

# Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье-Стокса \*

В.П. ШАПЕЕВ, В.И. ИСАЕВ

*Институт теоретической и прикладной механики*

*им. С.А. Христиановича СО РАН*

e-mail: vshapeev@ngs.ru

Предложен способ построения вариантов метода коллокаций и наименьших квадратов высокого порядка точности для численного решения уравнений Навье-Стокса. На его основе созданы варианты до восьмого порядка включительно. В численных экспериментах показано, что в случае достаточно гладкого решения они позволяют получать приближенные решения, сходящиеся к точному с высоким порядком на последовательности сеток при  $h \rightarrow 0$ , где  $h$  — максимальный линейный размер ячеек сетки. В расчетах эталонной задачи о течении в каверне с движущейся крышкой показано, что новые варианты обладают хорошими возможностями для численного моделирования течений вязкой жидкости.

## 1. Введение

Метод коллокаций успешно применялся различными исследователями для численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [1] и уравнений с частными производными [2, 3]. Суть метода заключается в следующем. Приближенное решение ищется в конечномерном линейном пространстве функций. Неизвестные коэффициенты его разложения по базису пространства определяются из уравнений коллокаций и краевых условий. Уравнения коллокаций — требования того, чтобы приближенное решение удовлетворяло уравнениям исходной дифференциальной задачи в конечном множестве точек области (точках коллокаций), в которой ставится эта задача. Краевые условия получаются из соответствующих условий рассматриваемой задачи, записанных в нескольких точках на границе области. В методе коллокаций записывается ровно столько уравнений, сколько имеется неизвестных. В методе коллокаций и наименьших квадратов (КНК) число уравнений превосходит количество неизвестных, то есть система, из которой ищутся неизвестные коэффициенты, является переопределенной. Для ее решения используется метод наименьших квадратов (МНК).

В [4] были созданы варианты метода КНК для численного решения эллиптических уравнений второго порядка. Приближенное решение ищется в них в пространстве кусочно-квадратичных функций на сетках с прямоугольными и треугольными ячейками. В [5–7] предложены и реализованы варианты метода для уравнений Стокса и Навье-Стокса. Они позволяют в случае достаточно гладкого решения строить приближенные решения, которые сходятся к точному со вторым порядком на последовательности сеток при  $h \rightarrow 0$ , где  $h$  — максимальный линейный размер ячеек сетки. В данной

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00575-а) и СО РАН (интеграционные проекты №11.5, 26 и комплексный интеграционный проект №140).

работе на основе результатов, полученных в [5–7], предложен способ построения вариантов метода КНК высокого порядка точности для уравнений Навье-Стокса. На его основе созданы новые варианты метода до восьмого порядка включительно. В численных экспериментах с аналитическим решением исследована сходимость приближенных решений, получаемых этими вариантами, на последовательности сеток. Для исследования возможностей новых вариантов метода КНК проведены расчеты задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне с движущейся крышкой, которая в настоящее время считается многими исследователями эталонной для численных методов решения уравнений Навье-Стокса [6–12].

## 2. Постановка задачи и описание метода

В области  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  рассмотрим краевую задачу для двумерных стационарных уравнений Навье-Стокса

$$v_1 \frac{\partial v_j}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_j}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta v_j = f_j, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_b, \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} p \, dx_1 dx_2 = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  — вектор скорости,  $p$  — давление. Вектор-функция  $\mathbf{v}_b$  задает краевые условия для  $\mathbf{v}$  на границе  $\partial\Omega$ ,  $f_1, f_2$  — известные правые части уравнений,  $\text{Re}$  — число Рейнольдса. Покроем область  $\Omega$  сеткой, которая состоит из  $N$  прямоугольных ячеек  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ . Пусть  $2h_{1i}, 2h_{2i}$  — размеры ячейки  $\Omega_i$  по направлениям осей  $x_1$  и  $x_2$  соответственно,  $i = 1, \dots, N$ .

Метод КНК применялся в данной работе в сочетании с методом декомпозиции области [13]. В последнем решение задачи (1)–(2) сводится к построению сходящегося итерационного процесса, на каждом шаге которого требуется последовательно решать вспомогательные локальные задачи в подобластях  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  [13]. Отметим, что в методе декомпозиции предлагается естественный способ распараллеливания вычислительного алгоритма, поскольку в ходе итерационного процесса данные обрабатываются раздельно по подобластям. Локальная задача в ячейке  $\Omega_i$  ставится для линеаризованных по Ньютону уравнений Навье-Стокса

$$v_1^k \frac{\partial v_j^{k+1}}{\partial x_1} + v_1^{k+1} \frac{\partial v_j^k}{\partial x_1} + v_2^k \frac{\partial v_j^{k+1}}{\partial x_2} + v_2^{k+1} \frac{\partial v_j^k}{\partial x_2} + \frac{\partial p^{k+1}}{\partial x_j} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta v_j^{k+1} = f_j + v_1^k \frac{\partial v_j^k}{\partial x_1} + v_2^k \frac{\partial v_j^k}{\partial x_2}, \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{v}^{k+1} = 0, \quad (4)$$

где  $j = 1, 2, (x_1, x_2) \in \Omega_i$ . Здесь  $v_1^k, v_2^k, p^k$  — компоненты решения, полученные на  $k$ -й итерации,  $v_1^{k+1}, v_2^{k+1}, p^{k+1}$  — искомые величины на  $(k+1)$ -й итерации. Краевые условия локальной задачи и условие для давления формулируются следующим образом:

$$v_n^{k+1} + h_i \frac{\partial v_n^{k+1}}{\partial n} - p^{k+1} = \hat{v}_n + h_i \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial n} - \hat{p}, \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega, \quad (5)$$

$$v_\tau^{k+1} + h_i \frac{\partial v_\tau^{k+1}}{\partial n} = \hat{v}_\tau + h_i \frac{\partial \hat{v}_\tau}{\partial n}, \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega, \quad (6)$$

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}_b, \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \quad (7)$$

$$\int_{\Omega_i} p^{k+1} dx_1 dx_2 = - \int_{\Omega \setminus \Omega_i} \hat{p} dx_1 dx_2, \quad (8)$$

где  $v_n = (\mathbf{v}, \mathbf{n})$ ,  $v_\tau = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  — единичные векторы внешней нормали и касательной к границе  $\partial\Omega_i$ ,  $h_i = (h_{1i}h_{2i})^{1/2}$ ,  $\hat{v}_n$ ,  $\hat{v}_\tau$ ,  $\hat{p}$  — приближения для компонент решения, имеющиеся в соседних ячейках при построении решения на  $(k+1)$ -й итерации в ячейке  $\Omega_i$ . Условия (5) и (6) записываются здесь в таком же виде, как и в [5].

Приближенное решение локальной задачи (3) – (8) строится в данной работе с помощью метода КНК. В рассматриваемых здесь вариантах метода скорость  $(v_1, v_2)$  ищется в пространстве

$$V_{m_v}(\Omega_i) = \{(v_1, v_2) : v_1 \in P_{m_v}(\Omega_i), v_2 \in P_{m_v}(\Omega_i), \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\},$$

где  $P_{m_v}(\Omega_i)$  — пространство, состоящее из всех полиномов степени не выше  $m_v$ , определенных в  $\Omega_i$ . В качестве базисных функций для скорости используются элементы

$$\begin{pmatrix} \xi_2^{\alpha_2} \\ \xi_1^{\alpha_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1^{\alpha_1} \\ \xi_2^{\alpha_2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq m_v,$$

$$\begin{pmatrix} -\xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} / \alpha_1 \\ \xi_1^{\alpha_1-1} \xi_2^{\alpha_2+1} / (\alpha_2 + 1) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq \alpha_1 \leq m_v, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq m_v - \alpha_1.$$

Таким образом, приближенное решение тождественно удовлетворяет уравнению неразрывности (4) внутри каждой ячейки. Это одно из достоинств вариантов метода КНК, предложенных в данной работе. Давление ищется в пространстве  $P_{m_p}(\Omega_i)$ . В качестве базиса для него используются мономы

$$\xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq m_p, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq m_p - \alpha_1.$$

Всего в каждой ячейке сетки имеем  $d_v = (m_v + 1)(m_v + 4)/2$  и  $d_p = (m_p + 1)(m_p + 2)/2$  базисных элементов для компонент скорости и давления соответственно. Обозначим их  $\varphi_1^v, \dots, \varphi_{d_v}^v$  и  $\varphi_1^p, \dots, \varphi_{d_p}^p$ . Приближенное решение представляется в ячейке  $\Omega_i$  в виде линейной комбинации базисных функций

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{d_v} C_{ik}^v \varphi_k^v, \quad q = \sum_{k=1}^{d_p} C_{ik}^p \varphi_k^p, \quad (9)$$

где  $C_{i1}^v, \dots, C_{id_v}^v$  и  $C_{i1}^p, \dots, C_{id_p}^p$  — искомые коэффициенты разложения по базису для скорости и давления соответственно. Они находятся из переопределенной СЛАУ, состоящей из уравнений коллокаций, условий на границе ячейки и интегрального условия для давления (8). Уравнения коллокаций здесь — это требования того, чтобы приближенное решение удовлетворяло (3) в конечном множестве точек ячейки  $\Omega_i$ . Условия на границе  $\partial\Omega_i$  — требования выполнения уравнений (5)–(7) в конечном числе узлов.

В данной работе точки записи уравнений коллокаций, условий согласования и краевых условий распределялись равномерно внутри каждой ячейки и на ее границе соответственно (рис. 1). Их количество выбиралось таким образом, чтобы в СЛАУ для определения коэффициентов разложения по базису линейно независимых уравнений было не меньше, чем неизвестных. Здесь были реализованы варианты метода КНК с различными соотношениями числа уравнений и количества неизвестных. Установлено,

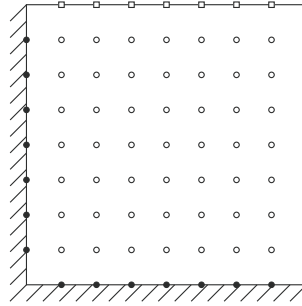


Рис. 1. Схема расположения точек коллокаций (○), точек записи условий согласования (□) и краевых условий (●) в ячейке сетки.

что в случае равномерного расположения точек (коллокаций, согласования и записи краевых условий) в ячейках сетки для достижения хорошей точности приближенного решения достаточно, чтобы число уравнений примерно в 2 раза превосходило число неизвестных. При дальнейшем увеличении количества уравнений порядок точности решения не изменяется. При этом, однако, увеличивается число арифметических действий, выполняемых в методе КНК. Для всех вариантов, используемых в п. 3, число точек коллокаций, точек записи условий согласования и краевых условий, а также их расположение совпадает с указанным на рис. 1.

При реализации метода наименьших квадратов решения переопределенной СЛАУ в данной работе используются ортогональные преобразования вращения. Это позволяет избежать ухудшения обусловленности системы в процессе ее решения. Для уменьшения времени, необходимого для проведения расчета, здесь применялся метод ускорения сходимости итераций, в котором в ходе итерационного процесса к текущему приближению добавляется поправка из подпространства Крылова [14].

### 3. Результаты расчетов

В данном разделе описаны результаты расчетов двух тестовых задач. Первая из них имеет аналитическое точное решение. Ввиду недостатка места формулы для его компонент здесь опущены (см. [6]). С этим решением проведены численные эксперименты на последовательности сеток при  $h \rightarrow 0$ , где  $h$  — максимальный линейный размер ячеек сетки. В расчетах использовались варианты метода КНК, в которых  $m_v = m_p + 1$ . Установлено, что порядок сходимости компонент скорости и давления приближенного решения к соответствующим компонентам точного не хуже  $m_v$ -го при четных и не хуже  $(m_v - 1)$ -го при нечетных  $m_v$  (в случае достаточно гладкого точного решения).

Вторая тестовая задача — это задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне с движущейся крышкой, которая в настоящее время считается многими исследователями эталонной для численных методов решения уравнений Навье-Стокса. Она интересна по нескольким причинам. Во-первых, класс течений в каверне при различных значениях  $Re$  достаточно широк и разнообразен для того, чтобы исследовать на нем свойства и возможности численных методов. В этих течениях присутствуют вихри различной интенсивности. Их количество, конфигурация и свойства существенно зависят от числа Рейнольдса (см. рис. 2 (a)). Так, например, в левом и правом нижних углах каверны имеются цепочки вихрей Моффатта (рис. 3) [15]. Во-вторых, из-за того, что компонента скорости  $u_1$  терпит разрыв первого рода на границе  $\partial\Omega$ , решение задачи

имеет особенности: в окрестности верхних углов каверны давление и первые производные компонент скорости не ограничены. В-третьих, для этой задачи опубликовано большое количество численных результатов, полученных различными методами.

В табл. 1 приведены результаты расчетов минимума функции тока для центрального вихря ( $PE$ ) в каверне. Расчеты проводились на последовательности из трех сеток  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ . Использовался вариант метода КНК, в котором  $m_v = 6$ ,  $m_p = 5$ . Для повышения точности расчета здесь производилось исключение особенностей решения в верхних углах [8] (исключались первые три члена асимптотики). Сетка  $M_1$  изображена на рис. 2 (б). Максимальная длина сторон ее ячеек равна  $1/16$ , минимальная  $1/256$ . Сетка  $M_2$  получается из  $M_1$  дроблением каждой ее ячейки на четыре равные части. Аналогичным образом из  $M_2$  строится сетка  $M_3$ . Число ячеек для сеток  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  равно 1984, 7936 и 31744 соответственно.

Для сравнения указаны значения, полученные другими исследователями [8–11]. О достоверности результатов, приведенных в этих работах, свидетельствует то, что все они получены существенно разными методами и хорошо согласуются между собой. Отдельные численные характеристики течения в каверне, приведенные в них, совпадают с точностью от  $10^{-6}$  до  $10^{-8}$ . В таблицу также включены результаты широко известной и цитируемой статьи [12]. Из сравнения с упомянутыми здесь работами видно, что новые варианты метода КНК позволяют с высокой точностью рассчитать подробные детали вихревой структуры течения. В частности, для центрального вихря в каверне при  $Re = 1000$  результаты для функции тока, полученные методом КНК, совпадают с приведенными в работах [8, 11] с точностью  $2 \cdot 10^{-8}$  (см. табл. 1). Разность значений функции тока в центре вихря  $PE$ , вычисленных на сетках  $M_2$  и  $M_3$ , примерно в 85

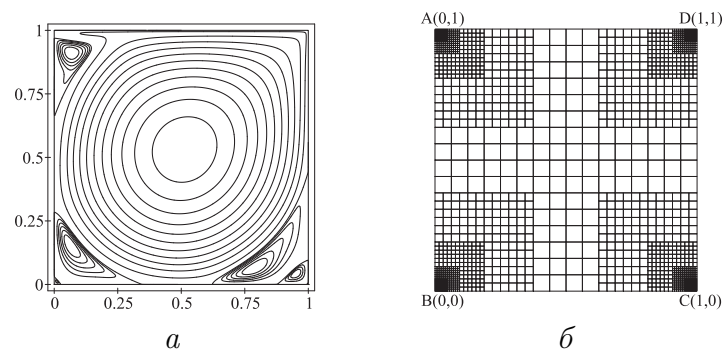


Рис. 2. Линии тока течения в каверне при  $Re = 7500$  (а) (расчет проведен методом КНК на сетке  $M_3$  при  $m_v = 6$ ,  $m_p = 5$ ). Сетка  $M_1$  (б).

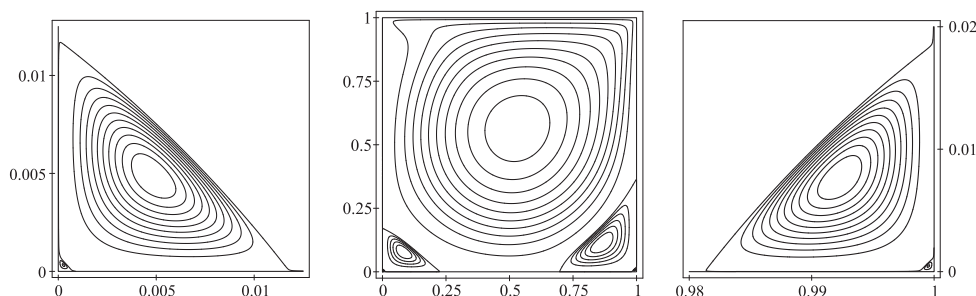


Рис. 3. Картина линий тока течения в каверне при  $Re = 1000$  и ее увелич. фрагменты (расчет проведен методом КНК на сетке  $M_3$  при  $m_v = 6$ ,  $m_p = 5$ ).

Т а б л и ц а 1. Значение функции тока в центре вихря  $PE$  ( $Re = 1000$ ).

работа	$\psi$	$x_1$	$x_2$
эта работа, сетка $M_1$	-0.11885323	0.53067831	0.56523414
эта работа, сетка $M_2$	-0.11893562	0.53078734	0.56523714
эта работа, сетка $M_3$	-0.11893658	0.53079011	0.56524057
Botella, Peyret	-0.1189366	0.5308	0.5652
Shapeev, Lin	-0.1189366	0.5307901	0.5652406
Barragy, Carey	-0.118930	—	—
Ghia и др.	-0.117929	0.5313	0.5625

раз меньше этой разности для сеток  $M_1$  и  $M_2$ , что свидетельствует о высоком порядке сходимости приближенного решения, полученного методом КНК.

## Список литературы

- [1] *de Boor C., Swartz B.* Collocation at Gaussian points // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10. № 4. P. 582–606.
- [2] *Плясунова А.В., Слепцов А.Г.* Коллокационно-сеточный метод решения нелинейных параболических уравнений ... // Моделирование в механике. 1987. Т. 1(18). № 4. С. 116–137.
- [3] *Leyk Z.* A C0-Collocation-like method for elliptic equations on rectangular regions // The J. of the Australian Math. Society. Series B. Applied Mathematics. 1997. V. 38. P. 368–387.
- [4] *Слепцов А.Г., Шокин Ю.И.* Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. №5. С. 572–586.
- [5] *Семин Л.Г., Слепцов А.Г., Шапеев В.П.* Метод коллокаций-наименьших квадратов для уравнений Стокса // Вычислительные технологии. 1996. Т. 1. №2. С. 90–98.
- [6] *Shapeev V.P., Semin L.G., Belyaev V.V.* The Collocation and Least Squares Method for Numerical Solution ... // Proc. of the Steklov Inst. of Math. Suppl. 2, 2003. P. S115–S137.
- [7] *Issaev V.I., Shapeev V.P.* Development of the Collocations and Least Squares Method // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1, 2008. P. S87–S106.
- [8] *Botella O., Peyret R.* Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow // Computers & Fluids. 1998. V. 27. № 4. P. 421–433.
- [9] *Barragy E., Carey G.F.* Stream function-vorticity driven cavity solution using p finite elements // Computers & Fluids. 1997. V. 26. № 5. P. 453–468.
- [10] *Гаранжа В.А., Коньшин В.Н.* Численные алгоритмы для течений вязкой жидкости ... // ЖВМиМФ. 1999. Т. 39. № 8. С. 1378–1392.
- [11] *Shapeev A.V., Lin P.* An asymptotic fitting finite element method with exponential mesh refinement for accurate computation ... // SIAM J. Sci. Comput. 2009. 31(3). P. 1874–1900.
- [12] *Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.* High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method // J. Comput. Phys. 1982. № 48. P. 387–411.
- [13] *Мацюкин А.М., Непомнящих С.В.* Метод альтернирования Шварца в подпространстве // Известия ВУЗов. Математика. 1985. № 10. С. 61–66.
- [14] *Слепцов А.Г.* Об ускорении сходимости линейных итераций // Моделирование в механике. Новосибирск, 1989. Т. 3(20). № 3. С. 132–147.
- [15] *Moffatt H.K.* Viscous and resistive eddies ... // J. Fluid Mech. 1964. №. 18. P. 1–18.