ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ИЗМЕРЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИ ИСКАЖЕННЫХ СИГНАЛОВ

А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк
Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

ABOUT OPTIMAL MEASUREMENT OF DYNAMICALLY DISTORTED SIGNALS

A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk
South Ural State University, Chelyabinsk

There has been suggested new approach to measure a signal distorted as by inertial measurement transducer, as by its resonances.

Введение

Теория динамических измерений возникла и развивалась в рамках теории обратных задач [1]. Для изучения кратковременных сигналов, возникающих, например, при коррекции положения космического аппарата, одним из соавторов [2] была предложена модель измерительного устройства (ИУ), которая первоначально использовалась в теории автоматического управления [3]

$$\dot{x} = Ax + Du, \qquad y = Cx \tag{1}$$

Здесь $x = x(t)$ – вектор-функция состояний ИУ, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u = u(t)$ и $y = y(t)$ – вектор-функции измеряемого и наблюдаемого сигнала соответственно, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а матрицы ИУ A, датчика D и наблюдения C имеют соответственно размеры $n \times n$, $n \times m$ и $l \times n$. Модель (1) оказалась адекватной эффекту механической инерционности ИУ, из-за которого пикообразный измеряемый сигнал u «сглаживается». Причем это обнаруживается не только в натурных [4], но и в численных экспериментах [5], [6].

Задача восстановления сигнала u по наблюдению y математически некорректна, поэтому для ее решения были предложены технически обоснованные гипотезы, как например, «скользящие режимы» [7] и «регуляризуемость ИУ» [8], причем найденные решения были «воплощены в металл». Между тем, в [9] впервые было предложено исследовать нахождение измерения u по наблюдению y методами теории оптимального управления, т.е. искомое наблюдение y минимизирует функционал

$$I(v) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^{\tau} \left\| y^{(q)} - y_0^{(q)} \right\|^2 dt, \tag{2}$$

где $y_0 = y_0(t)$ – наблюдение, полученное на реальном ИУ. Минимум функционала I ищется на множестве *допустимых измерений*, которое строится с учетом имеющейся информации (как правило, неполной) об искомом наблюдении. В [5], [6] был предложен алгоритм численного решения задачи (1), (2), который на контрольном примере ($u = A\sin^2 \omega t$) показал хорошее приближение к точному решению.

Однако искажение измеряемого сигнала часто случается не только из-за механической инерционности ИУ, но и в следствие механических же резонансов. В реальной ситуации в ИУ встраиваются фильтры, которые «вырезают» резонирующие частоты измеряемого сигнала. Иногда эти фильтры тоже резонируют, но уже на другие частоты, поэтому устанавливают дополнительные фильтры, которые устраняют возникшие резонансные частоты и т.д. В статье предлагается новая модель оптимального измерения, где ИУ обладает не только механической инерцией, но и резонансами. Суть нововведения заключается в добавлении в функционал (2) еще одного слагаемого, которое играет роль резонансных фильтров. Причем, как это часто бывает в виртуальных ситуациях, предлагаемая модель не будет вызывать вторичных резонансов.

Оптимальное измерение с учетом инерции и резонансов

Модель ИУ мы представляем как *систему уравнений леонтьевского типа* [10]

$$L\dot{x} = Mx + Du \qquad (3)$$

$$y = Nx \qquad (4)$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно, L и M – квадратные матрицы порядка n, представляющие взаимовлияния скоростей состояния и состояния соответственно. Причем, допускается возможность $\det L = 0$, ибо в противном случае систему (3) можно представить в более простом виде. Далее, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – вектор-функции измерений и наблюдений соответственно. Подчеркнем, что параметров измерений и, соответственно, наблюдений может быть больше одного, как например в (1). Наконец, D и N – квадратные матрицы порядка n, характеризующие взаимовлияние параметров измерения и связь между состоянием системы и наблюдением соответственно. Модель ИУ (3), (4) является более общей, чем (1).

Системы леонтьевского типа являются конечномерным частным случаем *уравнений соболевского типа*. Поэтому, при изучении их будем использовать идеи, методы и результаты общей теории [11, гл. 2], адаптированные к конечномерной ситуации. Следуя [10], матрицу M назовем (L,p)–регулярной, если существуют число $\alpha \in \mathbf{C}$ такое, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$, и число $p \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ равное нулю, если в точке ∞ L–резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ матрицы M имеет устранимую особую точку; и равное порядку полюса в точке ∞ матриц–функции $(\mu L - M)^{-1}$ в противном случае.

Пусть матрица M (L,p)–регулярна. Для системы (4) поставим задачу Шоуолтера – Сидорова

$$\left[(\alpha L - M)^{-1} L\right]^p \left(x(0) - x_0\right) = 0 \qquad (5)$$

при некоторых $x_0 \in \Re^n$, $\alpha \in \rho^L(M) = \{\alpha \in C : \det(\alpha L - M) \neq 0\}$. Здесь $R_\alpha^L(M) = (\alpha L - M)^{-1} L$ – *правая L–резольвента матрицы M*. Заметим, что по мнению ряда авторов [12], [13], [14] задача Шоуолтера–Сидорова более естественна для уравнений соболевского типа, чем задача Коши, с которой она совпадает в случае $\det L \neq 0$. Кроме того, преимущества начального условия (5) в вычислениях отмечены в [5], [6]. Наконец, укажем еще полезное обобщение [15] задачи Шоуолтера–Сидорова.

Фиксируем $\tau \in \Re_+$ и введем в рассмотрение *пространства состояний* $\aleph = \left\{x \in L_2\left((0,\tau), \Re^n\right) : \dot{x} \in L_2\left((0,\tau), \Re^n\right)\right\}$, *измерений* $U = \left\{u \in L_2\left((0,\tau), \Re^n\right) : u^{(p+1)} \in L_2\left((0,\tau), \Re^n\right)\right\}$ и *наблюдений* $Y = N[\aleph]$. Отметим, что не всегда $Y = N[\aleph]$, но всегда Y изоморфно некоторому подпространству в $\aleph$.

Выделим в замкнутое и выпуклое подмножество U_∂ – *множество допустимых измерений* и поставим *задачу оптимального измерения*. Найти пару $(y, v) \in Y \times U_\partial$ почти всюду на $(0,\tau)$, удовлетворяющую уравнениям (3), (4) с условием (5), причем

$$\Im(v) = \min_{u \in U_\partial} \Im(u), \quad \Im(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| y^{(q)}(t) - y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\langle F_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \right\rangle dt \qquad (6)$$

Здесь $y_0(t) = \left(y_{01}(t), y_{02}(t), \ldots, y_{0n}(t)\right)$ – наблюдение, полученное в ходе натурного эксперимента, т.е. снятое с ИУ, моделью которого служат системы (3), (4); $\|\cdot\|$ – евклидова норма пространства $\Re^n$; $u^{(q)}(t) = \left(u_1^{(q)}(t), u_2^{(q)}(t), \ldots, u_n^{(q)}(t)\right)$ – возможное измерение из U_∂ и его производные, $F_q \in L(U)$ – самосопряженные положительно определенные операторы,

$q = 0, 1, \ldots, p+1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово скалярное произведение в $\Re^n$. Задачу оптимального измерения будем в дальнейшем для краткости называть *задачей* (3)–(6).

Задача (3)–(6) в гильбертовых пространствах и в более общей постановке (в частности, требовалось еще найти вектор состояний x рассматривалась в [16] как «задача жесткого оптимального управления».

Поэтому, мы без доказательства приводим следующий результат, почерпнутый из [16] и адаптированный к нашей ситуации с приведением вида решения задачи (3)–(6) .

Теорема 1. *Пусть матрица* M (L, p)*–регулярна,* $p \in \{0\} \cup \mathbf{N}$, $\tau \in \Re_+$, *причем* $\det M \neq 0$. *Тогда для любых* $x_0 \in \Re^n$, $y_0 \in Y$ *существует единственное решение* $(y, v) \in Y \times U_\partial$ *задачи* (3)–(6), *где* $y = Nx$, *а*

$$x(t) = \lim_{k \to \infty} \left[\sum_{q=0}^{p} \left(M^{-1} \left(\left(kL_k^L(M) \right)^{p+1} - \mathbf{I}_n \right) L \right)^q M^{-1} \left(\mathbf{I}_n - \left(kL_k^L(M) \right)^{p+1} \right) (Du)^{(q)}(t) + U_k^t u_0 + \right.$$

$$\left. + \left(\left(L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} \right)^{k(p+1)} x_0 + \int_0^t \left[\left(L - \frac{t-s}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)-1} \left(L - \frac{t-s}{k(p+1)} M \right)^{-1} \left(kL_k^L(M) \right)^{p+1} Du(s) ds \right].$$

Заметим, что условие $\det M \neq 0$ не снижает общности рассматриваемой задачи. Действительно, при условии (L, p)–регулярности матрицы M в результате замены $x = e^{\lambda t} z$ перейдем к уравнению $L\dot{z} = (M - \lambda L)z + e^{-\lambda t} Du$ того же вида, что и (3), но $\det(M - \lambda L) \neq 0$. Отметим еще, что решение (y, v) задачи (3) –(6), существующее в силу теоремы 1, будем в дальнейшем называть *точным решением*.

В докладе приводится алгоритм решения задачи оптимального измерения, вид приближенного решения и теорема о сходимости приближенного решения к точному При этом используются результаты [17].

Список литературы

1. Грановский В.А. Динамические измерения / В.А. Грановский. – Ленинград: Энергоиздат, 1984.
2. Шестаков, А.Л. Динамическая точность измерительного преобразователя с корректирующим устройством в виде модели датчика / А.Л. Шестаков // Метрология. – 1987. – №2. – С. 26 – 34.
3. Derusso P.M. State Variables for Engineers /P.M. Derusso, R.J. Roy, C.M. Close. – N.-Y.; London; Sydney: Wiley, 1965.
4. Shestakov A.L. Dynamic error correction method / A.L. Shestakov // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 1996. – V. 45, № 1. – P.250–255.
5. Шестаков А.Л. О новом подходе к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. ШЩестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ, серия Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16 (192), 5. – С.116 – 120.
6. Келлер, А.В. Свойство регуляризуемости и численное решение задачи динамического измерения / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Вестник ЮУрГУ, серия Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16 (192), 5.– Р. 32 – 38.
7. Бизяев, М.Н. Динамические модели и алгоритмы восстановления динамически искаженных сигналов измерительных систем в скользящем режиме: дис. … канд. техн. наук / М.Н. Бизяев. – Челябинск, 2004.
8. Иосифов, Д.Ю. Динамические модели и алгоритмы восстановления сигналов измерительных систем с наблюдаемым вектором координат состояния: дис. … канд. техн. наук / Д.Ю. Иосифов. – Челябинск, 2007.

9. Шестаков, А.Л. Динамические измерения как задача оптимального управления / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Е.В. Захарова // Обозрение прикладной и промышл. математики. – 2009. – Т. 16, вып. 4. – С. 732 – 733
10. Sviridyuk G.A. Numerical solutions of systems of equations of Leontieff type / G.A. Sviridyuk, S.V. Brychev // Rus. Math. – 2003. – V.47, № 8. – P.44-50.
11. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semi-groups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Tokyo: VSP, 2003.
12. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркут. гос.ун-та. Сер. Математика. – Иркутск, 2010. – Т.3, № 1. – С.104 –125.
13. Замышляева, А.А. Начально–конечная задача для уравнения Буссинеска–Лява / А.А. Замышляева, А.В. Юзеева // Вестник ЮУрГУ, серия Математическое моделирование и программирование. – 2010.– № 16 (192), 5. – P.23–31.
14. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера–Сидорова для одного уравнения соболевского типа / Н.А. Манакова, Е.А. Богонос // Известия Иркут.гос.ун-та. Сер. Математика. – Иркутск, 2010. – Т.3, №1. – С.42--53.
15. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера–Сидорова / С.А. Загребина // Изв. ВУЗ. Матем. – 2007. № 3. – С. 22–28.
16. Федоров, В.Е. Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений / В.Е. Федоров, М.В. Плеханова // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. –Т.9, № 2. – С.92–102.
17. Келлер, А.В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями Шоуолтера–Сидорова / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ, серия Математическое моделирование и программирование. – 2010.– № 27 (127). – С.50–56.