Об обобщенных функционально-инвариантных решениях одного уравнения двумерной акустики*

Ю.В. Шанько
Институт вычислительного моделирования СО РАН
e-mail: shy70@mail.ru

Рассмотрено семейство дифференциальных уравнений распространения звука в двумерной неподвижной неоднородной среде. Для уравнений данного семейства ищутся обобщенные функционально-инвариантные (ОФИ) решения, которые задают так называемые семейства относительно неискажающихся бегущих волн. Для поиска ОФИ решений необходимо исследовать на совместность некоторую переопределенную систему дифференциальных уравнений для функций зависящих от трех переменных (времени и двух пространственных координат). В работе предложен подход, позволяющий свести эту систему к переопределенной системе, для функций уже от двух независимых переменных, что значительно упрощает ее анализ. Приведен пример точного ОФИ решения.

Введение

Рассмотрим двумерное уравнение распространения звука в неподвижной неоднородной среде [1]:

$$\frac{p_{tt}}{\rho c^2} = \left(\frac{p_x}{\rho}\right)_x + \left(\frac{p_y}{\rho}\right)_y, \tag{1}$$

где $\rho = \rho(x, y) > 0$, $c = c(x, y) > 0$ — заданные функции.

Будем искать функции $u = u(t, x, y)$, $q = q(t, x, y)$ такие, что

$$p = u\Psi(q) \tag{2}$$

будет решением уравнения (1) при всех (достаточно гладких) функциях Ψ. Соответствующие решения называют обобщенными функционально-инвариантными (ОФИ) [2]. ОФИ решения задают так называемые семейства относительно неискажающихся бегущих волн [3].

В докладе приведены следующие результаты. Выписаны необходимые условия существования ОФИ решений. Эти условия представляют из себя переопределенную систему дифференциальных уравнений на функции, которые зависят от трех независимых переменных. Полученную систему удается переписать в таком виде, что одна из переменных перестает входить в явном виде в уравнения, что значительно облегчает ее дальнейший анализ.

Оставшаяся часть доклада посвящена решениям, которые можно представить в виде

$$p = u_1\Phi_1(q) + u_2\Phi_2(q), \tag{3}$$

с произвольными функциями Φ_1 и Φ_2 (нетрудно заметить, что любое решение удовлетворяющее этому условию является ОФИ решением). Изложена процедура генерации

*Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 103.

решений вида (3) вместе с уравнениями, которым они удовлетворяют. Выписаны условия на функции c и ρ необходимые и достаточные для существования решений вида (3).

Необходимые условия существования ОФИ решений

Подставим представление (2) в уравнение (1). Приравнивая нулю коэффициенты при Ψ'', Ψ', Ψ получим переопределенную систему на функции u и q:

$$\begin{aligned}
\frac{q_t^2}{c^2} &= q_x^2+q_y^2,\\
\frac{u_{tt}}{\rho c^2} &= \left(\frac{u_x}{\rho}\right)_x+\left(\frac{u_y}{\rho}\right)_y,\\
\frac{u_tq_t+(uq_t)_t}{\rho c^2} &= \frac{u_xq_x}{\rho}+\left(\frac{uq_x}{\rho}\right)_x+\frac{u_yq_y}{\rho}+\left(\frac{uq_y}{\rho}\right)_y.
\end{aligned}\tag{4}$$

Сделаем в (4) замену $u=vq_t$:

$$\begin{aligned}
q_t^2 &= c^2(q_x^2+q_y^2),\\
2v_tq_t+vq_{tt} &= c^2(2v_xq_x+2v_yq_y+v\Delta q-\rho_x\rho^{-1}vq_x-\rho_y\rho^{-1}vq_y),\\
v_{tt}q_t+v_tq_t &= c^2(2v_{xt}q_x+2v_{yt}q_y+v_t\Delta q-q_t\Delta v-\rho_x\rho^{-1}(v_tq_x-v_xq_t)-\rho_y\rho^{-1}(v_tq_y-v_yq_t)).
\end{aligned}\tag{5}$$

где $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Перепишем систему (5), выбрав в качестве независимых переменных x, y и q, а в качестве неизвестных функций $t=\Phi(x,y,q)$ и $v=v(x,y,q)$:

$$\begin{aligned}
\Phi_x^2+\Phi_y^2 &= c^{-2},\\
2(\Phi_xv_x+\Phi_yv_y)+(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}-\rho_x\rho^{-1}\Phi_x-\rho_y\rho^{-1}\Phi_y)v &= 0,\\
v_{xx}+v_{yy}-\rho_x\rho^{-1}v_x-\rho_y\rho^{-1}v_x &= 0.
\end{aligned}\tag{6}$$

Пусть $v=\rho^{1/2}w$, тогда система (6) запишется в следующей форме:

$$\Phi_x^2+\Phi_y^2=h,\tag{7a}$$

$$2(\Phi_xw_x+\Phi_yw_y)+(\Phi_{xx}+\Phi_{yy})w=0,\tag{7b}$$

$$w_{xx}+w_{yy}-fw=0,\tag{7c}$$

где $f=\dfrac{\Delta(\rho^{-1/2})}{\rho^{-1/2}}=\dfrac{3}{4}\rho^{-2}(\rho_x^2+\rho_y^2)-\dfrac{1}{2}\rho^{-1}(\rho_{xx}+\rho_{yy})$, $h=c^{-2}$.

Система (7) уже не содержит ни саму переменную q, ни производных взятых по этой переменной. Поэтому в дальнейшем мы будем оперировать с этой системой, как с системой с двумя независимыми переменными. Для того, чтобы мы имели возможность выполнить обратную замену и выразить q через t, x и y, следует искать только такие решения, в которых Φ зависит по меньшей мере от одной константы (т.е. по меньшей мере от одной произвольной функции, если снова смотреть на (7) как на систему с тремя независимыми переменными). Нетрудно понять, что мы всегда можем «заработать» эту константу прибавив к Φ произвольное число.

Способ построения решений вида (3)

Запишем условие совместности (7b) и (7c), как уравнений относительно w:

$$4(w_xT_x + w_yT_y) + w(2(\Phi_xF_x + \Phi_yF_y) + \Delta T + 4T(\Phi_xT_x + \Phi_yT_y) + (4F + T^2)\Delta\Phi) = 0, \quad (8)$$

где $F = \dfrac{f}{\Phi_x^2 + \Phi_y^2} = \dfrac{f}{h}$, $T = \dfrac{\Delta\Phi}{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}$.

Потребуем теперь, чтобы ОФИ решения имели вид (3). Тогда, уравнение (8), как уравнение относительно w, должно быть следствием уравнения (7b), для того чтобы, при заданных Φ и f, функция w находилась из системы (7) с произволом в две константы (точнее говоря, в две функции от «скрытой переменной» q). Это требование дает два уравнения:

$$\Phi_xT_y - \Phi_yT_x = 0, \quad (9a)$$

$$2(\Phi_xF_x + \Phi_yF_y) + \Delta T + 4T(\Phi_xT_x + \Phi_yT_y) + (4F + T^2)\Delta\Phi = \frac{2T_x}{\Phi_x}\Delta\Phi. \quad (9b)$$

Интегрируя (9a), найдем

$$\Phi = \theta(\alpha), \quad (10)$$

где α гармоническая функция, т.е. удовлетворяет уравнению Лаплпса

$$\Delta\alpha = \alpha_{xx} + \alpha_{yy} = 0, \quad (11)$$

а функция θ — (достаточно гладкая) произвольная. В дальнейшем нам понадобится гармоническая функция $\beta = \beta(x, y)$ сопряженная с α:

$$\alpha_x = \beta_y, \quad \alpha_y = -\beta_x. \quad (12)$$

Подставив Φ из (10) в (7b), получим

$$2\theta'(\alpha_xw_x + \alpha_yw_y) + \theta''(\alpha_x^2 + \alpha_y^2)w = 0. \quad (13)$$

Решая (13) относительно w, найдем

$$w = \theta'^{-1/2}W(\beta), \quad (14)$$

где $W(\beta)$ — произвольная функция.

Подставив представление (14) в уравнение (7c), найдем, что функция W должна удовлетворять уравнению второго порядка:

$$(\alpha_x^2 + \alpha_y^2)\left(W'' + \left(-\frac{1}{2}\theta'^{-1}\theta''' + \frac{3}{4}\theta'^{-2}\theta''^2\right)W\right) - fW = 0. \quad (15)$$

Итак, рассмотрим способ построения ОФИ решений вида (3). Зададимся гармонической функцией α и функцией от нее $\theta(\alpha)$. Тогда из (10) мы знаем $\Phi = \theta(\alpha)$. Из (12) найдем

$$\beta = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (\alpha_x\,dy - \alpha_y\,dx). \quad (16)$$

Пусть $W = W_1(\beta)$ — одно из решений уравнения (15). Тогда второе линейно независимое решение ОДУ второго порядка с нулевым коэффициентом при первой производной можно получить по формуле

$$W_2 = W_1 \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\beta}{W_1^2}.$$

Общее решение (15)

$$W = C_1 W_1 + C_2 W_2.$$

Далее, из (14) находим $w = \theta'^{-1/2} W(\beta)$. С помощью (7a) вычислим $c = \dfrac{1}{\theta' \sqrt{(\alpha_x^2 + \alpha_y^2)}}$.

Из (15) находим f:

$$f = \left(\frac{W_1''}{W_1} + \left(-\frac{1}{2}\theta'^{-1}\theta''' + \frac{3}{4}\theta'^{-2}\theta''^2 \right) \right) (\alpha_x^2 + \alpha_y^2).$$

Для того чтобы, зная f, найти ρ, необходимо решить линейное относительно $\rho^{-1/2}$ уравнение

$$\Delta(\rho^{-1/2}) = f\rho^{-1/2}.$$

Общее решение данного уравнения можно получить не всегда, однако это уравнение гарантированно имеет частные решения вида $\rho^{-1/2} = w_0$, где w_0 — какое-либо частное решение уравнения (7c) (как уравнения от **двух**, а не трех переменных):

$$w_0 = \theta'^{-1/2}(C_1^0 W_1 + C_2^0 W_2),$$

откуда

$$\rho = \theta'(C_1^0 W_1 + C_2^0 W_2)^{-2}.$$

В этом случае $v = \rho^{1/2} w = \dfrac{w}{w_0}$. Как уже мыло сказано, если прибавление к $\Phi = \Phi(x, y)$ любой константы переводит решение в решение. Выберем в качестве такой «константы» q. Тогда $t = q + \Phi(x, y)$, откуда $q = t - \Phi(x, y)$. И, наконец, найдем $u = vq_t = v$.

Пример. Пусть гармоническая функция $\alpha = x$, тогда сопряженная функция $\beta = y$. Пусть $\Phi = \theta(\alpha) = \operatorname{arctg} \alpha = \operatorname{arctg} x$. Тогда $c = x^2 + 1$. Выберем в качестве $W_1 = y^3$, тогда $W_2 = y^{-2}$. Найдем

$$w = (x^2 + 1)^{1/2}(C_1(q)y^3 + C_2(q)y^{-2}).$$

Вычислим $f = 6y^{-2} + (x^2 + 1)^{-2}$. Возьмем в качестве частного решения уравнения

$$\Delta(\rho^{-1/2}) = (6y^{-2} + (x^2 + 1)^{-2})\rho^{-1/2}$$

функцию $w_0 = \rho^{-1/2} = (x^2 + 1)^{1/2} y^{-2}$, откуда $\rho = \dfrac{y^4}{x^2 + 1}$. И, наконец, найдем ОФИ решение

$$p = u = v = \frac{w}{w_0} = \frac{(x^2 + 1)^{1/2}(C_1(q)y^3 + C_2(q)y^{-2})}{(x^2 + 1)^{1/2} y^{-2}} = C_1(q)y^5 + C_2(q),$$

где $q = t - \Phi = t - \operatorname{arctg} x$, а C_1, C_2 — произвольные функции.

Необходимые и достаточные условия существования решений вида (3)

Запишем имеющиеся уравнения на Φ.

$$\Phi_x^2 + \Phi_y^2 = h, \tag{17a}$$

$$\Phi_x T_y - \Phi_y T_x = 0, \tag{17b}$$

$$2(\Phi_x F_x + \Phi_y F_y) + \Delta T + 4T(\Phi_x T_x + \Phi_y T_y) + (4F + T^2)\Delta\Phi = \frac{2T_x}{\Phi_x}\Delta\Phi. \tag{17c}$$

Как уже было сказано, уравнение (17b) эквивалентно тому, что Φ представимо в виде функции от гармонической функции α. Запишем это условие следующим образом

$$\alpha_y \Phi_x - \alpha_x \Phi_y = 0. \tag{18}$$

Исключая из (17a) и (18) Φ (это нетрудно сделать, выразив Φ_x и Φ_y из данных уравнений и перекрестно продифференцировав полученные соотношения) получим уравнение:

$$(\alpha_y^2 + \alpha_x^2)(\alpha_x h_y - \alpha_y h_x) + 2(\alpha_x\alpha_y\alpha_{xx} - \alpha_x^2\alpha_{xy} + \alpha_y^2\alpha_{xy} - \alpha_x\alpha_y\alpha_{yy})h = 0. \tag{19}$$

Условием совместности уравнений (11) и (19) является (Reduce):

$$H_y\alpha_x - H_x\alpha_y = 0, \tag{20}$$

где

$$H = \frac{\Delta(\ln h)}{h}.$$

Подставим ранее найденные Φ_x и Φ_y в (17c). После некоторых преобразований, с учетом уравнений (19), (11) и (20), результат можно записать в виде

$$(\alpha_x^2+\alpha_y^2)(\bar f_x\alpha_x+\bar f_y\alpha_y)+2\bar f[\alpha_y^2\alpha_{xx}-2\alpha_x\alpha_y\alpha_{xy}+\alpha_x^2\alpha_{yy}]+\frac{1}{8}h(\alpha_x^2+\alpha_y^2)(\alpha_x H_x+\alpha_y H_y) = 0, \tag{21}$$

где $\bar f = f + \frac{1}{8}hH$.

Случай $H \neq \mathrm{const}$**.** Условием совместности (11) и (20) будет аналог уравнения (9a):

$$H_x\left(\frac{H_{xx}+H_{yy}}{H_x^2+H_y^2}\right)_y - H_y\left(\frac{H_{xx}+H_{yy}}{H_x^2+H_y^2}\right)_x = 0. \tag{22}$$

Уравнение (19) (как уравнение относительно α) будет являться следствием уравнений (11) и (20) при выполнении следующего условия:

$$(H_y^2 + H_x^2)(H_x h_y - H_y h_x) + 2(H_x H_y H_{xx} - H_x^2 H_{xy} + H_y^2 H_{xy} - H_x H_y H_{yy})h = 0. \tag{23}$$

Из уравнений (10) и (20) следует, что

$$H_y\Phi_x - H_x\Phi_y = 0. \tag{24}$$

Выразив из (7a) и (24) Φ_x и Φ_y и подставив их в (9b), получим

$$(H_x^2 + H_y^2)(\bar f_x H_x + \bar f_y H_y) + 2(H_y^2 H_{xx} - 2H_x H_y H_{xy} + H_x^2 H_{yy})\bar f + \frac{1}{8}(H_x^2 + H_y^2)^2 h = 0. \tag{25}$$

Итак, уравнения (22), (23) и (25) дают (при $H \neq \mathrm{const}$) условия разрешимости системы (7), (9).

Случай $H = \mathrm{const}$**.** Запишем имеющиеся уравнения на α, это (11), (19), (21):

$$\alpha_{xx} + \alpha_{yy} = 0,$$

$$(\alpha_y^2 + \alpha_x^2)(\alpha_x h_y - \alpha_y h_x) + 2(\alpha_x\alpha_y\alpha_{xx} - \alpha_x^2\alpha_{xy} + \alpha_y^2\alpha_{xy} - \alpha_x\alpha_y\alpha_{yy})h = 0,$$
$$(\alpha_x^2 + \alpha_y^2)(\bar{f}_x\alpha_x + \bar{f}_y\alpha_y) + 2\bar{f}[\alpha_y^2\alpha_{xx} - 2\alpha_x\alpha_y\alpha_{xy} + \alpha_x^2\alpha_{yy}] = 0.$$

В последнем уравнении мы также учли, что $H = \mathrm{const}$.

Пусть, $\bar{f} = \hat{f}^{-2}$. Вновь перейдем от функции h к c (напомним, что $h = \mathrm{c}^{-2}$) Тогда, в частности, $H = -2(\mathrm{c}(\mathrm{c}_{xx} + \mathrm{c}_{yy}) - (\mathrm{c}_x^2 + \mathrm{c}_y^2))$. Предыдущая система перепишется так:

$$\alpha_{xx} + \alpha_{yy} = 0, \tag{26a}$$

$$\mathrm{c}(\alpha_x\alpha_y\alpha_{xx} - \alpha_x^2\alpha_{xy} + \alpha_y^2\alpha_{xy} - \alpha_x\alpha_y\alpha_{yy}) - (\alpha_y^2 + \alpha_x^2)(\alpha_x\mathrm{c}_y - \alpha_y\mathrm{c}_x) = 0, \tag{26b}$$

$$\hat{f}[\alpha_y^2\alpha_{xx} - 2\alpha_x\alpha_y\alpha_{xy} + \alpha_x^2\alpha_{yy}] - (\alpha_x^2 + \alpha_y^2)(\hat{f}_x\alpha_x + \hat{f}_y\alpha_y) = 0. \tag{26c}$$

Анализ на совместность системы (26) более сложен. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат. Рассмотрим матрицу

$$M = \begin{pmatrix} \hat{f}_{xx}\mathrm{c} - \hat{f}_x\mathrm{c}_x - \hat{f}_y\mathrm{c}_y + \hat{f}\mathrm{c}_{yy} & \hat{f}_{xy}\mathrm{c} - \hat{f}\mathrm{c}_{xy} \\ \hat{f}_{xy}\mathrm{c} - \hat{f}\mathrm{c}_{xy} & \hat{f}_{yy}\mathrm{c} - \hat{f}_x\mathrm{c}_x - \hat{f}_y\mathrm{c}_y + \hat{f}\mathrm{c}_{xx} \\ S_x & S_y \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где $S = \hat{f}\Delta\hat{f} - (\hat{f}_x^2 + \hat{f}_y^2)$. Для того, чтобы система (26) имела нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{rank} M < 2. \tag{28}$$

Итак, уравнения (27), (28) дают (при $H = \mathrm{const}$) условия разрешимости системы (7), (9).

Список литературы

[1] Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989.

[2] Еругин Н.В., Смирнов М.М. Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 5. С. 853–865.

[3] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.