

# МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОД ОЗЕРА БАЙКАЛ

Е.А.Цветова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

## MODELING OF NONLINEAR INSTABILITY MECHANISMS OF LAKE BAIKAL WATERS

E.A.Tsvetova

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SD RAS, Novosibirsk

*A numerical model of Lake Baikal hydrodynamics and some results of scenarios simulating mechanisms of nonlinear instability due to the anomalies of fresh water density are considered. Free surface and Boussinesq approximations are used in the nonhydrostatic model.*

### Введение

В самом глубоком в мире пресноводном озере Байкал, имеющем среднюю глубину около 700 м и максимальную – более 1600 м, реализуется несколько специфических физических механизмов, которые обеспечивают сохранение уникальных характеристик вод этого природного объекта.

В настоящем докладе обсуждаются математические модели и результаты расчетов, воспроизводящие механизмы нелинейной неустойчивости, связанные с необычным свойством пресной воды. При нормальном атмосферном давлении и температуре выше точки замерзания ( $\sim 4^\circ\text{C}$ ), плотность воды достигает максимальных значений и уменьшается как при дальнейшем нагревании, так и при охлаждении. С увеличением глубины (давления), температура максимальной плотности (тмп) не остается постоянной, а уменьшается со скоростью  $0.21^\circ\text{C}/100\text{м}$ . Эта аномалия приводит к двум механизмам неустойчивости. При изобарическом перемешивании двух объемов воды, имеющих температуры выше и ниже тмп, реализуется эффект уплотнения при смешении вод. В результате образуется более тяжелая вода, которая начинает опускаться. Второй механизм запускает термобарическую неустойчивость, которая является следствием свойства различной сжимаемости пресной воды в окрестности тпм.

### Математическая модель

Для моделирования гидродинамических процессов в озере используется математическая модель в негидростатическом приближении со свободной поверхностью в приближении Буссинеска

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} + 2\Omega_y w - 2\Omega_z v &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + D(u), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} + \frac{\partial wv}{\partial z} - 2\Omega_x w + 2\Omega_z u &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + D(v), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial ww}{\partial z} + 2\Omega_x v - 2\Omega_y u &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} + D(w) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u\varphi}{\partial x} + \frac{\partial v\varphi}{\partial y} + \frac{\partial w\varphi}{\partial z} &= D_T(\varphi), \\ \rho &= f(p, T, S), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

Здесь  $u, v, w$  - компоненты вектора скорости в направлениях  $x, y, z$ , соответственно, ось  $x$  направлена на восток,  $y$  - на север,  $z$  - положительна вверх,  $\varphi$  - одна из скалярных функций, представляющих температуру, соленость, концентрации примесей,  $\rho$  - плотность,  $\rho_0$  - некоторое её равновесное значение.

Плотность рассчитывается по нелинейному уравнению состояния, принятому UNESCO: учитывается изменение плотности в зависимости от температуры, давления и солёности. Операторы горизонтального и вертикального турбулентного обмена записаны в виде

$$D(\varphi) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mu_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi.$$

Процессы вертикального турбулентного обмена либо параметризуются, либо рассчитываются по « $e - \varepsilon$ » модели. Для параметризации горизонтального обмена используется формула Смагоринского.

Краевые условия по вертикали ставятся на поверхности при  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x / \rho_0; \nu \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y / \rho_0; \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = Q / \rho_0 c_p; \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} = 0. \\ w = \frac{d\xi}{dt}, \quad p = p_a; \end{aligned}$$

и на дне при  $z = -H(x, y)$ :

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0.$$

Приток тепла на поверхности водоема  $Q$  рассчитывается через тепловой баланс на границе раздела вода-воздух по атмосферным и водным данным. Солнечная радиация равными долями участвует как в балансе тепла на поверхности, так и поглощается в водной толще с ослаблением по экспоненциальному закону.

На боковых границах:  $u = 0, v = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0$ .

В местах впадения рек:  $u = u_r, v = v_r, \frac{\partial \varphi}{\partial N} = U_r (\varphi - (\varphi)_r) / \rho$ .

В истоке Ангары:  $u = u_r, v = v_r, \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0$ .

Производная по конормали имеет вид  $\frac{\partial}{\partial N} = \mu_x \cos(\mathbf{n}, x) \frac{\partial}{\partial x} + \mu_y \cos(\mathbf{n}, y) \frac{\partial}{\partial y} + \nu \cos(\mathbf{n}, z) \frac{\partial}{\partial z}$ .

### Основные алгоритмы

Большинство проблем при моделировании физических процессов в природных объектах возникает из-за существенной разницы в их горизонтальных и вертикальных масштабах. Так, при моделировании общей циркуляции озера Байкал приходится учитывать тот факт, что масштабы различаются примерно в 600 раз. Наблюдения показывают, что на протяжении всего года температура в Байкале ниже глубин 250-300 м изменяется в пределах всего  $0.3^\circ\text{C} - 0.4^\circ\text{C}$ . Поэтому большое значение имеют согласованное описание горизонтальных и вертикальных операторов в моделях и обеспечение достаточной точности вычислений. Особое внимание требуется расчетам вертикальной компоненты вектора скорости, которая на несколько порядков отличается от его горизонтальных составляющих.

Для построения согласованных аппроксимаций используется вариационный подход [1,2], при котором конечно-разностные аппроксимации строятся, исходя из условий

стационарности обобщенного функционала - интегрального тождества, которое включает все уравнения модели, краевые и начальные условия. Для дискретизации этого функционала используется метод конечных объемов, который реализуется в рамках схем расщепления по физическим процессам и по независимым переменным.

В задачах конвекции – диффузии требуется обеспечить сохранение баланса массы, импульса, количества тепла и примесей. Численные схемы, кроме выполнения соотношений баланса, должны обладать свойствами монотонности, транспортности, устойчивости. Этими свойствами обладают схемы, построенные с помощью вариационного принципа и метода конечных объемов с использованием фундаментальных аналитических решений специальным образом определенных локальных сопряженных задач [3].

Для обеспечения точности вычислений при расчетах производных и интегралов используются также аппроксимации сглаживающими сплайнами четвертого порядка точности, построенные с использованием вариационной оптимизации со слабыми ограничениями.

Далее приведены некоторые результаты численных экспериментов при различных сочетаниях параметров, участвующих в моделях. В частности, анализируются сценарии моделирования естественной и вынужденной конвекции, с которыми связывают процессы обновления поверхностных и глубинных вод.

При моделировании поведения объекта на длительный период всегда возникает вопрос о задании внешних воздействий, в частности, полей ветра. В данном случае используется подход, согласно которому по известным данным составляется сценарий изменяющихся в пространстве и времени атмосферных воздействий. Поскольку эти данные являются обобщением наблюдений за длительный срок, то такой сценарий мы условно считаем «климатическим». В наших расчетах используются данные из [4] о типизированных полях ветра над Байкалом и их режимных характеристиках. На их основе формируются детерминированно-стохастические сценарии в которых режимы чередования и продолжительности действия типовых ветровых полей генерируются по методу Монте-Карло [5].

### **Термобар**

Дважды в год, весной и осенью, в Байкале, как и в других пресноводных водоемах средних широт, происходят процессы естественной конвекции, которая является следствием нагревания или охлаждения поверхности воды. Критической точкой для этих процессов служит значение температуры воды на поверхности около  $4^{\circ}\text{C}$ , прохождение которой означает установление устойчивой стратификации и прекращение перемешивания.

На рис.1-2 представлены результаты сценарных расчетов по моделированию распространения весеннего термобара – температурного фронта, разделяющего водные массы, имеющие «зимнее» и «летнее» распределения. На этих рисунках даны фрагменты, показывающие вертикальные сечения полей течений (стрелки) и температуры (изолинии) через пролив Ольхонские ворота в Среднем Байкале. С течением времени при нагревании поверхности происходит постепенное продвижение фронта, формируется устойчивая стратификация и появляется термоклин вблизи поверхности в Малом море, в то время как с другой стороны фронта еще идет конвекция и происходит опускание вод вдоль берегового склона.

### **Обновление глубинных вод**

В отличие от мелких водоемов средних широт, которые полностью перемешиваются дважды в год за счет естественной конвекции, озеро Байкал за время полного годового температурного цикла перемешивается лишь частично. Причиной тому служит изменение температуры максимальной плотности с глубиной: она уменьшается со скоростью  $0,21^{\circ}\text{C}/100\text{м}$ . В результате естественная конвекция, пример моделирования которой приведен выше, ограничивается поверхностным слоем толщиной приблизительно 250 м.

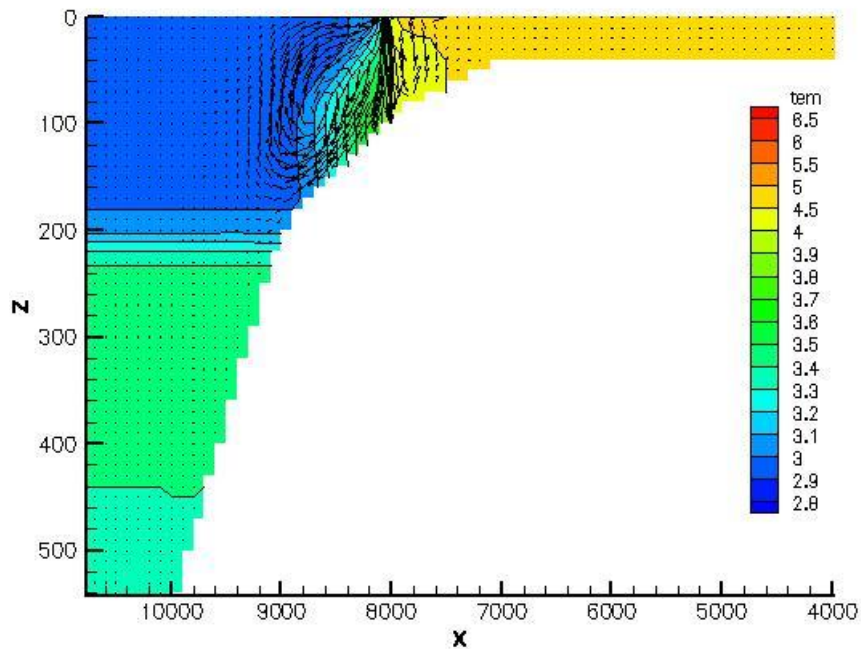


Рис.1. Фрагмент сценария по моделированию термобара.

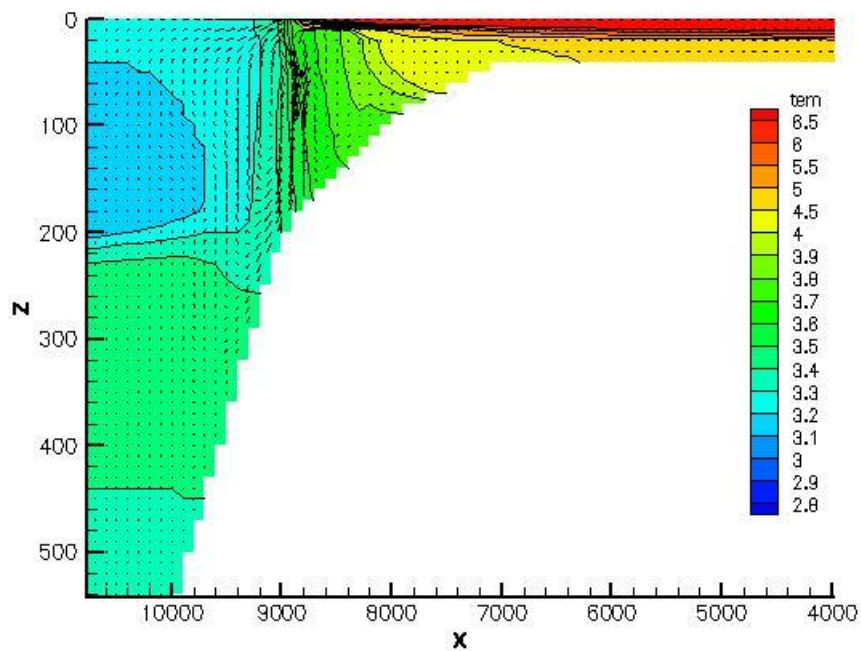


Рис.2. То же, что и на рис 1, но на 10 дней позже.

Остальная водная масса обновляется лишь спорадически при возникновении термобарической неустойчивости, за счет формирования так называемых «плюмов», которые доставляют в глубокие слои водные массы, обогащенные кислородом и другими веществами, поступающими через поверхность озера. Потенциальная возможность возникновения глубокой конвекции имеется в тех случаях, когда температура поверхностных вод меньше температуры глубинных вод. Термобарическая неустойчивость возникает по причинам динамического характера. «Запуск» вынужденной конвекции происходит в том случае, когда относительно холодная водная масса, погружаясь, пересекает так называемую «компенсационную» глубину, которая определяется как глубина, на которой текущая температура равна температуре максимальной плотности для данной глубины.

Пройдя компенсационную глубину, эта холодная масса может погружаться либо до дна, либо до глубины, где она встретит водную массу с такой же температурой.

На рис. 3,4 приведены результаты моделирования таких процессов.

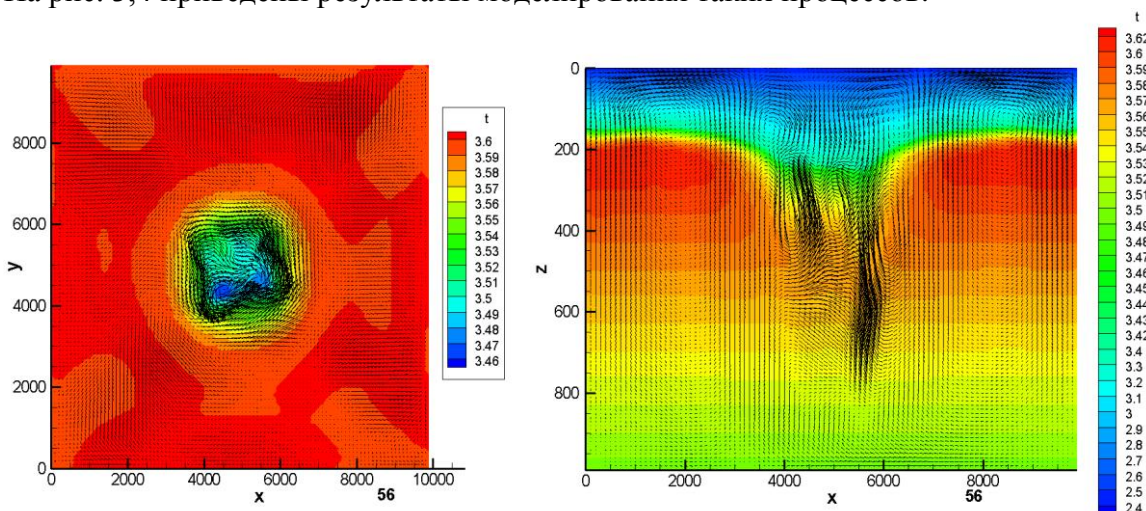


Рис.3. Фрагмент сценария по моделированию глубокой конвекции: (слева) горизонтальное сечение на глубине 300 м, (справа) вертикальное сечение по середине области

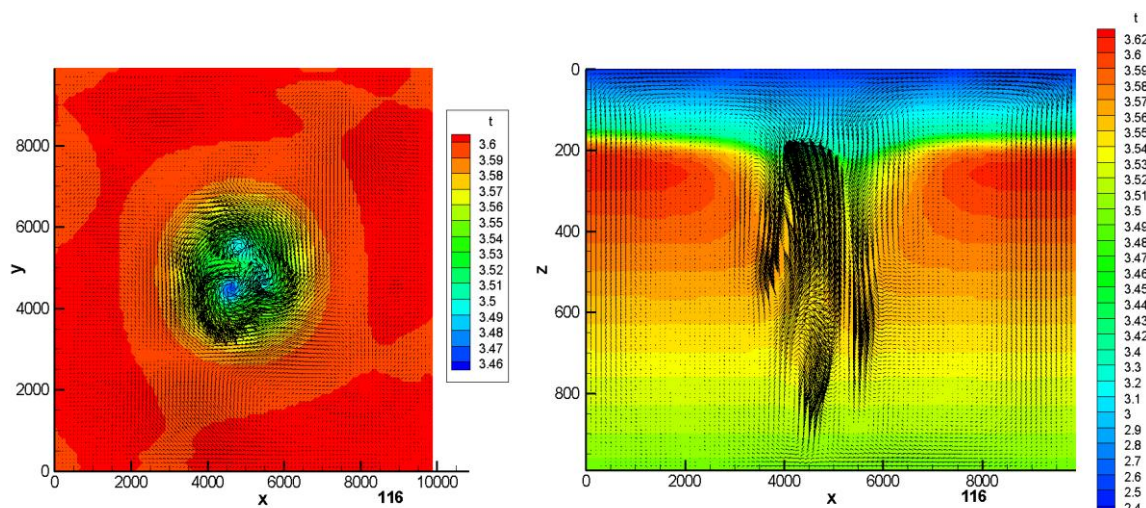


Рис.4. То же , что и на рис. 3, но через 30 часов

Работа поддержана Программами фундаментальных исследований №№ 4и 20 Президиума РАН и №3 Отделения математических наук РАН.

### Список литературы

1. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
2. Tsvetova E.A. Mathematical modeling of Lake Baikal hydrodynamics. //Hydrobiologia, 1999. V.407, P. 37-43.
3. Penenko V., E. Tsvetova. Discrete-analytical methods for the implementation of variational principles in environmental applications// Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. V.226. P. 319-330
4. Атлас волнения и ветра озера Байкал. 1977. Л.: Гидрометеиздат.
5. Цветова Е.А. О параметризации атмосферных воздействий в задачах численного моделирования динамики моря// Метеорология и гидрология. 1979, №2, с.105-108.