через центр эллипса перпендикулярно его плоскости, а эта ось, в свою очередь, будет поворачиваться вокруг оси цилиндра, образуя конус с углом при вершине  $2\alpha$ . Семейство таких эллипсов, получающееся при указанном движении, можно записать в виде вектор-функции двух аргументов ( $\tau$  – параметр семейства):

$$El(\tau, u) = \begin{pmatrix} R + r + r \cos u \\ r \sin u \\ -r \operatorname{ctg} \alpha \cos(\tau - u) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Синусоидальную кривую на цилиндре радиуса  $R$  опишут точки каждого эллипса из семейства (1) получающиеся при  $u = \pi$ . Подставляя это значение  $u$  в (1) и поворачивая вектор  $El(t, \pi)$  на угол  $\varphi(t)$  вокруг оси  $OZ$ , получим параметрические уравнения синусоидальной кривой, записанные в виде вектор-функции одного аргумента:

$$S(t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) & 0 \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ r \operatorname{ctg} \alpha \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi(t) \\ R \sin \varphi(t) \\ r \operatorname{ctg} \alpha \cos t \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Семейство таких кривых, получающееся при работе механизма, записывается в виде:

$$S(\tau, t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(\tau) & -\sin \varphi(\tau) & 0 \\ \sin \varphi(\tau) & \cos \varphi(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S(t). \quad (3)$$

Поверхности контактирующих деталей – это объёмные эквидистанты построенных эллипсов и синусоидальных кривых, Уравнения семейств этих эквидистант получаются с помощью формул дифференциальной геометрии [1]. Координаты вектор-функций, задающих эти эквидистанты, как и координаты вектор-функций (1), (3) зависят от параметра  $\tau$ , т.е. фактически мы получим уравнения движения, позволяющие находить точки контакта деталей.

При анализе кинематической схемы зацепления было установлено, что взаимодействие звеньев осуществляется по краю синусоидальной канавки, причём в точке экстремума центральной линии контакт квантовым образом (скачком) переходит с одного края выемки на другой и, соответственно с одной стороны боковой поверхности ролика на другую. Таким образом, точка контакта всегда лежит на цилиндрической поверхности, а не в углублении или бугорчатом силовом выступе. На рис. 3 точки контакта обоих витков с границами синусоидальных дорожек изображены жирными точками.

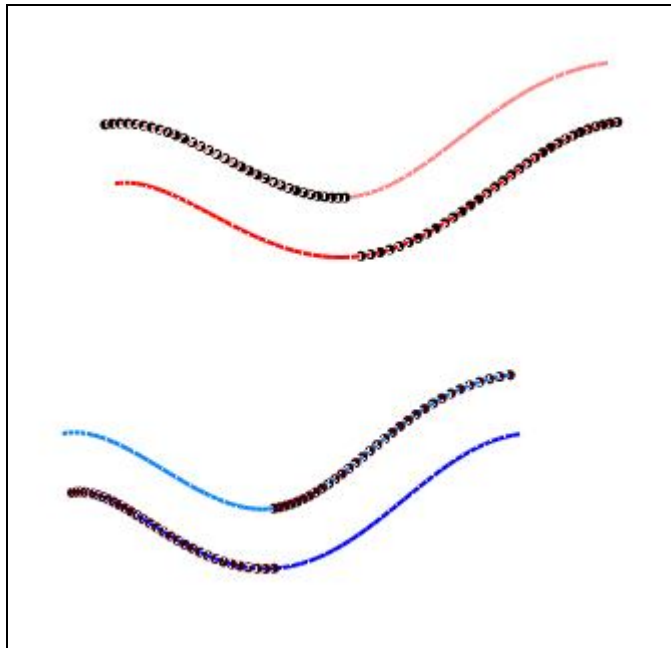


Рис. 3. Точка контакта на границах дорожек качения

### Расчёт усилий в точках контакта

Рассматриваемое зацепление представляет собой два цилиндра, на одном из которых нанесены два бугорчатых элемента (витки), а на другом – две кинематически согласованных с ними синусоидальные канавки. Именно по этим пространственным структурам осуществляется силовое взаимодействие между цилиндрами. Аппроксимировав эти структуры соответствующими пространственными кривыми, лежащими на цилиндрах, мы получим, что область взаимодействия, принадлежащая системе «бугорок-канавка», стянется в точку, лежащую на общей для двух цилиндров прямой  $OO'$ , по которой осуществляется их касание (см. рис. 4).

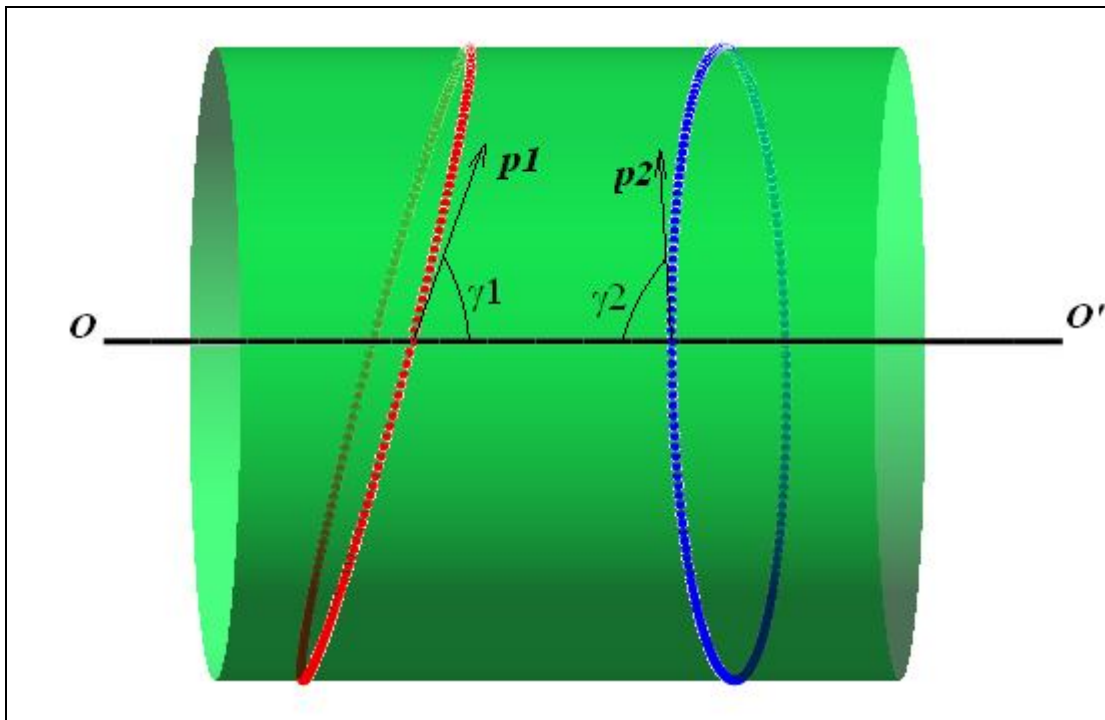


Рис. 4. Усилия в точках контакта

Вектора усилий,  $p1$ ,  $p2$ , возникающие в точках касания, будут лежать в общей касательной плоскости цилиндров и одновременно будут направлены по касательным к

эллипсам и синусоидальным кривым. Углы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  также будут отмеряться в общей касательной плоскости взаимодействующих цилиндров от осевого направления  $OO'$ . Тогда величины  $p_1$  и  $p_2$  могут быть найдены по «закону синуса» по следующим формулам:

$$p_1 = \frac{M \sin \gamma_1}{r (\sin^2 \gamma_1 + \sin^2 \gamma_2)}, \quad (4)$$

$$p_2 = \frac{M \sin \gamma_2}{r (\sin^2 \gamma_1 + \sin^2 \gamma_2)}. \quad (5)$$

Здесь  $M$  – входной момент, а  $r$  – радиус генерирующего цилиндра.

Рассчитав усилия по формулам (4) и (5), мы находим выходной момент по следующему соотношению:

$$M_{\text{вых}} = R \sin \gamma_1 p_1 + R \sin \gamma_2 p_2,$$

где  $R$  – радиус выходного цилиндра.

И поскольку кинематически согласованное движение осуществляется при следующем соотношении угловых скоростей цилиндров

$$\frac{\omega_r}{\omega_R} = \frac{R}{r}, \quad (6)$$

то из (6) получаем трансмиссионный закон:

$$M_{\text{вых}} = \frac{\omega_r}{\omega_R} M,$$

выражающий собой закон сохранения мощности в идеальном случае, т.е. при отсутствии трения в системе.

### **Определение потерь мощности на трение**

Теоретически, в рассматриваемом случае, при кинематически согласованном движении цилиндров трение скольжения отсутствует. Поэтому, речь может идти лишь об учёте потерь на трение качения, которое обычно меньше потерь на трение скольжения.

Физической причиной возникновения трения качения является всегда имеющаяся в окрестности контакта деформация взаимодействующих тел, либо их абразивное взаимодействие, связанное с разрушением неровностей.

При движении силу трения качения считают равной [2]:

$$F_{\text{т.к.}} = \frac{\delta}{r} N. \quad (7)$$

Здесь  $r$  – радиус кривизны в точке контакта меньшего из взаимодействующих тел,  $N$  – величина нормальной реакции, а  $\delta$  – размерный коэффициент трения качения.

Принципиальная схема взаимодействия цилиндров при наличии трения качения изображена на рис 5.

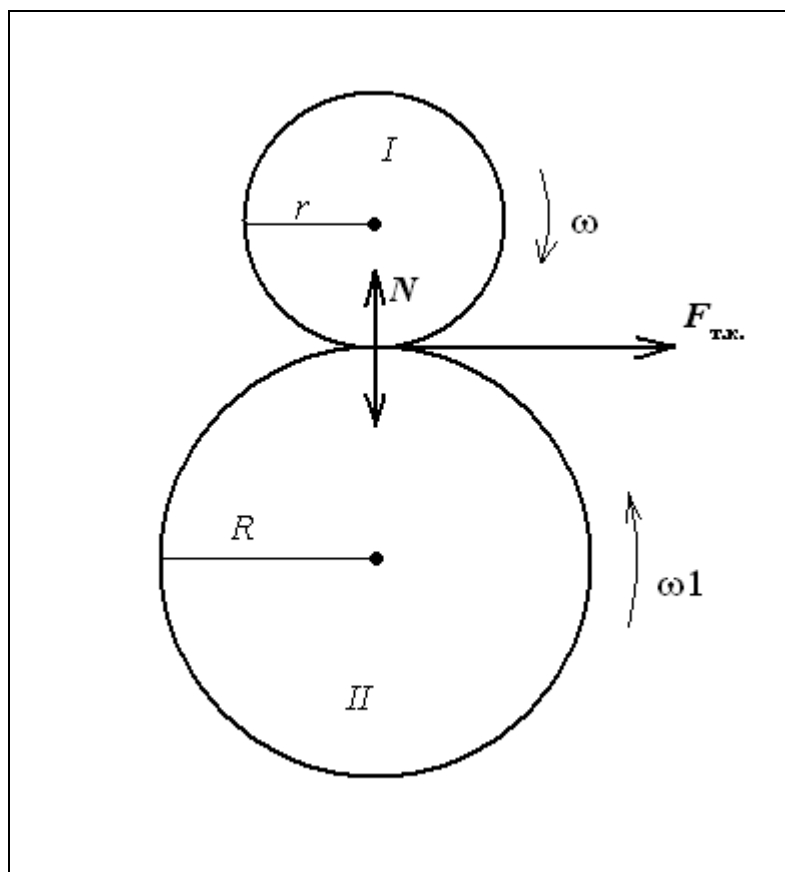


Рис. 5. Взаимодействие цилиндров при наличии трения качения. I – ведущий вал, II – ведомый вал.

Величина потерь мощности на трение при взаимодействии валов будет равна произведению угловой скорости ведущего вала  $\omega$  на момент силы трения относительно центра этого вала. С учётом (7), получаем:

$$Q_{\text{т.к.}} = \omega r F_{\text{т.к.}} = \omega \delta N. \quad (8)$$

Коэффициент трения качения  $\delta$ , входящий в (8), обычно определяется экспериментальным путём, а величина потерь мощности на трение будет заметной лишь в значительном предварительном сжатии цилиндров, т. е. при больших величинах нормальной реакции  $N$ .

#### Список литературы

1. Фиников С.П. Курс дифференциальной геометрии. М.:ГИТТЛ. 1952. С.155.
2. Томилов Е.Д. Теоретическая механика. Томск: Изд-во Томского ун-та. 1966. ч.1. С.78.