Численное решение одной модели фильтрации в упругой пористой среде методами Монте–Карло

Канат Кожахметович Шакенов

Казахский национальный университет имени аль–Фараби

e-mail: `shakenov2000@mail.ru`

Аннотация

В работе рассматривается модель фильтрации по простейшему неравновесному закону в упругой пористой среде. Решение вспомогательной краевой задачи для "давления"оценивается методами Монте–Карло.

Постановка задачи. Линейная релаксационная фильтрация описывается законом сохранения импульса сил сопротивления, линеаризованным законом сохранения массы жидкости, определяющими соотношениями для импульса сил сопротивления и массы жидкости. Эта система уравнений, после исключения плотности импульса сил сопротивления ($\mathbf{J}$) и ($m \cdot \rho$), относительно давления (p) и скорости фильтрации ($\mathbf{W}$) имеет вид:

$$\Delta p(x,y) = \frac{F(0)\Phi(0)}{\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 p(x,y)}{\partial t^2} + \int\limits_0^\infty \left(\frac{F(0)}{\rho_0} \cdot \frac{d\Phi(t')}{dt'} + \frac{\Phi(0)}{\rho_0} \cdot \frac{dF(t')}{dt'} + \frac{1}{\rho_0} \int\limits_0^{t'} \frac{dF(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\Phi(t'-\tau)}{d(t'-\tau)}\, d\tau \right) \cdot \frac{\partial^2 p(x,t-t')}{\partial (t-t')^2}\, dt', \tag{1}$$

$$\operatorname{grad}_x p(x,t) = -F(0) \cdot \frac{\partial \mathbf{W}(x,t)}{\partial t} - \int\limits_0^\infty \frac{dF(t')}{dt'} \cdot \frac{\partial \mathbf{W}(x,t-t')}{\partial (t-t')}\, dt' \tag{2}$$

Здесь $F(t)$ и $\Phi(t)$ называются ядрами релаксации закона фильтрации и массы жидкости соответственно. [1].

Рассматривается модель фильтрации по простейшему неравновесному закону в упругой пористой среде $\Omega \in \mathbb{R}^3$. В этом случае ядра релаксации имеют вид

$$F(t) = \frac{\mu}{\kappa}\left(t + \left(\tau_W - \tau_p\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right)\right)\right) \cdot \eta(t), \tag{3}$$

$$\Phi(t) = \rho_0 \cdot \beta \cdot \eta(t). \tag{4}$$

Система (1) и (2) записываются в виде

$$\chi \cdot \Delta\left(p(x,t) + \tau_p \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(p(x,t) + \tau_W \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\right), \tag{5}$$

$$-\frac{\kappa}{\mu} \cdot \operatorname{grad}_x \left(p(x,t) + \tau_p \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \right) = \mathbf{W}(x,t) + \tau_W \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}. \tag{6}$$

Здесь $p(x,t)$ – давление жидкости, $x \in \Omega \in \mathbb{R}^3$, t – время, $t \in [0,\, T]$, t' – время, τ – время релаксации, ρ_0 – плотность жидкости в невозмущенных пластовых условиях, $\mathbf{W}$ – скорости фильтрации, μ – вязкость жидкости, κ – коэффициент проницаемости, τ_p и τ_W – неотрицательные постоянные времена релаксации соответственно давления и скорости фильтрации, β – коэффициент упругоёмкости пласта, $\beta = \beta_c + m_0 \cdot \beta_f$, β_c – коэффициент сжимаемости пористой среды, β_f – коэффициент сжимаемости жидкости, $\eta(t)$ – функция Хевисайда, $\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 1/2 & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$ χ – коэффициент пьезопроводности пласта, $\chi = \frac{\kappa}{\mu \cdot \beta}$.

Рассмотрим уравнение (5). Пусть при $t = 0$ выполнены начальные условия, то есть

$$p(x,t) = a(x), \quad t = 0, \tag{7}$$

и

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = b(x), \quad t = 0, \tag{8}$$

а на границе $\partial\Omega$ области Ω выполнено условие Дирихле, то есть

$$p(x,t) = c(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,\, T]. \tag{9}$$

Теперь поставим задачу для уравнения (refsheq6). При $t = 0$ выполнено начальное условие, то есть

$$\mathbf{W}(x,t) = \mathbf{W}^0(x), \quad t = 0, \tag{10}$$

на границе $\partial\Omega$ выполнено также условие Дирихле

$$\mathbf{W}(x,t) = \mathbf{W}_0(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,\, T]. \tag{11}$$

Решение задачи (5), (7) – (9). Предположим, что $\tau_p = \tau_W = \tau$, где τ_p и τ_W – неотрицательные постоянные времена релаксации соответственно давления и скорости фильтрации. Введем обозначение

$$P(x,t) = p(x,t) + \tau \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}. \tag{12}$$

Тогда из (5) и (6) соответственно получим

$$\chi \cdot \Delta P(x,t) = \frac{\partial P(x,t)}{\partial t}, \tag{13}$$

$$-\frac{\kappa}{\mu} \cdot \operatorname{grad}_x P(x,t) = \mathbf{W}(x,t) + \tau \cdot \frac{\partial \mathbf{W}(x,t)}{\partial t}. \tag{14}$$

Начальное и граничное условия для уравнения (13). В силу (7) и (8) при $t = 0$ выполнено начальное условие

$$P(x,t) = p(x,t) + \tau \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = a(x) + \tau \cdot b(x), \quad t = 0. \tag{15}$$

Вычислим $\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = d(x,t)$. Тогда можно определить и граничное условие для $P(x,t)$:

$$P(x,t) = p(x,t) + \tau \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}$$

или

$$P(x,t) = c(x,t) + \tau \cdot d(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,\, T]. \tag{16}$$

Задачу (13), (15) и (16) решаем с помощью алгоритмов "блуждания по сферам"и "блуждания по рещеткам"методов Монте–Карло, а также вероятностно–разностным методом. [2], [3]. Пусть $\widetilde{P}(x,t)$ является решением задачи (13), (15) и (16). Это решение подставим в (12). Тогда из (12), (7) и (9) для определения давления $p(x,t)$ получим начально–граничную задачу

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \cdot p(x,t) = \frac{1}{\tau} \cdot \widetilde{P}(x,t), \tag{17}$$

$$p(x,t) = a(x), \quad t = 0, \tag{18}$$

$$p(x,t) = c(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,\, T]. \tag{19}$$

Решение задачи (17) – (18) имеет вид

$$p(x,t) = \left(\int\limits_0^t \frac{\widetilde{P}(x,y) \cdot \exp\big(y/\tau\big)}{\tau} dy + a(x) \right) \cdot \exp\big(-t/\tau\big), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,\, T]. \tag{20}$$

На границе $\partial\Omega$ области Ω выполнено условие (19).

Для определения вектор скорости фильтрации $\mathbf{W}(x,t)$ вычислим $\mathrm{grad}_x\, \widetilde{P}(x,t) \equiv \widetilde{P}_x(x,t)$ и подставим в (14). Присоединим начальное и граничное условия (10) и (11) соответственно. В результате получим задачу для определения $\mathbf{W}(x,t)$

$$\tau \cdot \frac{\partial \mathbf{W}(x,t)}{\partial t} + \mathbf{W}(x,t) = -\frac{\kappa}{\mu} \cdot \widetilde{P}_x(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,\, T], \tag{21}$$

$$\mathbf{W}(x,t) = \mathbf{W}^0(x), \quad t = 0, \tag{22}$$

$$\mathbf{W}(x,t) = \mathbf{W}_0(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,\, T]. \tag{23}$$

Решение задачи (21) – (22) имеет вид

$$\mathbf{W}(x,t) = \left(\int\limits_0^t \frac{\kappa \cdot \widetilde{P}_x(x,y) \cdot \exp\big(y/\tau\big)}{\tau \cdot \mu} dy + \mathbf{W}^0(x) \right) \cdot \exp\big(-t/\tau\big), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,\, T]. \tag{24}$$

На границе $\partial\Omega$ области Ω выполнено условие (23).

Замечание. Можно решить указанным методом не только граничную задачу Дирихле для давления и вектора скорости фильтрации, но и задачу Неймана, и смешанную задачу. Решения этих задач также оцениваются с помощью алгоритмов "блуждания по сферам"и "блуждания по решеткам"методов Монте–Карло и вероятностно–разностным методом. [4].

Список литературы

[1] Молокович Ю.М., Осипов П.П. Основы теории релаксационной фильтрации. Казань: Издательство Казанского университета, 1987. 106 с.

[2] Shakenov K. Solution of problem for one model of relaxational filtration by probability–difference and Monte Carlo methods // Polish Academy of Sciences. Committee of Mining. Archives of Mining Sciences. Vol. 52, N 2. P. 247–255.

[3] Shakenov K.K. Solution of one mixed problem for equation of relaxational filtration by Monte Carlo methods// Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Vol. 93, Advances in High Performance Computing and Computational Sciences. Springer. Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 2006. P. 205–210.

[4] Шакенов К.К., Исабекова Н.А. Решение задач для модели релаксационной фильтрации, протекающей по линейному закону Дарси методами Монте–Карло и вероятностно–разностными методами // Вестник КазНУ. 2007. № 1 (52). С.81–95.