# Метод решения эволюционных задач использующий пошаговое преобразование Лагерра *

Г.В. Демидов, В.Н. Мартынов, Б.Г. Михайленко

17 марта 2011 г.

Для моделирования динамики сейсмических волн Б.Г. Михайленко (1998) [1] было использовано интегральное преобразование Лагерра по времени. Искомое решение $u(t)$ ищется в виде

$$u(t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+\alpha)!} l_m^\alpha(ht) u_m, 0 < t < \infty \tag{1}$$

где коэффициенты $u_m$ вычисляются по формуле

$$u_m = \int_0^\infty u(t)(ht)^{\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) dt \tag{2}$$

Функции Лагерра $l_m^\alpha(t)$ выражаются через многочлены Лагерра $L_m^\alpha(t)$

$$l_m^\alpha(t) = t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t}{2}} L_m^\alpha(t) \tag{3}$$

Обзор дальнейшего использования этого метода дан в докторской диссертации Г.В. Решетовой [2].

Поскольку у многочленов Лагерра $L_m^\alpha(t)$ (и следовательно функций $l_m^\alpha(t)$) нули расположены на интервале зависящем от $m$, то для хорошей аппроксимации $u(t)$ с ростом $t$ мы вынуждены в формуле (1) учитывать возрастание числа слагаемых. Чтобы этого избежать, мы предлагаем использовать приближение с помощью формулы (1) только для $t$ на конечном интервале $0 \le t \le \tau$. Полученное приближенное значение $u(\tau)$ использовать в качестве начального значения для интервала $\tau \le t \le 2\tau$ и т.д., т.е. некоторый аналог метода Эйлера численного интегрирования динамических задач.

Поскольку в (1) предполагалось, что $u(0) = 0$, так как при $\alpha > 0$ $l_m^\alpha(0) = 0$, а полученное значение $u(\tau)$ может оказаться не равным нулю, то для наших целей годится только случай $\alpha = 0$.

Начальное исследование предлагаемого алгоритма выполнено в работе [3].

## 1. Схема метода.

Рассмотрим задачу

$$\ddot{u}(t) + Au = F(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН (проект ИП-59) и программы Президиума РАН 2.2,

$$u(0) = u^0, \quad \dot{u}(t) = u^1 \tag{5}$$

Предполагаем, что A неотрицательный самосопряженный оператор. Преобразование Лагерра предполагает принадлежность функции $L_2(0, \infty)$.

В связи с этим введем вспомогательную функцию $v(t)$

$$v(t) = e^{-\mu t} u(t), \quad \mu > 0 \tag{6}$$

Задача (4),(5) преобразуется к виду:

$$\ddot{v}(t) + 2\mu\dot{v}(t) + (\mu^2 + A)v = f(t), \quad t > 0, \tag{7}$$

$$v(0) = v^0, \quad \dot{v}(t) = v^1 \tag{8}$$

$$f(t) = e^{-\mu t}F(t), \quad v^0 = u^0, \quad v^1 = -\mu u^0 + u^1 \tag{9}$$

Теперь мы используем преобразование Лагерра. Полагая

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n l_n(th) \tag{10}$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n l_n(th) \tag{11}$$

Для $v_n$ (проекций Лагерра функции $v(t)$ ) получим систему уравнений

$$\left[(\mu + \frac{h}{2})^2 + A\right] v_0 = (\frac{h^2}{2} + 2\mu h)v^0 + hv^1 + f_0, \tag{12}$$

$$\left[(\mu + \frac{h}{2})^2 + A\right] v_1 = -(h^2 + 2\mu h)v_0 +$$

$$(\frac{3}{2}h^2 + 2\mu h)v^0 + hv^1 + f_1, \tag{13}$$

$$\left[(\mu + \frac{h}{2})^2 + A\right](v_n - 2v_{n-1} + v_{n-2}) + 2\mu h(v_{n-1} - v_{n-2}) + h^2 v_{n-1} =$$

$$f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2 \tag{14}$$

Идея метода состоит в том что получаем приближенное значение

$$v(\tau) \approx \sum_{n=0}^{N} v_n l_n(\tau h) \tag{15}$$

и значения

$$u(\tau) = e^{\mu\tau} v(\tau), \quad \dot{u}(\tau) = \mu u(\tau) + e^{\mu\tau}\dot{v}(\tau) \tag{16}$$

выбираем в качестве начальных данных для решения задачи Коши для уравнения (4), при $t > \tau$.

В этом алгоритме есть четыре параметра : $h, \mu, N, \tau$. Возможный способ выбора этих параметров проиллюстрируем на простых численных экспериментах.

## 2. Выбор параметров.

Параметры метода будем выбирать с помощью тестовой функции

$$u(t) = e^{i\omega t}$$

Для функции

$$v(t) = u(t)e^{-\mu t} = e^{(i\omega-\mu)t}$$

проекции Лагерра имеют вид [3]

$$v_n = -bq^n \quad ,$$

где

$$b = \frac{h}{i\omega - \mu - \frac{h}{2}}, \quad q = \frac{i\omega - \mu + \frac{h}{2}}{i\omega - \mu - \frac{h}{2}}$$

Для погрешности справедлива оценка

$$\left| v(0) - \sum_{n=0}^{N} v_n \right| \le \left[ \frac{\omega^2 + (\frac{h}{2} - \mu)^2}{\omega^2 + (\frac{h}{2} + \mu)^2} \right]^{\frac{N+1}{2}} ,$$

$$\left| v(t) - \sum_{n=0}^{N} v_n l_n(ht) \right| \le C \left[ \frac{\omega^2 + (\frac{h}{2} - \mu)^2}{\omega^2 + (\frac{h}{2} + \mu)^2} \right]^{\frac{N+1}{2}} , \tag{17}$$

где

$$C = \frac{1}{2\mu} \left[ \sqrt{\omega^2 + (\frac{h}{2} + \mu)^2} + \sqrt{\omega^2 + (\frac{h}{2} - \mu)^2} \right] \tag{18}$$

Так как $u(t) = v(t)e^{\mu t}$, имеем

$$|\Delta u(t)| \le Ce^{\mu t} \left[ \frac{\omega^2 + (\frac{h}{2} - \mu)^2}{\omega^2 + (\frac{h}{2} + \mu)^2} \right]^{\frac{N+1}{2}}$$

Если выбрать $\mu = \frac{h}{2}$, то функция $v(t)$ будет иметь ту же асимптотику при больших $t$, что и функции Лагерра. Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(\omega, h, t) = e^{\frac{ht}{2}} \left[ \frac{\omega^2}{\omega^2 + h^2} \right]^{\frac{N+1}{2}} \tag{19}$$

Потребуем, чтобы

$$\varphi(\omega, h, t) \le 1$$

Для

$$t \leq \tau$$

Логарифмируя (19) при $t = \tau$, получим

$$\tau(h) = \frac{(N+1)}{h}\left[\ln(1+\left(\frac{h}{\omega}\right)^2)\right]$$

Обозначая $x = \frac{h}{\omega}$, имеем

$$\omega\tau(x) = \frac{(N+1)\ln(1+x^2)}{x}$$

Очевидно, что $\tau(x)$стремится к нулю при $x \to 0$ и $x \to \infty$. Максимум $\tau(x)$ (при заданных $\omega, N$) достигается при $x \approx 2$, т.е целесообразно выбрать $h = 2\omega$.

И, следовательно,

$$\tau = (N+1)\frac{\ln 5}{h} \tag{20}$$

Полагая, $|\Delta v(0)| = 10^{-14}$
Вычислим $(N+1)$

$$N+1 = \frac{28\ln 10}{\ln 5} \approx 41 \tag{21}$$

Итак, при вычислениях с двойной точностью

$$N+1 = 41, h = 2\omega, \mu = \omega, \tau = \frac{41\ln 5}{h} \tag{22}$$

## 3. Численные эксперименты.

Для того, чтобы проверить использование преобразования Лагерра и выбор параметров (22), рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x - x_0)f(t), \quad t > 0, \quad x, x_0 \in [0, a] \tag{23}$$

$$u(t,0) = u(t,a) = 0 \tag{24}$$

$$u(0,x) = \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0 \tag{25}$$

Применим преобразование Фурье по пространственной переменной

$$u(t,x) = \frac{2}{a}\sum_{m=1}^{M} u_m(t) Sin(\frac{m\pi x}{a}) \tag{26}$$

В результате преобразований исходная задача примет следующий вид

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - (\frac{m\pi}{a})^2 u_m = \frac{2}{a} Sin(\frac{m\pi x_0}{a}) f(t), \quad (m = 1, ..., M) \tag{27}$$

$$u_m(0) = 0, \quad \frac{\partial u_m(0)}{\partial t} = 0 \tag{28}$$

В источнике выбрана функция следующего вида:

$$f(t) = \begin{cases} Sin(\pi(t-1)) + 0.8Sin(2\pi(t-1)) + 0.2Sin(3\pi(t-1)), 0 \leq t \leq 2 \\ 0, \quad t > 2 \end{cases} \tag{29}$$

К данной задаче мы применили алгоритм (4)-(16). Результаты проведенных расчетов, при различных значениях параметров, и сравнение с точным решением приведены ниже, в таблице. Выбраны следующие значения

a = 20, $x_0$ = 10, M=300. Точное значение в точке x = 6 в указанные в таблице моменты времени равно 0.3395305453688 .

| № | Масштабный множитель | Количество проекций преобразования Лагерра | Шаг по времени ($\tau$) использованный в расчете | Длительность промежутка расчета (0,T) | Абсолютная ошибка амплитуды в момент T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | h=30$\pi$ | 41 | 0.2 | 17 | 4.7*$10^{-9}$ |
| 2 | h=30$\pi$ | 41 | 0.2 | 2017 | 9.0*$10^{-9}$ |
| 3 | h=30$\pi$ | 41 | 0.2 | 5265 | 3.9*$10^{-8}$ |
| 4 | h=30$\pi$ | 41 | 0.2 | 14945 | 7.4*$10^{-8}$ |
| 5 | h=30$\pi$ | 41 | 0.3 | 14945 | 7.37*$10^{-6}$ |
| 6 | h=30$\pi$ | 15 | 0.2 | 2017 | 1.7*$10^{-8}$ |
| 7 | h=30$\pi$ | 15 | 0.2 | 14945 | 8.6*$10^{-8}$ |

**Заключение**

Приведенные результаты расчетов показывают, что возможен выбор параметров, обеспечивающий высокую точность на больших интервалах времени.

**Список литературы**

[1] Mikhaylenko B. G. Forward seismic modelingby the spectral Lageuerre method,- In:66th Annual Internal. Mtg. Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, pp. 1784-1787, 1998.

[2] Решетова Г. В. Численное моделирование сейсмических и сейсмоакустических волновых полей в разномасштабных и резкоконтрастных средах,

Автореферат на соискание ученой степени доктора физико - математических наук, Новосибирск - 2010

[3] Демидов Г.В., Мартынов В.Н. Пошаговый метод решения эволюционных задач с использованием функций Лагерра // Сибирский журнал вычислительной математики. 2010, Том. 13, №4, стр. 413-422.