МЕТОД ОБЩЕГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Н. Р. Юничева
Институт проблем информатики и управления, Алматы
e-mail: naduni@mail.ru

In given article on the basis of common parameter method with multiplicate parametrical tuning and device of the interval analysis the parametrical synthesis task of control by interval-given object is solved.

1. Введение

Системы управления современными техническими объектами, как правило, характеризуются большим числом параметров и взаимосвязей, настолько большим, что иногда невозможно решать такие задачи аналитически, и не всегда можно упростить задачу для проведения экспериментов. Также неоднократно отмечалось, что большая часть систем автоматического управления функционирует в условиях параметрической неопределенности. Однако многообразие особенностей этих неопределенностей не позволяет создать единую теорию анализа и синтеза таких систем. О данных таких систем известно лишь то, что они принадлежат замкнутым конечным интервалам вещественной оси. Фактически, рассматривается задача управления спектром траекторий в фазовом пространстве, когда весь спектр должен обладать требуемыми динамическими свойствами. Оказывается, что многие сложные управляемые объекты с интервальными неопределенностями можно достаточно адекватно описывать вышеуказанным способом. Разработка концепций и принципов построения систем управления сложными динамическими объектами, функционирующими в условиях неопределенности актуальна для современного этапа развития теории автоматического управления. Наиболее актуальными и перспективными для изучения вышеуказанного класса систем, с учетом особенностей работы алгоритмов реального времени в условиях неопределенности, являются нечеткие методы. Представление ряда ограничений на параметры как нечетких или интервальных дает возможность получать устойчивое решение в условиях погрешности информации и нечеткости производственных ограничений т.е. в виде функций принадлежности. Постановка задачи в нечеткой форме также значительно снижает возможность получения несовместимых решений при расчете систем. Появляется возможность формализации неточных знаний о предметной области, внесения в модель сведений о неполноте информации. Для операций над носителями нечетких множеств можно воспользоваться алгебраическими операциями интервального анализа [1].

В предлагаемой работе на основе идеологии метода общего параметра [2], ранее развитого профессором Сыздыковым Д.Ж. для решения задач идентификации и аппарата нечетких методов (в т.ч. интервальных) решается задача параметрического синтеза управления объектами, функционирующим в нечетких условиях.

2. Постановка задачи

Рассмотрим семейство одномерных объектов управления, математическая модель которых в пространстве состояний представляется системой интервальных уравнений следующего вида:

$$\dot{X}(t) = \mathbf{A}X(t) + \mathbf{B}U(t), \tag{1}$$

где $X(t) \in R^m$ - вектор состояний; $U(t) \in R^1$ - скалярное управление; $\mathbf{A} \in M_{m,m}(I(R))$ - вещественная интервальная матрица объекта управления размерности $(m \times m)$,которая удовлетворяет следующему соотношению $\mathbf{A} = \left\{[a_{ij}]\,,\ i,j = \overline{1,n}\right\}$, $[a_{ij}] = [\underline{a_{ij}}; \overline{a_{ij}}],\ \ i,j = \overline{1,m}$; $\mathbf{B} \in M_{m,1}(I(R))$ - вещественный интервальный вектор объекта управления размерности $(m \times 1)$, $\mathbf{B} = \left\{[b_j]\,, j = \overline{1,m}\right\}$, , $b_j = [\underline{b_j}; \overline{b_j}],\ \ j = \overline{1,m}$; $M_{m,m}(I(R))$, $M_{m,1}(I(R))$- соответственно множества матриц и векторов, элементами которых являются вещественные интервалы $[\underline{a}, \overline{a}] \triangleq \{a \in R \wedge \underline{a} \le a \le \overline{a}\}$; $I(R)$- множества всех вещественных интервалов; $\underline{a_{ij}}, \underline{b_j},\ \overline{a_{ij}},\ \overline{b_j}$ - нижние и верхние границы значений элементов матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{B}$.

Целью синтеза будем считать определение интервального вектора $\mathbf{K} \in M_{m,1}(I(R))$ в уравнении обратных связей следующего вида:

$$U(t) = \mathbf{K}^T X(t), \tag{2}$$

обеспечивающего желаемые динамические свойства в интервальной замкнутой системе управления вида:

$$\dot{X}(t) = \mathbf{D}X(t)$$

где $\mathbf{D} \in M_{m,m}(I(R))$, $\mathbf{D} = \mathbf{d_{ij}}, \left\{,\ i,j = \overline{1,m}\right\}$, $\mathrm{d}_{\mathbf{ij}} = \underline{\mathrm{d}_{\mathrm{ij}}};\overline{\mathrm{d}_{\mathrm{ij}}},\ \ i,j = \overline{1,m}$ - интервальная матрица замкнутой системы управления. При этом желаемый интервальный характеристический полином определяется следующим образом:

$$\mathbf{d}(\ \lambda) = \det(\lambda E - \mathbf{D}) = \lambda^n + \mathbf{d_1}\lambda^{n-1} + \mathbf{d_2}\lambda^{n-2} + \cdots + \mathbf{d_n}, \tag{3}$$

где $\mathbf{d_{ij}} = \underline{\mathrm{d}_{\mathrm{ij}}};\overline{\mathrm{d}_{\mathrm{ij}}},\ \ i,j = \overline{1,n}$ - интервальные коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы управления.

Как известно [3], для точечной матрицы $\forall A \in \mathbf{A}$ и точечного вектора $\forall B \in \mathbf{B}$ вещественная передаточная функция объекта управления представляется в следующем виде:

$$W_{\forall\forall}(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}B = \frac{adj(\lambda I - A)B}{\det(\lambda I - A)}, \tag{4}$$

где $adj\,(\lambda I - A)$ - присоединенная матрица, $\det(\lambda I - A)$- характеристический полином объекта управления.

Вещественная передаточная функция замкнутой системы управления представляется следующим образом:

$$W(\lambda) = \frac{\frac{adj(\lambda I - A)B}{\det(\lambda I - A)}}{1 - \frac{K^T adj(\lambda I - A)B}{\det(\lambda I - A)}}, \tag{5}$$

где K^T- неизвестный вектор настраиваемых параметров регулятора. Для уравнения (3) запишем естественное интервальное расширение из [3]:

$$\mathbf{W}_{\forall\forall}(\lambda) = \{(\lambda I - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{adj(\lambda I - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(\lambda I - \mathbf{A})}\}, \tag{6}$$

где

$$\det(\lambda I - \mathbf{A}) = \mathbf{l}(\lambda) = \lambda^n + \mathbf{l_1}\lambda^{n-1} + \mathbf{l_2}\lambda^{n-2} + \cdots + \mathbf{l_n} \tag{7}$$

интервальный характеристический полином объекта управления.

В соответствии с определением 4 [3], семейство передаточных функций интервальной замкнутой системы управления записывается в следующем виде:

$$\mathbf{W}(\lambda) = \frac{\frac{adj(\lambda I - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(\lambda I - \mathbf{A})}}{1 - \frac{\mathbf{K}^T adj(\lambda I - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(\lambda I - \mathbf{A})}}, \tag{8}$$

где $\mathbf{K}^T \in I\left(R^n\right)$- неизвестный интервальный вектор настраиваемых параметров, подлежащий определению.

Рассмотрим выражение, стоящее в знаменателе выражения (8):

$$-\mathbf{K}^T adj(\lambda I - \mathbf{A})\mathbf{B} + \det(\lambda I - \mathbf{A}),$$

являющееся характеристическим полиномом замкнутой системы управления, в котором присутствует неизвестный интервальный вектор настраиваемых параметров $[K]$. Приравнивая характеристический полином замкнутой системы управления желаемому характеристическому полиному (3), получим следующее выражение:

$$-\mathbf{K}^T adj(\lambda I - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{l}(\lambda) \subseteq \mathbf{d}(\lambda), \tag{9}$$

Из выражения (9) путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях λ в правой и левой частях, получим систему алгебраических интервальных включений:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{l} \subseteq \mathbf{d}, \tag{10}$$

где **P**- интервальная матрица, составленная из элементов матрицы **A** и вектора **B**; **l** - интервальный вектор, составленный из коэффициентов при соответствующей степени λ характеристического полинома объекта управления; **d** - интервальный вектор, составленный из коэффициентов при соответствующей степени λ желаемого характеристического полинома замкнутой системы управления. Преобразуем выражение (10) к следующему виду:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} \subseteq \mathbf{d} \; \Theta \; \mathrm{l} \; \subseteq \mathbf{H}, \tag{11}$$

где Θ - операция внутренней разности, которая понимается в следующем смысле:

$$\mathbf{d} \; \Theta \; \mathrm{l} = \left[\underline{d}, \overline{d}\right] \Theta \left[\underline{l}, \overline{l}\right] = \left[\underline{d} - \underline{l}, \overline{d} - \overline{l}\right].$$

Таким образом, мы пришли к системе линейных интервальных алгебраических включений:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} \subseteq \mathbf{H} \tag{12}$$

Как известно [4], существуют четыре различных определения понятий решения интервальной системы алгебраических интервальных уравнений: объединенное множество решений, допустимое множество решений, управляемое множество решений, алгебраическое множество решений. С другой стороны, хорошо известно, что математические особенности интервального пространства, являющегося нетривиально устроенной алгебраической системой, приводят к экспоненциальному росту вычислительных трудностей при описании множеств решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений. Задачи распознавания непустоты таких множеств являются в общем случае NP- полными [5]. Вышеперечисленные обстоятельства дают основание для разработки новых алгоритмов, позволяющих облегчать вычислительные трудности.

В настоящее время существуют эффективные подходы для преодоления вышеперечисленных вычислительных трудностей. К числу таких подходов относится метод общего параметра, развитый для решения задач идентификации.

Разработанные алгоритмы метода общего параметра для оценивания области определения параметров объекта управления отличаются от известных тем, что вместо **n** настраиваемых параметров модели по результатам эксперимента для известных алгоритмов, настраивается один общий параметр для всех параметров модели.

3. Решение задачи параметрического синтеза на основе идеологии метода общего параметра с мультипликативной параметрической настройкой

Как указывалось выше, решение поставленной задачи было сведено к разрешимости интервальной системы (12). Построение интервального вектора настраиваемых параметров обеспечивающего выполнение (12) является решением линейной задачи о допусках. Известно [9], что для решения линейной задачи о допусках существует два различных подхода: центровой и алгебраический. Суть центрового подхода заключается в определении некоторой точки, принадлежащей допустимому множеству решений. Принимая данную точку в качестве центра, конструируется интервальное решение. Также известно, что определение решения обеспечивающего данное включение является трудоемкой задачей.

Поэтому в работе решение поставленной задачи было осуществлено с использованием идеологии метода общего параметра, в котором, как известно, настройке подлежат не все, а только один общий параметр. Это достоинство позволяет в значительной степени сократить вычислительные затраты.

Представим искомый интервальный вектор настраиваемых параметров **K** следующим образом:

$$U(t) = \beta K_0^T X(t), \tag{13}$$

где $\beta = \underline{\beta}, \overline{\beta}$ - мультипликативный общий интервальный настраиваемый параметр; $K_0 \subseteq R^n$- точечный вектор настраиваемых параметров системы алгебраических уравнений следующего вида:

$$mid\mathbf{P}K_0 = mid\mathbf{H}. \tag{14}$$

Для алгоритма управления (13) интервальная система алгебраических включений, к которым сводится решение задачи параметрического синтеза, представляется следующим образом:

$$\mathbf{P}\beta K_0 \subseteq \mathbf{H}, \tag{15}$$

или в покомпонентной записи:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{p_{ij}} k_{0j} \left[\underline{\beta}, \overline{\beta}\right] \subseteq \mathrm{h_i}, \qquad i = \overline{1, n} \tag{16}$$

Решение включения (15) будем искать в классе допустимого множества решений [3]. Для решения поставленной задачи необходимо определить такой параметрβ, который обеспечивал бы включение (15):

Следующая теорема дает нам выражение для определения искомого интервального вектора βK_0:

Теорема 1.

Интервальный вектор $\mathbf{K} = \beta K_0$ обеспечивает включение вида $\mathbf{P}\beta K_0 = \mathbf{H}$ если вектор K_0 представляет собой решение системы уравнений $mid\,[P]\,K_0 = mid\,[H]$ и удовлетворяет неравенству $\sum_{j=1}^{n} rad\,(\mathbf{p_{ij}})\,.k_{0j} \leq rad\mathbf{h_i}$, а общий настраиваемый параметр β определяется из следующего выражения:

$$\beta = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{rad\mathbf{h}_i - \sum_{j=1}^{n} rad\mathbf{p}_{ij}\,|k_{0j}|}{\sum_{j=1}^{n} mid\,|\mathbf{p}_{ij}\,|k_{0j}| + rad\mathbf{p}_{ij}\,|k_{0j}||} \right\}. \tag{17}$$

Доказательство данной теоремы приведено в работе [7].

Список литературы

[1] Шокин Ю.И. Интервальный анализ. Новосибирск.: Наука, Сиб.отд-ие, 1981. 107 с.

[2] Ашимов А.А., Сыздыков Д.Ж. Идентификация методом общего параметра: Справочник по теории автоматического управления / Под ред. Красовского А.А. М.: Наука, 1987. С.263-271.

[3] Юничева Н.Р. Построение и исследование динамических систем управления линейными интервально-заданными объектами на основе метода общего параметра. Алматы.: ТОО «Классика», 2008. 100 с.

[4] Шарый С.П. Линейные статические системы с интервальной неопределенностью: эффективние алгоритмы для решения задач управления и стабилизации // Вычислительные технологии, 1995. Т 4. С. 331-356.

[5] Лакеев А.В., Носков С.И. Описание множества решений линейного уравнения с интервально-заданным оператором и правой частью // Доклады Академии Наук. - 1993. - Т. 330, № 4. - С. 430-433.

[6] Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Актуальные проблемы информатики, прикладной математики и механики / Красноярск: ВЦ СО РАН, 1995. - С. 331-356.

[7] Юничева Н.Р. Метод общего параметра в задаче синтеза управления объектами, функционирующими в нечеткой среде // Проблемы информатики, 2010, № 4, С.10-17.