

# Криволинейные системы координат для сплошных сред с замороженными векторными полями\*

С.В. Головин

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,*

*Новосибирский государственный университет*

e-mail: golovin@hydro.nsc.ru

В ряде математических моделей механики сплошной среды имеются векторные поля, переносимые течением жидкости. Интегральные кривые этих полей, «замороженные» в течение жидкости, оказывают существенное воздействие на характер движения. Так, в модели идеальной жидкости таковым является поле вихря, в модели идеальной магнитной гидродинамики — магнитное поле.

Описание трехмерных движений жидкости, особенно при наличии нетривиальных дополнительных полей, представляет сложную нелинейную задачу, решение которой в виде точных формул удается получить крайне редко, а численные расчеты требуют существенных вычислительных ресурсов и не всегда могут проводиться с гарантированной точностью. В данной работе свойство замороженности векторных полей используется для построения естественной криволинейной системы координат, в которой интегральные кривые замороженных полей образуют одно из семейств координатных линий. При таком подходе уравнения движения частично интегрируются. Кроме того, удается отделить сложность описания топологической структуры замороженных векторных полей от вычисления движения сплошной среды. Это видоизменяет задачу и дает новый подход к описанию сплошной среды: векторное поле в начальный момент времени определяет систему координат, а эволюция движения находится из решения более простой системы уравнений.

В работе введены описанные криволинейные системы координат для моделей идеальной жидкости, армированной жидкости [5] и идеальной магнитной гидродинамики. Построено точное решение уравнений магнитной гидродинамики, задающие движения с топологически нетривиальной структурой магнитных линий.

## 1. Уравнения Эйлера

Уравнения Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости с учетом уравнения для вихря записываются в виде

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad \boldsymbol{\omega}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — вектор скорости,  $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$  — вектор вихря,  $p$  — давление. Линии, в каждой точке касающиеся векторного поля  $\boldsymbol{\omega}$ , называются вихревыми линиями. Второе из уравнений (1) обеспечивает «замороженность» вихревых линий в течение жидкости.

---

\*Работа выполнена при поддержке Интеграционного проекта СО РАН №65, грантов поддержки ведущих научных школ НШ-4368.2010.1 и молодых докторов наук МД-168.2011.1.

Это же уравнение можно трактовать, как условие коммутирования  $[D_t, D_\omega] = 0$  двух векторных полей

$$D_t = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad D_\omega = \omega \cdot \nabla. \quad (3)$$

Данный факт позволяет ввести в пространстве  $\mathbb{R}^4(t, \mathbf{x})$  криволинейную систему координат, для которой векторные поля  $D_t$  и  $D_\omega$  являются базисными [4]. Криволинейная система координат  $(t, \boldsymbol{\xi})$  при каждом фиксированном  $t$  определяется диффеоморфизмом  $\mathbf{x} = \gamma(t, \boldsymbol{\xi})$ , удовлетворяющим условию

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad \omega = \frac{\partial \gamma}{\partial \xi^1}. \quad (4)$$

При этом, второе из уравнений (1) служит условием равенства второй смешанной производной  $\gamma_{t\xi^1}$ , вычисленной двумя способами из (4). Переменная  $t$  параметризует траектории частиц,  $\xi^1$  — вихревые линии, а свободные координаты  $\xi^2$  и  $\xi^3$  «различают» отдельные вихревые линии. Уравнения для отображения  $\gamma$  следуют из исходных уравнений Эйлера (1)–(2) в виде

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)^T \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} p = 0, \quad \det \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) = f(\xi^2, \xi^3). \quad (5)$$

Здесь  $(\partial \gamma / \partial \boldsymbol{\xi})^T$  — транспонированная матрица Якоби,  $f(\xi^2, \xi^3)$  — произвольная функция. За счет использования произвола в выборе координат  $\xi^2$  и  $\xi^3$  можно добиться  $f(\xi^2, \xi^3) = 1$ .

Описанный подход обладает рядом преимуществ перед использованием исходных уравнений (1)–(2) в том случае, когда необходимо проследить за поведением вихревых линий и вихревых трубок в течении идеальной жидкости. Для заданного отображения  $\mathbf{x} = \gamma(t, \boldsymbol{\xi})$  траектория частицы, стартующей из начального положения  $\mathbf{x}_0 = \gamma(0, \boldsymbol{\xi}_0)$  задается в виде  $\mathbf{x}(t) = \gamma(t, \boldsymbol{\xi}_0)$ . Аналогично, вихревая линия, проходящая в момент времени  $t_0$  через точку  $\mathbf{x} = \gamma(t_0, 0, \xi^2, \xi^3)$  задается параметрически уравнением  $\mathbf{x}(s) = \gamma(t_0, s, \xi^2, \xi^3)$ .

Выделение вихревой трубки, то есть построение трансверсального к вихревым линиям контура, определяющего трубку, осуществляется заданием связи между координатами  $\xi^2$  и  $\xi^3$  в начальный момент времени  $t = 0$ :  $\xi^2 = \xi^2(r)$ ,  $\xi^3 = \xi^3(r)$ . Дальнейшая эволюция вихревой трубки диктуется отображением  $\gamma$ . Параметрические уравнения вихревой трубки в произвольный момент времени имеют вид  $x(r, s) = \gamma(t, s, \xi^2(r), \xi^3(r))$ .

При таком подходе удается отделить сложность описания топологической структуры вихревых трубок от нахождения эволюции движения. Действительно, картина вихревых линий в начальный момент времени задает систему координат, а эволюция движения находится из решения уравнений (5).

В стационарном случае аналогичная криволинейная система координат имеет линии тока частиц и вихревые линии в качестве двух семейств координатных кривых. При выборе системы координат, параметризующей линии тока координатой  $\xi^1$  и вихревые линии координатой  $\xi^2$ , справедливы представления (4), в которых нужно сделать замену

$$\xi^1 \rightarrow \xi^2, \quad t \rightarrow \xi^1. \quad (6)$$

Уравнения Эйлера для стационарных движений жидкости имеют вид (5), в которых в первом слагаемом первого уравнения производная по  $t$  заменена на производную по  $\xi^1$ ,

а функция  $f$  зависит только от  $\xi^3$ . Отметим, что в работе [3] на основе похожей системы координат получен частный класс решений с давлением, постоянным на тороидальных магнитных трубках (= вихревых трубках).

## 2. Модель армированной жидкости

Математическая модель армированной жидкости была предложена в [5]. Модель описывает течения жидкости, нерастяжимой в направлении семейства материальных кривых (волокон), которые находятся во всем объеме жидкости и переносятся ее течением. Модель состоит из уравнений импульса и неразрывности

$$\rho D_t \mathbf{u} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}, \quad D_t \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad D_t = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad (7)$$

дополненных уравнением состояния

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + T \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}. \quad (8)$$

Здесь  $p$  — давление,  $T$  — натяжение в направлении волокон, определяемом вектором  $\mathbf{a}$ . В случае несжимаемой жидкости ( $\rho = \rho_0$ ) давление является искомой функцией. Для случая сжимаемой жидкости давление задается как функция от плотности и энтропии:  $p = F(\rho, S)$  с энтропией, сохраняющейся вдоль траекторий частиц:  $D_t S = 0$ . В обоих случаях натяжение  $T$  определяется только уравнениями движения (7). Подстановка тензора напряжений (8) в уравнение импульса (7) дает следующее уравнение:

$$\rho D_t \mathbf{u} = -\nabla p + T D_f \mathbf{a} + T \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} D_f T \quad (9)$$

в котором использовано обозначение  $D_f = \mathbf{a} \cdot \nabla$  для дифференцирования вдоль направления волокон.

Кинематика движения ограничена требованием о переносе волокон (интегральных кривых поля  $\mathbf{a}$ ) течением жидкости:

$$D_t \mathbf{a} = D_f \mathbf{u}. \quad (10)$$

Условие того, что волокна являются нерастяжимыми материальными кривыми может быть записано одним из двух способов. В первом предполагается, что поле  $\mathbf{a}$  имеет постоянную длину вдоль траекторий:

$$D_t |\mathbf{a}| = 0. \quad (11)$$

Умножение уравнения (10) на  $\mathbf{a}$  в силу (11) дает эквивалентное соотношение

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a} = 0 \quad (12)$$

(см. [5], уравнение (2)). Второй способ состоит в предположении о том, что поле  $\mathbf{a}$  имеет единичную длину во всем объеме жидкости:

$$|\mathbf{a}| = 1. \quad (13)$$

Это более сильное по сравнению с (11) предположение, однако в качестве следствия (не эквивалентного (13)) оно также дает уравнение (12).

Уравнение (10) выражает коммутативность векторных полей  $D_t$  и  $D_f$ . Это также дает возможность использовать их в качестве базисных для криволинейной системы координат, определяемой отображением  $\mathbf{x} = \gamma(t, \boldsymbol{\xi})$ , удовлетворяющим соотношениям

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \gamma}{\partial \xi^1}.$$

Координаты  $\xi^2$  и  $\xi^3$  не фиксируются. Отображение  $\gamma$  находится из следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^T \left( \rho \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left( \sqrt{g} T \frac{\partial \gamma}{\partial \xi^1} \right) \right) + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} p = 0, \\ \rho \sqrt{g} = f(\boldsymbol{\xi}), \quad \sqrt{g} = \det \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right), \quad \left| \frac{\partial \gamma}{\partial \xi^1} \right| = h(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \quad (14)$$

Для выполнения (13) необходимо потребовать  $h(\boldsymbol{\xi}) = 1$ . В случае несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) функция  $p$  является искомой. Для сжимаемой жидкости уравнения (14) дополняются соотношением  $p = F(\rho, S(\boldsymbol{\xi}))$  с произвольной функцией  $S(\boldsymbol{\xi})$ .

Аналогично предыдущему, в стационарном случае производится замена (6). При этом, таким же образом изменяются производные в уравнениях (14), а функции  $f$  и  $h$  предполагаются зависящими только от  $\xi^2$  и  $\xi^3$ .

### 3. Магнитная гидродинамика

Уравнения идеальной магнитной гидродинамики для нестационарных течений бесконечно проводящей запишем в следующем безразмерном виде

$$D_t \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (15a)$$

$$\rho D_t \mathbf{u} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \nabla p = 0, \quad (15b)$$

$$\mathbf{B}_t = \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (15b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (15g)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — вектор скорости,  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление. Система уравнений (15) в случае рассмотрения сжимаемой среды дополняется уравнением состояния  $p = F(\rho, S)$  с энтропией  $S$ , сохраняющейся вдоль траекторий частиц. Для несжимаемой среды  $\rho = \rho_0$  уравнение состояния не требуется, а давление  $p$  является искомой функцией.

Введем новые искомые функции

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{\rho}, \quad P = p + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2.$$

С ними уравнение индукции (15в) приобретает вид  $[D_t, D_s] = 0$  для векторных полей

$$D_t = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad D_s = \mathbf{b} \cdot \nabla.$$

Как и выше, вводим криволинейные координаты в  $\mathbb{R}^4$ , два семейства координатных кривых в которых совпадают с траекториями и магнитными линиями:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad \mathbf{b} = \frac{\partial \gamma}{\partial \xi^1}.$$

В криволинейных координатах система уравнений МГД (15) записывается в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right)^T \left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial\xi^1} \left(\rho \frac{\partial\gamma}{\partial\xi^1}\right)\right) + \frac{1}{\rho} \nabla_\xi P = 0, \\ \rho\sqrt{g} = f(\xi^2, \xi^3), \quad \sqrt{g} = \det \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

В случае несжимаемой сплошной среды ( $\rho = \rho_0$ ) функция  $P$  является искомой. Для сжимаемой сплошной среды с уравнением состояния  $p = F(\rho, S)$  соотношения (16) необходимо дополнить выражением

$$P = F(\rho, S(\xi)) + \frac{1}{2} \rho^2 \left| \frac{\partial\gamma}{\partial\xi^1} \right|^2 \quad (17)$$

с произвольной функцией  $S(\xi)$ . В работе [2] проведена групповая классификация уравнений (16) относительно уравнения состояния и представлены некоторые классы ее точных решений. Стационарный случай уравнений МГД разобран в работе [1].

#### 4. Точные решения

Рассмотрим класс точных решений системы (16), выделяемый требованием постоянства полного давления  $P$  во всей области движения. При этом будем считать жидкость несжимаемой:  $\rho = 1$ .

$$P = p + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 = \text{const.}$$

Из первого уравнения системы (16) следует

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\gamma}{\partial\xi^{12}} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения дает выражение для функции  $\gamma(t, \xi)$ :

$$\gamma = \sigma(t - \xi^1, \xi^2, \xi^3) + \tau(t + \xi^1, \xi^2, \xi^3). \quad (18)$$

С этим представлением в условие несжимаемости (второе из уравнений (16)) дает:

$$(-\sigma_1 + \tau_1) \cdot \left( (\sigma_2 + \tau_2) \times (\sigma_3 + \tau_3) \right) = 1. \quad (19)$$

Здесь и далее нижний индекс  $i$  обозначает производную по  $i$ -му аргументу функций  $\sigma$  и  $\tau$ . В уравнении (19) требуется разделить переменные  $t - \xi^1$  и  $t + \xi^1$ , а затем проинтегрировать получающиеся переопределенные системы дифференциальных уравнений для векторов  $\sigma$  и  $\tau$ . В общем виде проследить этот процесс не представляется возможным. Приведем одно из точных решений из этого класса.

$$\begin{aligned} \gamma = \left( u(t - \xi^1) + \tau^1(t + \xi^1, \xi^2, \xi^3) \right) \boldsymbol{\eta}^1 + \tau^2(t + \xi^1, \lambda(t + \xi^1, \xi^2, \xi^3)) \boldsymbol{\eta}^2 \\ + \tau^3(t + \xi^1, \lambda(t + \xi^1, \xi^2, \xi^3)) \boldsymbol{\eta}^3. \end{aligned} \quad (20)$$

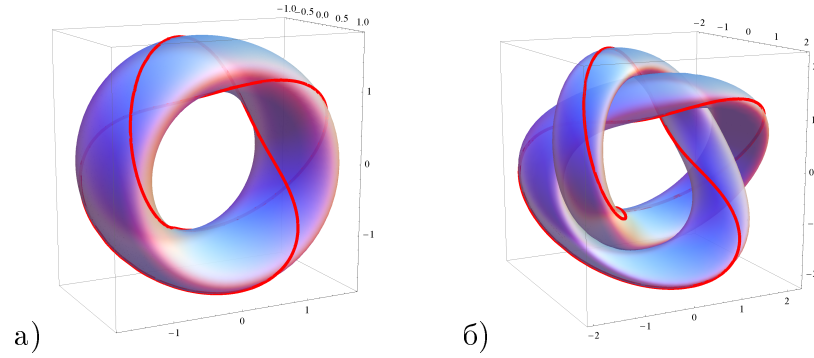


Рис. 1. Магнитная трубка с типичной магнитной линией на решении а) (22); б) (23).

Входящие в решение (20) функции определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\tau^1 &= a(\mu) + B(\xi^2, \xi^3) \sin(\varphi(\mu) + A(\xi^2, \xi^3)), \\ \lambda &= \sqrt{b(\mu) + B(\xi^2, \xi^3) \cos(\varphi(\mu) + A(\xi^2, \xi^3))} \\ \tau^2 &= \lambda \cos k\mu, \quad \tau^3 = \lambda \sin k\mu, \quad \mu = t + \xi^1.\end{aligned}\tag{21}$$

Здесь  $A$ ,  $B$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $u$ ,  $\varphi$  — произвольные функции,  $k$  — произвольная константа. Решение (21) описывает движения с вложенными тороидальными (или заузленными) магнитными поверхностями. Решение определено в области, выделяемой неравенством  $|B(\xi^2, \xi^3)| \leq b(\mu)$ . Переменная  $\mu$  возрастает вдоль центральной линии тора (узла). Функция  $\varphi(\mu)$  определяет закрученность магнитных линий вокруг центральной линии; функции  $A$  и  $B$  определяют форму сечения магнитной трубки; функции  $a$  и  $b$  описывают сдвиг сечения магнитной трубки относительно ее направляющей кривой.

Выбор произвольных функций, входящих в решение (21) в виде

$$A = \xi^2, \quad B = \xi^3, \quad \varphi = 3\mu, \quad a = 0, \quad b = 2, \quad k = 2\tag{22}$$

и

$$A = \xi^2, \quad B = \xi^3, \quad \varphi = 3\mu, \quad a = \sin 3\mu, \quad b = 3 + \cos 3\mu, \quad k = 2\tag{23}$$

приводит к решениям с магнитными поверхностями, изображенными на рис. 1а и 1б соответственно.

## Список литературы

- [1] Golovin S. V. Analytical description of stationary ideal MHD flows with constant total pressure // *Physics Letters A*. — 2010. — Vol. 374. — Pp. 901–905.
- [2] Golovin S. V. Natural curvilinear coordinates for ideal MHD equations. Non-stationary flows with constant total pressure // *Physics Letters A*. — 2011. — Vol. 375, no. 3. — Pp. 283 – 290.
- [3] Schief W. K. Nested toroidal flux surfaces in magnetohydrostatics. Generation via soliton theory // *Journal of Plasma Physics*. — 2003. — Vol. 69. — Pp. 465–484.
- [4] Schutz B. F. Geometrical methods of mathematical physics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
- [5] Spencer A. J. M. Fibre-streamline flows of fibre-reinforced viscous fluids // *European Journal of Applied Mathematics*. — 1997. — Vol. 8, no. 2. — Pp. 209–215.