# Численное моделирование движения уединенных и ударных волн в несжимаемой жидкости

К.Е. Афанасьев
*Кемеровский государственный университет*
e-mail: keafa@kemsu.ru

С.Н. Карабцев, Т.С. Рейн

В последнее время наблюдается интенсивное развитие теории обрушающихся волн. Однако, несмотря на многочисленные работы, до сих пор все строгие исследования сделаны в рамках приближения идеальной жидкости. Проблема исследования волнового движения в вязкой жидкости актуальна в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями.

## Введение

В последнее время наблюдается интенсивное развитие теории обрушающихся волн. Однако, несмотря на многочисленные работы до сих пор все строгие исследования сделаны в рамках приближения идеальной жидкости [1, 2]. Наиболее корректные попытки учета влияния вязкости на нелинейную эволюцию формы свободной поверхности вязкой жидкости выполнены в рамках теории пограничного слоя.

Проблема исследования волнового движения в вязкой жидкости актуальна в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями [3]. Однако, процесс обрушения волн, особенно ныряющих обрушающихся волн, изучен достаточно поверхностно. Детально не известны механизмы формирования и опрокидывания гребня волны, образования пелены брызг, захвата смеси воздуха, приводящие к появлению неустойчивостей и турбулентности в течениях, а также образованию вихрей.

В данной работе представлены результаты численного моделирования движения и обрушения уединенных и ударных волн в вязкой несжимаемой жидкости (2D постановка). В качестве численного метода используется бессеточный метод конечных элементов, использующий для интерполяции неизвестных функции формы Сибсона и Лапласа. Приведено сравнения форм свободной поверхности с результатами, полученными при использовании модели идеальной жидкости. Особое внимание уделяется проверке законов сохранения.

## §1. Общая постановка задачи о течении несжимаемой жидкости со свободной границей

Ниже приведем общую постановку плоской нестационарной задачи течения идеальной жидкости со свободной границей. В расчетной области течения $D$, представленной конечным набором узлов, ограниченной свободной поверхностью $\Gamma_3$ и твердыми границами $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ и $\Gamma_4$ (рисунок 1), задано течение идеальной несжимаемой жидкости. Такое течение описывается системой уравнений Эйлера и уравнением неразрывности:

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i, \quad \mathbf{x}(t) \in D, \quad i = \overline{1,2}. \tag{1}$$

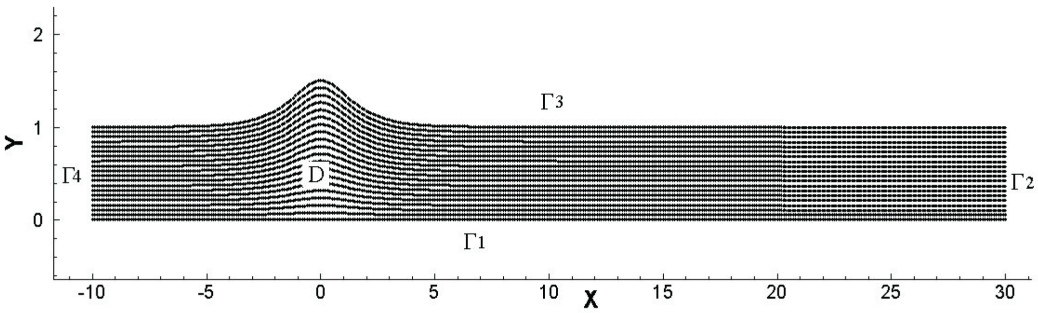


Рис. 1. Схема расчетной области

$$\partial u_i/\partial x_i = 0, \quad \mathbf{x}(\mathrm{t}) \in D. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x}(\mathrm{t}) = (x_1(t), x_2(t))$ – пространственные координаты, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathrm{t}) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t))$ – вектор скорости, $p(\mathbf{x}, t)$ – давление, $\rho$ – плотность, $\mathbf{f} = (f_1, f_2) = (0, -g)$ – вектор внешних сил. Движение расчетных узлов во всей области описывается уравнением вида:

$$dx_i/dt = u_i,\ \mathbf{x}(\mathrm{t}) \in D,\ i = \overline{1,2}. \tag{3}$$

На свободной поверхности $\Gamma_3$ выполняется динамическое условие $p(\mathbf{x}, t) = p_{atm}$, на твердых стенках $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_4$ выполняется условие непротекания $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, где $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ – внешняя нормаль к границе жидкости.

Ниже приведем общую постановку задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости. Пусть в области течения $D$ происходит движение ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости, описываемое системой уравнений Навье-Стокса и уравнением неразрывности (2). В постановке Эйлера уравнения Навье-Стокса будут иметь следующий вид:

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + f_i, \quad i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,2}. \tag{4}$$

В системе уравнений (2), (4) искомыми функциями являются давление $p$ и вектор скорости $\mathbf{u}$, параметрами – плотность $\rho$, вектор внешних сил $\mathbf{f}$ и коэффициент динамической вязкости $\mu$.

Запишем граничные условия для системы уравнений Навье-Стокса (2), (4). Так как жидкость вязкая, то на твердых стенках $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ и $\Gamma_4$ выполняется условие прилипания: $u_i = 0,\ i = \overline{1,2}$. На свободной поверхности $\Gamma_3$, как и в случае идеальной жидкости, выполняется динамическое условие $p = p_{atm}$.

Для нестационарной задачи о движении, как вязкой, так и идеальной жидкости необходимо задать положение расчетных узлов $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ и распределение неизвестных функций во всей области течения: $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x}, 0) = p^0(\mathbf{x})$.

## §2. Алгоритм движения по времени (схема расщепления)

Интегрирование по времени систем уравнений Эйлера и Навье-Стокса, описывающих поведение идеальной и вязкой жидкостей соответственно, представляет некоторые трудности, когда жидкость несжимаемая или слабо сжимаемая. В таком случае не может быть использован явный метод интегрирования по времени, в частности не удается устранить нефизические осцилляции функции давления. Для систем дифференциальных уравнений в частных производных в работе [4] был предложен в общем виде метод расщепления (метод дробных шагов). Суть этого метода заключается в разбиении физического процесса на два: конвекцию-диффузию и вклад давления. На первом этапе в уравнении движения учитываются только конвективные члены, в результате чего выделяется фиктивная переменная $\mathbf{u}^*$ – предиктор скорости. Второй этап заключается в добавлении к $\mathbf{u}^*$ члена $(-\Delta t \nabla p)$, который будет обеспечивать соленоидальность $\mathbf{u}$ на шаге по времени $t + \Delta t$. Для расщепления уравнение движения Навье-Стокса используется выражение:

$$\frac{Du_i}{Dt} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^* + u_i^* - u_i^n}{\Delta t} = \left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}p + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + f_i\right)^{n+1/2}. \tag{5}$$

$\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}p + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + f_i\right)^{n+1/2} = [\phi(x,t)]^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(\phi^{n+1} + \phi^n\right)$, где $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ - шаг по времени; под символом $\phi^n$ понимается выражение $\phi^n = \phi(x^n, t^n)$, соответственно $u_i^n = u_i(t^n, \mathbf{x}^n)$, $u_i^{n+1} = u_i(t^{n+1}, \mathbf{x}^{n+1})$.

Разделив слагаемые в уравнении (5) в соответствии с идеей метода расщепления, получим следующие выражения для предиктора и корректора скорости:

$$u_i^* = u_i^n + f_i\Delta t + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i^{*+1/2}}{\partial x_j}\Delta t, \tag{6}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^* - \frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}p^{n+1}. \tag{7}$$

При расщеплении уравнения движения Эйлера, вследствие отсутствия в нем слагаемого, отвечающего за вязкость, уравнение (6) перепишется в виде:

$$u_i^* = u_i^n + \Delta t f_i. \tag{8}$$

Для интегрирования уравнения неразрывности вводится фиктивная функция плотности $\rho$, удовлетворяющая уравнению $D\rho/Dt + \rho\partial u_i/\partial x_i = 0$ [5], тогда

$$\frac{D\rho}{Dt} \approx \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} = -\rho\frac{\partial(u_i^{n+1} - u_i^*)}{\partial x_i} - \rho\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i}, \tag{9}$$

где $\rho^*$ также как и при расщеплении уравнения движения, является фиктивной переменной. Из выражения (9) получим:

$$\frac{\rho^* - \rho^n}{\Delta t} = -\rho\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i}, \tag{10}$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^*}{\Delta t} = -\rho\frac{\partial(u_i^{n+1} - u_i^*)}{\partial x_i}. \tag{11}$$

Используя (7) и (11), можно записать уравнение Пуассона для функции давления:

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^*}{\Delta t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j}. \tag{12}$$

Подстановка функции $\rho^*$ из уравнения (10) в (12) приводит последнее к виду:

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t^2} + \frac{\rho}{\Delta t}\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j}. \tag{13}$$

Описанный выше метод расщепления был выведен как проекционный, в котором вторая подзадача эквивалентна проектированию решения первой подзадачи на пространство соленоидальных функций.

Самый простой способ ввести условие несжимаемости – записать равенство: $\rho^{n+1} = \rho^n = \rho^0 = \rho$. Тогда первое слагаемое в левой части уравнения (13) обратится в ноль. Тем не менее, при лагранжевом подходе к описанию среды лучше оценить это слагаемое, чтобы избежать накопления численной ошибки на каждом временном шаге. Перепишем условие несжимаемости, полагая, что на временном шаге $t^{n+1}$ плотность равна начальной, то есть $\rho^{n+1} = \rho^0 = \rho$. Однако, из-за вычислительной ошибки это равенство не обязательно будет выполняться, поэтому значение плотности $\rho^n$ должно оцениваться на каждом временном шаге с учетом упомянутой выше ошибки. Таким образом, уравнение (13) может быть переписано в виде:

$$\frac{\rho^0 - \rho^n}{\Delta t^2} + \frac{\rho}{\Delta t}\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j}. \tag{14}$$

Алгоритм движения по времени состоит из следующих шагов.

I) задание на $n$-ом временном слое распределения узлов области в виде массива;

II) построение аппроксимирующих функций формы;

III) вычисление предиктора скорости $\mathbf{u}^*$ из системы (6), в случае моделирования движения вязкой жидкости, и из системы (8) – в случае идеальной;

IV) решение уравнения Пуассона (14) для определения давления $p^{n+1}$;

V) вычисление нового значения скорости $\mathbf{u}^{n+1}$ из уравнения (7) с учетом найденного на шаге IV давления;

VI) вычисление нового положения частиц на $(n+1)$-ом временном шаге: $\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{u}^{n+1}\Delta t$ и далее на шаг I.

## §3. Основные этапы бессеточного метода конечных элементов

Метод естественных соседей был предложен Л. Траверсони в 1994 году для решения задач теории пластичности [6]. Этот метод представляет собой разновидность метода Галеркина. Как и в методе Галеркина, неизвестные функции аппроксимируются следующим образом: $q = N^T\mathbf{Q}$ , где $q = (u_i, p, \rho)$, $i = \overline{1,2}$; $\mathbf{Q}$ - вектор узловых значений неизвестных $q$ : $\mathbf{Q} = (U_i, P, \Re)$, $N$ – интерполяционные функции Сибсона и Лапласа. Для формирования дискретной системы уравнений используется метод взвешенных невязок в интегральной форме.

Можно выделить следующие основные шаги метода естественных соседей:

– расчетная область разбивается на ячейки Вороного первого порядка [7];

– для текущего набора узлов определяется граница расчетной области;

– для каждого узла, используя дискретизацию Вороного, определяется множество его естественных соседей;

– генерируются элементы расширенной триангуляции Делоне;

– с помощью метода Галеркина записывается слабая форма уравнений движения и неразрывности. Для аппроксимации неизвестных функций вычисляются функции формы Сибсона и Лапласа и их производные. Для вычисления интегралов используются квадратуры Хаммера;

– полученная система линейных алгебраических уравнений решается методом сопряженных градиентов с предобусловливанием.

### §4. Численные результаты

Основными определяющими параметрами задачи являются амплитуда набегающей волны $A$, высота $d$ подводного препятствия в виде ступеньки или угол $\alpha$ наклона пологого берега. На рисунке 2 показаны картины течения в различные моменты времени после прохождения уединенной волны амплитуды $A = 0,6$ над препятстявием высоты $d = 0,7$. После момента обрушения происходит интенсивное перемешивание жидко-

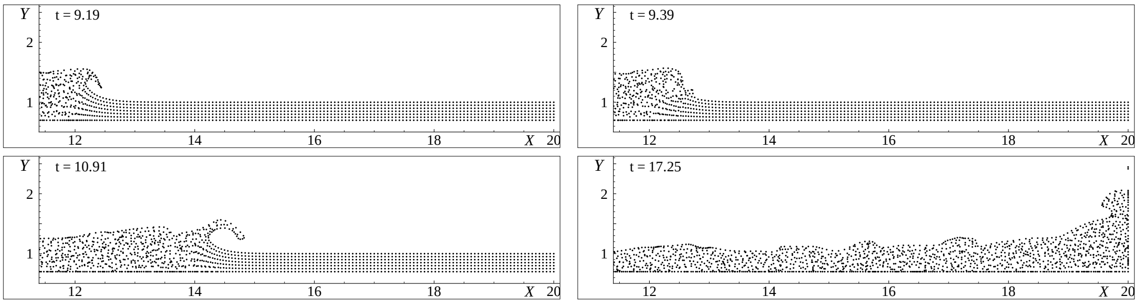


Рис. 2. Картина течения в различные моменты времени

сти, сопровождающееся появлением брызг (рисунок 2). Для наглядности, все рисунки представлены множеством расчетных узлов. В левом верхнем углу указаны соответствующие моменты времени. На рисунке 2, а) изображен момент перед обрушением гребня прошедшей волны. В следующий момент времени гребень сильно бьет в подошву волны, выталкивая перед собой движущуюся вперед с большой скоростью массу жидкости (рисунок 2, б). С течением времени данная масса жидкости увеличивается, из нее формируется волна, которая в дальнейшем обрушается (рисунок 2, в). В последующие моменты времени свободная поверхность подвержена сильному волнению, а движение жидкости представлено множеством взаимодействующих между собой волн различных форм и размеров.

## Список литературы

[1] Шокин Ю.И. Об использовании методов численного моделирования для решения прикладных задач проблемы цунами / Ю.И. Шокин, С.А. Бейзель, З.И. Федотова, Л.Б. Чубаров // Тр. Междунар. конф. "Вычисл. и информационные технологии в науке, технике и образовании". - Павлодар: ТОО НПФ "ЭКО", - 2006. - Т. I. С. 36–51.

[2] Афанасьев К.Е. Численное моделирование взаимодействий уединенных волн с препятствиями / К.Е. Афанасьев, С.В. Стуколов // Вычислительные технологии. - 1999. - Т. 4. - № 6. С. 3–16.

[3] Нестеров С.В. Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 4. С. 116–121.

[4] Яненко Н.Н. Об экономичных неявных схемах (метод дробных шагов) // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, 5 с.

[5] Chorin A. Numerical solution of the Navier-Stokes equations // Math. Comp. 1968. -Vol. 22. P. 745–762.

[6] Traversoni L. Natural neighbor finite elements // In International Conference on Hydraulic Enginnering Software. Hydrosoft Proceedings 2.Computational Mechanics Publications, 1994. -P. 291–297.

[7] Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение. Томск: ТГУ, 2002. 128 с.