Назиров Ш.А.

ИНТЕРВАЛЬНО-ЗНАЧНЫЕ R-ФУНКЦИИ

Аннотация

Работа посвящена разработке метода вычисления значений интервально - значных R-функций и их производных требуемого порядка. Вывод формул вычисления интервально - значных R-функций и их производных требуемого порядка базируются на применении теории дифференциальных кортежей, которые определяются совокупностью значений функции и всех ее частных производных, вычисленных в некоторой точке, принадлежащей области определения функций.

Метод R-функции В.Л.Рвачева [1] применяется в решении многих научно-технических проблем, где необходимо учитывать и преобразовывать геометрическую информацию. Этот метод особенно широко применяется для решения краевых задач математической физики, выражающихся дифференциальными, интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями, при помощи которых описываются математические модели различных физических, технических, механических и т.д. процессов. Метод R-функций позволяет построить координатные последовательности, удовлетворяющие краевым условиям точно, без каких-либо аппроксимаций. Однако при решении систем дифференциальных (интегро-дифференциальных) уравнений в частных производных высокого порядка из-за плохой обусловленности матрицы (полная матрица больших порядков, составленная в результате дискретизации по пространственным переменным с применением метода R-функций) теряется точность приближенного решения. Кроме того, подобные потери точности возникают в случаях, когда исходные данные задачи не точные, приближенно вычисляются значения интегралов и погрешности методов решения разрешающих уравнений и т.д. Эти недостатки можно устранить при помощи интервального метода [2-4]. Отсюда следует необходимость разработки алгоритма сочетания метода R-функций и интервального метода для решения практических задач, которое будем называть интервально-значной R-функцией.

С этой целью сначала дадим основные понятия R-функций.

Функция $y = f(x_1,...,x_n)$ является R-функцией, если существует такая булева функция F, что выполняется равенство [1]

$$S_2[f(x_1,...,x_n)] = F(S_2(x_1),...,S_2(x_n)),$$

где $S_2(x)$ - предикат, который определяется на числовой оси следующим образом:

$$S_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{åñëè} \quad x < 0; \\ 1, & \text{åñëè} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

В дальнейшем , некоторые достаточно полные системы R –функций , для которых сопровождающей является система булевых функций ,состоящая из отрицания , конъюнкции, дизъюнкции будем обозначать через $\Re$ [1].

Существуют различные системы $\Re$.

1. Система $\Re_\alpha$

$$\neg\, \bar{x} = -x; \tag{1}$$

$$x \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha}(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}); \tag{2}$$

$$x \vee_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha}(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}), \tag{3}$$

где $\neg$ - операция логического отрицания, α - произвольная функция, удовлетворяющая условию $-1 < \alpha \le 1$. Выбор функции α может осуществляться из различных соображений, которые подробно изложены в работе [1].

2. Система $\Re_0^m$

$$\bar{x} \equiv -x; \tag{4}$$

$$x \wedge_0^m y \equiv (x + y - \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}; \tag{5}$$

$$x \vee_0^m y \equiv (x + y + \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}. \tag{6}$$

Отметим, что вместо x и y в (1)-(6) могут быть любые функции.

Теперь построим интервальные расширения формул (1)-(6), считая интервальные аналоги переменных x и y соответственно равными $[\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]$. Здесь $\underline{x}, \underline{y}$ и $\bar{x}, \bar{y}$ - соответственно нижние и верхние границы интервала [2-4].

Теорема. Пусть существуют интервальные расширения переменных x, y. Тогда интервально-значные системы $\Re_\alpha$ и $\Re_0^m$ имеют следующий вид:

для $\Re_\alpha$

$$\neg\, [\underline{x}, \bar{x}] = -[\underline{x}, \bar{x}],$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \wedge_\alpha [\underline{y}, \bar{y}] = \frac{1}{1+\alpha}\left[\underline{x} + \underline{y} - \max(P_{11}, P_{22}),\ \bar{x} + \bar{y} - \min(P_{11}, P_{22})\right],$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \vee_\alpha [\underline{y}, \bar{y}] = \frac{1}{1+\alpha}\left[\underline{x} + \underline{y} + \min(P_{11}, P_{22}),\ \bar{x} + \bar{y} + \max(P_{11}, P_{22})\right],$$

где $P_{11} = \sqrt{\underline{x}^2 + \underline{y}^2 - 2\alpha \max(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y})}$, $P_{22} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 2\alpha \min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y})}$;

для $\Re_0^m$

$$\neg\, [\underline{x}, \bar{x}] = -[\underline{x}, \bar{x}],$$

$$x \wedge_0^m y = \left[\min(T), \max(T)\right],$$

$$x \vee_0^m y = \left[\min(P), \max(P)\right],$$

где

$$T = \Bigg(\left(\underline{x} + \underline{y} - \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}\right)\left(\underline{x}^2 + \underline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}}, \left(\underline{x} + \underline{y} - \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}\right)\left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)^{\frac{m}{2}},$$

$$\left(\bar{x} + \bar{y} - \sqrt{\underline{x}^2 + \underline{y}^2}\right)\left(\underline{x}^2 + \underline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}}, \left(\bar{x} + \bar{y} - \sqrt{\underline{x}^2 + \underline{y}^2}\right)\left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)^{\frac{m}{2}}\Bigg),$$

$$P=\left(\left(\underline{x}+\underline{y}+\sqrt{\underline{x}^2+\underline{y}^2}\right)\left(\underline{x}^2+\underline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}},\left(\underline{x}+\underline{y}+\sqrt{\underline{x}^2+\underline{y}^2}\right)\left(\overline{x}^2+\overline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}},\right.$$

$$\left.\left(\overline{x}+\overline{y}+\sqrt{\overline{x}^2+\overline{y}^2}\right)\left(\underline{x}^2+\underline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}},\left(\overline{x}+\overline{y}+\sqrt{\overline{x}^2+\overline{y}^2}\right)\left(\overline{x}^2+\overline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}}\right).$$

Доказательство. Применяя операции сложения, умножения и вычитания интервальной арифметики, получим формулы для интервально-значных R-функций, приведенные в теореме. Например, докажем правильность формул для $x\wedge_0^m y$.

Итак, подставляя в (5) вместо x и y соответственно $[\underline{x},\overline{x}],[\underline{y},\overline{y}]$, получаем

$$\left[\underline{x},\overline{x}\right]\wedge_0^m\left[\underline{y},\overline{y}\right]=\left(\left[\underline{x},\overline{x}\right]+\left[\underline{y},\overline{y}\right]-\sqrt{\left[\underline{x}^2,\overline{x}^2\right]+\left[\underline{y}^2,\overline{y}^2\right]}\right)\left(\left[\underline{x}^2,\overline{x}^2\right]+\left[\underline{y}^2,\overline{y}^2\right]\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Далее, выполняя операцию суммирования, вычитания и возведения в степень, получаем следующую необходимую формулу:

$$\left[\underline{x},\overline{x}\right]\wedge_0^m\left[\underline{y},\overline{y}\right]=\left[\min\left(\left(\underline{x}+\underline{y}-\sqrt{\overline{x}^2+\overline{y}^2}\right)\left(\underline{x}^2+\underline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}},\left(\underline{x}+\underline{y}-\sqrt{\overline{x}^2+\overline{y}^2}\right)\left(\overline{x}^2+\overline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}},\right.\right.$$

$$\left.,\left(\overline{x}+\overline{y}-\sqrt{\underline{x}^2+\underline{y}^2}\right)\left(\underline{x}^2+\underline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}},\left(\overline{x}+\overline{y}-\sqrt{\underline{x}^2+\underline{y}^2}\right)\left(\overline{x}^2+\overline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}}\right),$$

$$\max\left(\left(\underline{x}+\underline{y}-\sqrt{\overline{x}^2+\overline{y}^2}\right)\left(\underline{x}^2+\underline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}},\left(\underline{x}+\underline{y}-\sqrt{\overline{x}^2+\overline{y}^2}\right)\left(\overline{x}^2+\overline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}},\right.$$

$$\left.\left.,\left(\overline{x}+\overline{y}-\sqrt{\underline{x}^2+\underline{y}^2}\right)\left(\underline{x}^2+\underline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}},\left(\overline{x}+\overline{y}-\sqrt{\underline{x}^2+\underline{y}^2}\right)\left(\overline{x}^2+\overline{y}^2\right)^{\frac{m}{2}}\right)\right].$$

Аналогичным путем можно доказать правильность и других формул.

Следствие. В $\Re_\alpha$ при $\alpha=0$ получаем систему $\Re_0$,т.е.

$\neg\,\overline{x}=-x$;

$x\wedge_0 y\equiv(x+y-\sqrt{x^2+y^2}),$

$x\vee_0 y\equiv(x+y+\sqrt{x^2+y^2}).$

Интервальное расширение системы $\Re_0$ имеет вид

$\neg\,[\underline{x},\overline{x}]=-[\underline{x},\overline{x}],$

$$x\wedge_0 y=\left[\underline{x}+\underline{y}-\sqrt{\overline{x}^2+\overline{y}^2},\overline{x}+\overline{y}-\sqrt{\underline{x}^2+\underline{y}^2}\right],$$

$$x\vee_0 y=\left[\underline{x}+\underline{y}+\sqrt{\underline{x}^2+\underline{y}^2},\overline{x}+\overline{y}+\sqrt{\overline{x}^2+\overline{y}^2}\right],$$

Далее, при решении краевых задач математической физики вариационными методами требуется вычислить производные от координатных функций, построенных при помощи метода R-функций. Аналитически вычислить значение этих производных практически невозможно из-за громоздкости выражений для производных. Особенно это проявляется в случае суперпозиции (сложение, вычитание, умножение, деление и т.д.) функций и операции над ними. Поэтому здесь применяется дифференциальный кортеж, который определяется совокупностью значений функции и всех ее частных производных, вычисленных в некоторой точке, принадлежащей области определения функции.

Здесь под дифференциальным кортежем функции $f(x) \in C^k$ понимается множество $d = d(f) = \bigcup\limits_{i=0}^{m} F_j(\alpha)$, элементом которого является значение функции и всех ее частных производных до m-го порядка включительно в некоторой точке $a \in \Re^n$, где m – порядок ,а n – размерность кортежа [5-6].

Например, кортеж функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ первого порядка в точке $(a_1, a_2, ..., a_n)$ - это множество

$$d = \left\{ f(a_1, a_2, ..., a_n), \frac{\partial}{\partial x_1} f(a_1, a_2, ..., a_n), \frac{\partial}{\partial x_2} f(a_1, a_2, ..., a_n), ..., \frac{\partial}{\partial x_n} f(a_1, a_2, ..., a_n) \right\}.$$

Пусть заданы $u(x,y) \in C^n(R^2), v(x,y) \in C^n(R^2)$ и их дифференциальные кортежи расположены в виде

$$\begin{aligned} &u(x,y);\ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};...;\frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y},..., \frac{\partial^n u}{\partial x \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n u}{\partial y^n};\\ &v(x,y);\ \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2};...;\frac{\partial^n v}{\partial x^n}, \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-1}\partial y},..., \frac{\partial^n v}{\partial x \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n v}{\partial y^n} \end{aligned} \qquad (7)$$

Интервальное аналогии этих дифференциальных картежей имеют вид

$$\begin{aligned} &[\underline{u}(x,y), \overline{u}(x,y)];\ \left[\underline{\frac{\partial u}{\partial x}}, \overline{\frac{\partial u}{\partial x}}\right], \left[\underline{\frac{\partial u}{\partial y}}, \overline{\frac{\partial u}{\partial y}}\right]; \left[\underline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\right], \left[\underline{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}, \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\right], \left[\underline{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}, \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\right];\\ &...;\left[\underline{\frac{\partial^n u}{\partial x^n}}, \overline{\frac{\partial^n u}{\partial x^n}}\right], \left[\underline{\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y}}, \overline{\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y}}\right],..., \left[\underline{\frac{\partial^n u}{\partial x \partial y^{n-1}}}, \overline{\frac{\partial^n u}{\partial x \partial y^{n-1}}}\right], \left[\underline{\frac{\partial^n u}{\partial y^n}}, \overline{\frac{\partial^n u}{\partial y^n}}\right]\\ &[\underline{v}(x,y), \overline{v}(x,y)];\ \left[\underline{\frac{\partial v}{\partial x}}, \overline{\frac{\partial v}{\partial x}}\right], \left[\underline{\frac{\partial v}{\partial y}}, \overline{\frac{\partial v}{\partial y}}\right]; \left[\underline{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}, \overline{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}\right], \left[\underline{\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}}, \overline{\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}}\right], \left[\underline{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}, \overline{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}\right];\\ &...;\left[\underline{\frac{\partial^n v}{\partial x^n}}, \overline{\frac{\partial^n v}{\partial x^n}}\right], \left[\underline{\frac{\partial^n v}{\partial x^{n-1}\partial y}}, \overline{\frac{\partial^n v}{\partial x^{n-1}\partial y}}\right],..., \left[\underline{\frac{\partial^n v}{\partial x \partial y^{n-1}}}, \overline{\frac{\partial^n v}{\partial x \partial y^{n-1}}}\right], \left[\underline{\frac{\partial^n v}{\partial y^n}}, \overline{\frac{\partial^n v}{\partial y^n}}\right] \end{aligned} \qquad (8)$$

Теорема. Пусть заданы непрерывные функции $u(x,y), v(x,y)$ и $u \in C^n(R^2),\ v \in C^n(R^2)$ и дифференциальные кортежи ,а интервальные расширения этих функций соответственно имеют вид (7) и (8). Тогда справедливы следующие формулы

$$1.\ z = [\underline{u}, \overline{u}] + [\underline{v}, \overline{v}], \frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^\ell} = \left[\underline{\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^\ell}} + \underline{\frac{\partial^n v}{\partial x^k \partial y^\ell}}, \overline{\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^\ell}} + \overline{\frac{\partial^n v}{\partial x^k \partial y^\ell}} \right] \qquad (10)$$

$$2.\ z = [\underline{u}, \overline{u}] - [\underline{v}, \overline{v}], \frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^\ell} = \left[\underline{\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^\ell}} - \overline{\frac{\partial^n v}{\partial x^k \partial y^\ell}}, \overline{\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^\ell}} - \underline{\frac{\partial^n v}{\partial x^k \partial y^\ell}} \right] \qquad (11)$$

$$3.\ z = -[\underline{u}, \overline{u}] = [-\overline{u}, \underline{u}], \frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^\ell} = -\left[\underline{\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^\ell}}, \overline{\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^\ell}} \right] = \left[-\overline{\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^\ell}}, -\underline{\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^\ell}} \right] \qquad (12)$$

$$4.\ z=[\underline{u},\overline{u}][\underline{v},\overline{v}],\ \frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^\ell}=\left[\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{\ell}C_k^i C_\ell^j \min(\rho_1),\ \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{\ell}C_k^i C_\ell^j \max(\rho_1)\right] \tag{13}$$

где

$$\rho_1=\left\{\underline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\,\underline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{\ell-i}\partial y^{k-j}}},\ \underline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\,\overline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{\ell-i}\partial y^{k-j}}},\ \overline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\,\underline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{\ell-i}\partial y^{k-j}}},\ \overline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\,\overline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{\ell-i}\partial y^{k-j}}}\right\}$$

$$5.\ z=\frac{[\underline{u},\overline{u}]}{[\underline{v},\overline{v}]},\ \frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^\ell}=\left[\underline{\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^\ell}}-\sum_{0\le i+j<n}C_k^i C_\ell^j \max(\rho_2),\ \overline{\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^\ell}}-\sum_{0\le i+j<n}C_k^i C_\ell^j \min(\rho_2)\right]\left[\frac{1}{\overline{v}},\frac{1}{\underline{v}}\right] \tag{14}$$

$$\rho_2=\left\{\underline{\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i \partial y^j}}\,\underline{\frac{\partial^{n-i-j}u}{\partial x^{k-i}\partial y^{\ell-j}}},\ \underline{\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i \partial y^j}}\,\overline{\frac{\partial^{n-i-j}u}{\partial x^{k-i}\partial y^{\ell-j}}},\ \overline{\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i \partial y^j}}\,\underline{\frac{\partial^{n-i-j}u}{\partial x^{k-i}\partial y^{\ell-j}}},\ \overline{\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i \partial y^j}}\,\overline{\frac{\partial^{n-i-j}u}{\partial x^{k-i}\partial y^{\ell-j}}}\right\}$$

$$6.\ z=\frac{1}{[\underline{u},\overline{u}]},\ \frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^\ell}=-\left[\sum_{0\le i+j<n}C_k^i C_\ell^j \min(\rho_2),\ \overline{\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^\ell}}-\sum_{0\le i+j<n}C_k^i C_\ell^j \min(\rho_2)\right]\left[\frac{1}{\overline{u}},\frac{1}{\underline{u}}\right] \tag{15}$$

Доказательство. Доказательство формул (10) – (12) очевидны. Для того, чтобы показать справедливость (13)-(15)определим их обычные дифференциальные кортежи [5].

$$\frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^\ell}(uv)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{\ell}C_k^i C_\ell^j\ \frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^k \partial y^\ell}\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{k-i}\partial y^{\ell-j}} \tag{16}$$

$$f=\frac{u}{v},\ \frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^\ell}(f)=\frac{1}{u}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^\ell}-\sum_{0\le i+j<n}C_k^i C_\ell^j\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^k \partial y^\ell}\frac{\partial^{n-i-j}u}{\partial x^{k-i}\partial y^{\ell-j}}\right) \tag{17}$$

$$f=\frac{1}{u},\ \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^\ell}=\left(-\sum_{0\le i+j<n}C_k^i C_\ell^j\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^k \partial y^\ell}\frac{\partial^{n-i-j}u}{\partial x^{k-i}\partial y^{\ell-j}}\right)/u \tag{18}$$

Подставляя в (16) интервальные расширения функций u и v, определяемые в виде $\left[\underline{u},\overline{u}\right]$, $\left[\underline{v},\overline{v}\right]$,имеем

$$\begin{aligned} z&=\frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^\ell}(uv)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{\ell}C_k^i C_\ell^j\ \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}\left[\underline{u},\overline{u}\right]\frac{\partial^{n-i-j}\left[\underline{v},\overline{v}\right]}{\partial x^{k-i}\partial y^{\ell-j}}=\\ &=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{\ell}C_k^i C_\ell^j\left[\underline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}},\overline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\right]\left[\underline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{k-i}\partial y^{\ell-j}}},\overline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{k-i}\partial y^{\ell-j}}}\right]\end{aligned} \tag{19}$$

Согласно правилу умножении интервалов имеем

$$\begin{aligned}&\left[\underline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}},\overline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\right]\left[\underline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{k-i}\partial y^{\ell-j}}},\overline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{k-i}\partial y^{\ell-j}}}\right]=\\ &=\left[\min\left(\underline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\,\underline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{\ell-i}\partial y^{k-j}}},\underline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\,\overline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{\ell-i}\partial y^{k-j}}},\overline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\,\underline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{\ell-i}\partial y^{k-j}}},\overline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\,\overline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{\ell-i}\partial y^{k-j}}}\right),\right.\\ &\left.\max\left(\underline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\,\underline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{\ell-i}\partial y^{k-j}}},\underline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\,\overline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{\ell-i}\partial y^{k-j}}},\overline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\,\underline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{\ell-i}\partial y^{k-j}}},\overline{\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}}\,\overline{\frac{\partial^{n-i-j}v}{\partial x^{\ell-i}\partial y^{k-j}}}\right)\right]\end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя (20) в (16), получаем формулу (12).

Аналогичным путем доказываются и справедливость формулы (13)-(14), с использованием формул (17)и (18) .

В настоящее время для всех элементарных (степенных, показательных, тригонометрических и гиперболических, обратных тригонометрических и гиперболических) функций от двух переменных построены интервально - значные дифференциальные кортежи и разработаны программные средства, реализующие их. При этом правильность полученных формул строго доказана.

Литература

1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 552 с.
2. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск: Изда-
3. тельство «XYZ» Институтата вычислительных технологий, 2009. – 580 с.
4. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. – 223 с.
5. http://www.nsc.ru/interval.
6. Рвачев В.Л., Шевченко А.Н. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов.- Киев: Техника, 1988. – 197 с.
7. Назиров Ш.А. Конструктивные определения алгоритмических средств для решения трехмерных задач математической физики в областях со сложной конфигурацией / Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб.Науч.тр. - Ташкент, Имит АН РУз 2009.- Вып. 121. – С. 15-43.