

# МНОЖЕСТВО ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЙ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ЕГО ГИРОСТАТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

С.В. Чайкин

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

## THE SET OF RELATIVE EQUILIBRIA OF SATELLITE-GYROSTAT IN THE PARTICULAR POSITION CASE OF ITS GYROSTATIC MOMENTUM

S.V. Chaikin

Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk

*We consider the motion of the gyrostat in a Kepler orbit under Newtonian field of forces. Gyrostat is a rigid body with a placed in it balanced flywheel rotating with a constant relative angular velocity. The axis of rotation of flywheel is an axis of its symmetry and fixed in any plane of symmetry of the system's principal ellipsoid of inertia. Under such conditions (R.W. Longman's statement, 1971) all relative equilibria of gyrostat (the states of the rest of the rigid body in the orbital coordinate system) are determined by means of original governing equations. The bifurcations of the relative equilibria of system are studied with the help of computer algebra methods and numerical modeling in depend on magnitude of gyrostatic momentum and other system parameters.*

**Введение.** Для описания в ограниченной постановке [1] движения спутника-гиростата в центральном ньютоновском поле сил на кеплеровой круговой орбите введем следующие правые прямоугольные декартовы системы координат. Орбитальная система координат  $Oy_k$  с ортами соответствующих осей  $\xi_k$  ( $k=1,2,3$ ) имеет полюс  $O$  в центре масс спутника-гиростата, ось  $Oy_3$  (орт  $\xi_3$ ) направлена по радиусу-вектору орбиты, проведенному из притягивающего центра в центр масс системы; ось  $Oy_2$  направлена по нормали к плоскости орбиты так, что орбитальная угловая скорость системы  $\omega = \omega \cdot \xi_2$ , где  $\omega = |\omega|$ . Оси жестко связанной с корпусом спутника-гиростата системы координат (орты осей  $x_k$ ) с полюсом в точке  $O$  выбраны таким образом, что матрица компонентов центрального тензора инерции  $I$  в этих осях имеет диагональный вид:  $[I] = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  при этом  $I_1 < I_2 < I_3$ . Постоянный вектор гиростатического момента системы, деленный на  $\omega$ , в осях  $Ox_k$  имеет матрицу компонентов  $[J] = (0, J_2, J_3)^T$ , при этом  $J_2 = |J| \tilde{J}_2$ ,  $J_3 = |J| \tilde{J}_3$ ,  $\tilde{J}_2 \neq 0$ ,  $\tilde{J}_3 \neq 0$ ,  $\tilde{J}_2^2 + \tilde{J}_3^2 = 1$ . Величины  $\tilde{J}_2, \tilde{J}_3$  есть направляющие косинусы вектора гиростатического момента системы в системе координат  $Ox_k$ .

Взаимное расположение систем координат  $Oy_k$  и  $Ox_k$  очевидным образом определяется таблицей направляющих косинусов,  $\xi_{ik}$  – проекция орта  $\xi_k$  на ось  $Ox_i$ .

Если в уравнениях движения системы в рассматриваемом случае, см., например, [2, 3], приравнять нулю производные по времени величин, входящих в них, то получим уравнения, определяющие относительные равновесия спутника-гиростата, которые запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_1 I \xi_2 &= -\xi_1 J, \quad \xi_3 I \xi_2 = -\xi_3 J / 4, \\ \xi_1 I \xi_3 &= 0, \quad \xi_i \times \xi_j \xi_k = \varepsilon_{ijk} \quad (i, j, k \in \{1, 2, 3\}). \end{aligned} \quad (1)$$

Знак « $\times$ » означает векторное произведение соответствующих векторов;  $\varepsilon_{ijk}$  – альтернирующий тензор [4], принимающий одно из значений  $\{-1, 0, 1\}$  в зависимости от значений  $i, j, k$ .

**Относительные равновесия, условия их существования.** Учитывая последнее соотношение в (1), запишем эквивалентные уравнения, определяющие относительные равновесия системы следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} (I \xi_2 + J) \times (I \xi_2 + J/4) \neq 0, \\ \xi_3 (I \xi_2 + J) \times \xi_2 = 0, \quad \xi_1 \xi_2 \times (I \xi_2 + J/4) = 0, \\ \xi_1 I \xi_3 = 0, \quad \xi_i \times \xi_j \xi_k = \varepsilon_{ijk}, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (I \xi_2 + J) \times (I \xi_2 + J/4) = 0, \\ \xi_1 (I \xi_2 + J) = 0, \quad \xi_3 (I \xi_2 + J/4) = 0, \\ \xi_1 I \xi_3 = 0, \quad \xi_i \times \xi_j \xi_k = \varepsilon_{ijk}. \end{array} \right.$$

Далее займемся равновесиями, определяемыми первой группой уравнений. Другие случаи, являясь более простыми для изучения, ранее уже активно исследовались.

Если ввести в рассмотрение, очевидно, ненулевые в нашем случае векторы  $\hat{\xi}_1 \triangleq \pm (I \xi_2 + J) \times \xi_2$  и  $\hat{\xi}_3 \triangleq \pm \xi_2 \times (I \xi_2 + J/4)$ , перпендикулярные  $\xi_2$ , то  $\xi_1 = \hat{\xi}_1 / |\hat{\xi}_1|$  и  $\xi_3 = \hat{\xi}_3 / |\hat{\xi}_3|$ . Теперь эквивалентные уравнения запишем следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} (I \xi_2 + J) \times (I \xi_2 + J/4) \neq 0, \\ \xi_2^2 = 1, \quad (I \xi_2 + J) \times \xi_2 \xi_2 \times (I \xi_2 + J/4) = 0, \\ ((I \xi_2 + J) \times \xi_2) I (\xi_2 \times (I \xi_2 + J/4)) = 0, \\ \xi_1 = \pm (I \xi_2 + J) \times \xi_2 / |(I \xi_2 + J) \times \xi_2|, \\ \xi_3 = \pm \xi_2 \times (I \xi_2 + J/4) / |(I \xi_2 + J/4) \times \xi_2|. \end{array} \right. \quad (2)$$

Разрешая уравнения второй и третьей строки в (2) относительно неизвестных компонент  $\xi_{i2}$  вектора  $\xi_2$  с учетом неравенства первой строки, получаем единственно возможные в нашем случае решения

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{22} = \frac{B}{4} \sqrt{\frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1}} \hat{j}_2 \left( -5 + 3((\pm)_2 (B^2 + 1) / \sqrt{A}) \right), \\ \xi_{32} = \frac{B}{4} \sqrt{\frac{I_3 - I_2}{I_3 - I_1}} \hat{j}_3 \left( -5 + 3((\pm)_2 (B^2 - 1) / \sqrt{A}) \right), \\ \xi_{12} = (\pm)_3 \sqrt{1 - \xi_{22}^2 - \xi_{32}^2}, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\text{где} \quad B = \frac{|J| \sqrt{\tilde{J}_2^2 + \tilde{J}_3^2 (I_2 - I_1) / (I_3 - I_1)}}{2\sqrt{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}} \geq 0, \quad \hat{j}_2 = \frac{\tilde{j}_2}{\sqrt{\tilde{J}_2^2 + \tilde{J}_3^2 (I_2 - I_1) / (I_3 - I_1)}},$$

$$\hat{j}_3 = \frac{\tilde{j}_3 \sqrt{(I_2 - I_1) / (I_3 - I_1)}}{\sqrt{\tilde{J}_2^2 + \tilde{J}_3^2 (I_2 - I_1) / (I_3 - I_1)}}, \quad A \equiv \hat{j}_2^2 (B^2 + 1)^2 + \hat{j}_3^2 (B^2 - 1)^2. \text{ Заметим, что } \hat{j}_2^2 + \hat{j}_3^2 = 1, \text{ а компо-}$$

ненты векторов  $\xi_1$  и  $\xi_3$  определяются по соответствующим формулам в (2), зная  $\xi_{i2}$ .

Условия существования найденных решений (так называемый класс (4в) относительных равновесий спутника-гиростата на кеплеровой круговой орбите по принятой классификации, см., например, [2]) определяются, очевидно, одним неравенством

$$1 - \xi_{22}^2 - \xi_{32}^2 > 0.$$

Если параметры спутника-гиростата таковы, что при каком-либо выборе знака  $(\pm)_2$  в (3) выполнено последнее неравенство, то имеется одновременно четыре относительных равновесия спутника-гиростата класса (4в). Класс равновесий (4в) характеризуется тем, что ни одна из осей, связанных с корпусом системы координат  $Ox_k$  не лежит в равновесии ни в одной из координатных плоскостей системы осей  $Oy_k$ .

Вводя далее в качестве бифуркационного параметра  $x \equiv 1 - \frac{1}{B^2 + 1}$ ,  $x \in [0, 1)$ , в зависимости от величины которого будем исследовать наличие – отсутствие относительных равновесий системы, определяемых в соответствии с (3), (2), запишем определяющее неравенство следующим образом:

$$f_1 \equiv \hat{J}_3^2(64a + 100b(\hat{J}_2^2 + a\hat{J}_3^2) + 36ab)x^3 - \hat{J}_3^2(128a + 100b(\hat{J}_2^2 + a\hat{J}_3^2) + 36ab)x^2 + (16a + 34b(\hat{J}_2^2 + a\hat{J}_3^2) + 64a\hat{J}_3^2)x - 16a < < (\pm)_2 30b\sqrt{\hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2}(2x-1)^2 x(\hat{J}_2^2 - a\hat{J}_3^2 + 2a\hat{J}_3^2x) \equiv (\pm)_2 f_2. \quad (4)$$

Здесь для удобства введены вещественные  $a \equiv \frac{(I_2 - I_1)}{(I_3 - I_1)}$  и  $b \equiv \frac{(I_3 - I_2)}{(I_3 - I_1)}$ , очевидно,  $a + b = 1$ ;

при  $I_1 < I_2 < I_3$  параметры  $a, b \in (0, 1)$ . С учетом связи  $\hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 = 1$  будем считать вещественные функции  $f_1$  и  $f_2$  зависящими от переменной  $x$  и, в соответствии с формулами для  $\hat{J}_3$ , двух параметров  $\tilde{J}_3^2$ ,  $a \in (0, 1)$ . Очевидно следующее

**Утверждение 1.** Для любого значения  $a \in (0, 1)$  существуют моменты инерции  $I_i$ , определяющие физически реализуемую механическую систему (спутник-гиростат), такие, что  $0 < I_1 < I_2 < I_3$ ,  $I_3 < I_2 + I_1$  и  $(I_2 - I_1)/(I_3 - I_1) = a$ .

**Доказательство.** Пусть задано произвольное  $a \in (0, 1)$ . Полагая, что выполнено последнее равенство, имеем  $I_2 = I_1 + a(I_3 - I_1)$ . Ясно, что таким образом выбранное  $I_2$  больше  $I_1$  и  $I_2 < I_3 \Leftrightarrow I_1(1-a) < I_3(1-a)$  при  $I_1 < I_3$ . Таким образом, выбор  $I_1$  в зависимости от  $I_3$  ограничивается условием (кроме  $I_1 < I_3$ )  $I_1 + I_2 > I_3 \Leftrightarrow (2-a)I_1 > (1-a)I_3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{1+(1-a)}\right) \times I_3 < I_1 < I_3$ . Оканчивая доказательство, заметим, что интервал, из которого следует выбрать значение  $I_1 \in \left(\left(1 - \frac{1}{1+(1-a)}\right)I_3, I_3\right)$ , очевидно, не пустой для  $\forall a \in (0, 1)$ .

Вычислим значения  $f_1$  и  $f_2$  при  $x=0$ ,  $x=1$  и произвольных значениях параметров  $a, \tilde{J}_3^2 \in (0, 1)$

$$\begin{cases} f_1(x=0; a, \tilde{J}_3^2) = -16a < 0, \\ (\pm)_2 f_2(x=0; a, \tilde{J}_3^2) = 0, \\ f_1(x=1; a, \tilde{J}_3^2) = 34(1-a)(1-(1-a)\tilde{J}_3^2) > 0, \\ f_2(x=1; a, \tilde{J}_3^2) = 30(1-a)(1-(1-a)\tilde{J}_3^2). \end{cases} \quad (5)$$

Так как функции  $f_1$  и  $f_2$  гладкие, отсюда непосредственно следует справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 2.** При любых значениях параметров  $a, \tilde{J}_3^2 \in (0, 1)$  графики функций  $f_1$  и  $(+)_2 f_2$  (соответственно  $f_1$  и  $(-)_2 f_2$ ) на интервале  $x \in [0, 1)$  имеют хотя бы одну общую точку и, соответственно, имеется хотя бы один интервал для значений  $x$  из  $[0, 1)$ , где неравенство (4) выполняется.

Методы решения неравенства (4) хорошо известны. Например, надо найти нули функций  $f_1$  и  $f_2$  на интервале  $x \in [0, 1)$  (пусть общие нули, занумерованные по возрастанию, есть  $z_1, \dots, z_N$ ,  $1 \leq N \leq 5$ ) и решать неравенство последовательно на каждом подинтервале:  $[0, z_1), \dots, (z_N, 1)$ .

Однако для наших целей продуктивнее воспользоваться следующими рассуждениями. При возведении обеих частей неравенства (4) во вторую степень мы

избавимся от иррациональности в правой части. Перенеся все члены, например, в левую часть, получим полином от  $x$  шестой степени  $P_6(x; a, \tilde{J}_3^2) = f_1^2 - f_2^2$  с коэффициентами, зависящими от параметров  $a, \tilde{J}_3^2 \in (0, 1)$ . Коэффициент при старшей степени  $x$  полинома  $P_6$  положителен. Среди шести его возможных вещественных корней один корень будет точно существовать из-за того, что, как мы теперь знаем (утверждение 2) имеется минимум одно пересечение у графиков функций  $f_1$  и  $(-)_2 f_2$  на  $x \in [0, 1)$ . Значит, при определении областей по переменной  $x$  из интервала  $[0, 1)$ , где  $f_1 < f_2$  (для определенности рассматриваем этот случай) мы можем иметь максимум пять различных точек пересечения графиков функций  $f_1$  и  $f_2$ . Пусть в этом случае пересечение графиков определяются точками  $x$ , занумерованными так, что  $0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 < 1$ . При этом в соответствии с (5) на интервале  $x \in [0, x_1)$  неравенство  $f_1 < f_2$  выполняется, а на интервале  $x \in (x_5, 1)$  не выполняется. На рис. 1 для данного гипотетического случая (мы предположили, что при некоторых значениях параметров  $a, \tilde{J}_3^2 \in (0, 1)$  имеется пять различных точек пересечения графиков функций  $f_1$  и  $f_2$  на интервале  $x \in [0, 1)$ , определяемых значениями  $x \in \{x_1, \dots, x_5\}$ ) области, где неравенство  $f_1 < f_2$  не выполняется, заштрихованы, а где выполняется, не заштрихованы.

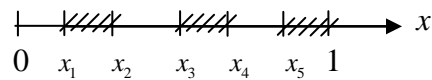


Рис. 1

**Утверждение 3.** *Существуют значения параметров  $a, \tilde{J}_3^2 \in (0, 1)$ , определяющих физически реализуемую механическую систему, при которых максимальное число интервалов для значений бифуркационного параметра  $x$  из интервала  $[0, 1)$ , когда неравенство (4), обеспечивающее существование относительных равновесий, определяемых в соответствии с (3), (2), выполняется (не выполняется) равно трем (равно трем).*

**Доказательство.** Выше было показано, что число упомянутых интервалов не может быть больше трех. Покажем, что при некоторых значениях параметров  $a, \tilde{J}_3^2 \in (0, 1)$  реализуется рассмотренный гипотетический случай. С использованием системы компьютерной алгебры Mathematica и пакета программ [5] выполнены необходимые численные эксперименты. Найдены значения параметров  $a = 0,010022$  и  $\tilde{J}_3 = 0,999982$ , при которых графики функций  $f_1(x; a, \tilde{J}_3^2)$  и  $f_2(x; a, \tilde{J}_3^2)$  имеют пять различных точек пересечения на интервале  $x \in [0, 1)$ , или, другими словами, функция  $(f_1 - f_2)$  имеет пять различных корней на интервале  $x \in [0, 1)$ .

Таким образом, имеются значения параметров, при которых реализуется гипотетический случай и области выполнения (4) имеют вид, указанный на рис. 1.

**Заключение.** В работе используются оригинальные уравнения (2) для отыскания относительных равновесий спутника-гиростата на кеплеровой круговой орбите в центральном ньютоновском поле сил в частном случае расположения гиростатического момента системы. По мнению авторов эти уравнения более удобны при изучении изменений интересующего нас множества относительных равновесий системы (равновесия класса (4в)), в зависимости от величины гиростатического момента.

Впервые дается ответ на вопрос, сформулированный в статье [2, стр. 178]: каково максимальное количество областей значений  $|J|$  из интервала  $[0, \infty)$ , в которых

отсутствуют относительные равновесия класса (4в) спутника-гиростата на кеплеровой круговой орбите в частном случае расположения гиростатического момента.

Исследование случая, когда  $\tilde{J}_3 = 0$  ( $\tilde{J}_1 \neq 0, \tilde{J}_2 \neq 0$ ), т.е. ось вращения уравновешенного маховика перпендикулярна оси наибольшего момента инерции гиростата, получается из рассмотренного выше, если у  $\xi_{i2}, \hat{J}_i$  и в выражениях, определяющих их и величины  $B, A, a, b$ , сделать одновременную перестановку индексов: старый индекс 1 переходит в новый индекс 3; старый индекс 3 переходит в новый индекс 1; индекс 2 не меняется. Например, будет (ср. (3)):

$$\xi_{22} = \frac{B}{4} \sqrt{\frac{I_1 - I_2}{I_2 - I_3}} \hat{J}_2 \left( -5 (\pm)_2 3(B^2 + 1) / \sqrt{A} \right),$$

$$\hat{J}_2 = \frac{\tilde{J}_2}{\sqrt{\tilde{J}_2^2 + \tilde{J}_1^2 (I_2 - I_3) / (I_1 - I_3)}} \quad \text{и т.д.}$$

Дополнительные исследования требуются для изучения изменений множества относительных равновесий класса (4в) в зависимости от  $|J| \in [0, \infty)$  при  $\tilde{J}_2 = 0$ .

### Список литературы

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
2. Longman R.W. Gravity-Gradient stabilization of gyrostatt satellites with rotor axes in principal planes // Celestial Mech., 1971. – № 3. – P. 169-188.
3. Сарычев В.А., Мирер С.А., Дегтярев А.А. Динамика спутника-гиростата с вектором гиростатического момента в главной плоскости инерции // Космические исследования. – 2008. – Т. 46, № 1. – С. 61-73.
4. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974. – 318 с.
5. Банщиков А.В. Программное обеспечение для параметрического анализа систем алгебраических неравенств (ПО PASI) // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2000611004. Роспатент. 5 октября 2000 г.