ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДВУХ НЕИЗВЕСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С.В. Полынцева
Сибирский федеральный университет, Красноярск
e-mail:siriuspsv@mail.ru

В работе исследуется однозначная разрешимость задачи идентификации коэффициентов при младшем члене и первой производной по пространственной переменной в одном параболическом уравнении с условиями переопределения, заданными на двух различных поверхностях.

Рассмотрим задачу идентификации коэффициентов при младшем члене и первой производной по пространственной переменной в одном параболическом уравнении с условиями переопределения, заданными на двух различных поверхностях. В работе доказаны теоремы существования и единственности классического решения данной обратной задачи в классе гладких ограниченных функций.

При доказательстве теоремы существования решения обратной задачи применялся метод, позволяющий, используя условия переопределения, привести исходную обратную задачу к прямой вспомогательной задаче для нагруженного уравнения. Исследование корректности прямой задачи проведено методом слабой аппроксимации [1, 2].

Задача идентификации коэффициентов при нелинейном члене и производной по времени для полулинейного параболического уравнения с нелинейностью достаточно общего вида была исследована в работе [3].

Другие задачи идентификации нескольких коэффициентов параболических уравнений см., например, в [4, 5, 6].

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) | \, 0 \le t \le T, \, x \in E_1, \, z \in E_1\}$ рассматривается параболическое уравнение

$$u_t = \alpha(t)u_{xx} + \lambda_1(t,x)u_x + \lambda_2(t,x)u_{zz} + \lambda_3(t,x)u_z + \lambda_4(t,x)u + \lambda_5(t,x)g(t,x,z) \quad (1)$$

с двумя неизвестными коэффициентами $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_4(t,x)$, с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \quad (x,z) \in E_2. \quad (2)$$

Функции $u_0(x,z)$, $g(t,x,z)$ заданы в E_2 и $G_{[0,T]}$ соответственно. Коэффициенты $\alpha(t)$, $\lambda_2(t,x)$, $\lambda_3(t,x)$, $\lambda_5(t,x)$, являются непрерывными действительнозначными функциями в $C[0,T]$ и $\Pi_{[0,T]}$ соответственно, причем $\alpha(t) > 0$ и $\lambda_2(t,x) > 0$, $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x) | \, 0 \le t \le T, x \in E_1\}$, $T > 0$, $T = const$. E_n – действительное n-мерное евклидово пространство, $n \ge 1$, n – целое.

Предполагается, что выполняются условия переопределения на двух различных поверхностях:

$$u(t,x,\beta_1(t)) = \varphi_1(t,x), \quad u(t,x,\beta_2(t)) = \varphi_2(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad (3)$$

где $\beta_1(t), \beta_2(t) \in C^1[0,T]$, $\beta_1(t) \neq \beta_2(t)$, и $\varphi_1(t,x)$, $\varphi_2(t,x)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\varphi_1(0,x) = u_0(x, \beta_1(0)), \quad \varphi_2(0,x) = u_0(x, \beta_1(0)), \quad \beta_1(0) \neq \beta_2(0), \quad x \in E_1. \tag{4}$$

Под решением задачи (1)-(3) в полосе $G_{[0,t_*]}$, $0 < t_* \leq T$, понимается тройка функций $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_4(t,x)$, которые удовлетворяют соотношениям (1)-(3).

Переход от обратной задачи к прямой вспомогательной задаче

Полагая $z = \beta_1(t)$ в уравнении (1), а затем $z = \beta_2(t)$ в этом же уравнении приходим к системе алгебраических уравнений из которой находим неизвестные коэффициенты $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_4(t,x)$. Они определяются следующими соотношениями

$$\lambda_1(t,x) = \frac{P\varphi_2 - Q\varphi_1}{\varphi_2\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\varphi_1}, \tag{5}$$

$$\lambda_4(t,x) = \frac{Q\varphi_{1x} - \varphi_{2x}P}{\varphi_2\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\varphi_1}, \tag{6}$$

где

$$P = \varphi_{1t} - u_z|_{z=\beta_1(t)}\beta_1'(t) - \alpha(t)\varphi_{1xx} - \lambda_2(t,x)u_{zz}|_{z=\beta_1(t)} - \lambda_3(t,x)u_z|_{z=\beta_1(t)} - \lambda_5(t,x)g(t,x,\beta_1(t)),$$

$$Q = \varphi_{2t} - u_z|_{z=\beta_2(t)}\beta_2'(t) - \alpha(t)\varphi_{2xx} - \lambda_2(t,x)u_{zz}|_{z=\beta_2(t)} - \lambda_3(t,x)u_z|_{z=\beta_2(t)} - \lambda_5(t,x)g(t,x,\beta_2(t)).$$

Пусть выполняется соотношение

$$|\varphi_2\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\varphi_1| \geq \delta > 0, \; \delta - const, \; (t,x) \in \Pi_{[0,T]}. \tag{7}$$

Прямая вспомогательная задача имеет вид

$$u_t = \alpha(t)u_{xx} + \frac{P\varphi_2 - Q\varphi_1}{\varphi_2\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\varphi_1}u_x + \lambda_2(t,x)u_{zz} + \lambda_3(t,x)u_z +$$

$$+ \frac{Q\varphi_{1x} - \varphi_{2x}P}{\varphi_2\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\varphi_1}u + \lambda_5(t,x)g(t,x,z), \tag{8}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \quad (x,z) \in E_2. \tag{9}$$

Разрешимость прямой вспомогательной задачи

Для доказательства существования решения задачи (8), (9) применим метод слабой аппроксимации [1, 2] . Расщепим задачу (8), (9) и линеаризуем ее сдвигом по времени на $(t - \tau/3)$ в нелинейных членах, получим

$$u_t^\tau = 3\alpha(t)u_{xx}^\tau + 3\frac{P^\tau\varphi_2 - Q^\tau\varphi_1}{\varphi_2\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\varphi_1}u_x^\tau, \quad n\tau < t \leq (n + \frac{1}{3})\tau, \tag{10}$$

$$u_t^\tau = 3\lambda_2(t,x)u_{zz}^\tau + 3\lambda_3(t,x)u_z^\tau, \quad (n + \frac{1}{3})\tau < t \leq (n + \frac{2}{3})\tau, \tag{11}$$

$$u_t^\tau = 3\frac{Q^\tau\varphi_{1x} - \varphi_{2x}P^\tau}{\varphi_2\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\varphi_1}u^\tau + 3\lambda_5(t,x)g(t,x,z), \; (n + \frac{2}{3})\tau < t \leq (n+1)\tau, \tag{12}$$

$$u^\tau(0,x,z)=u_0(x,z),\ x\in E_1,\ z\in E_1, \tag{13}$$

где $n=\overline{0,N-1}$, $\tau N=T$, $N>1$ - целое,

$$P^\tau=\varphi_{1t}-u_z^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,\beta_1(t))\beta_1'(t)-\alpha(t)\varphi_{1xx}-\lambda_2(t,x)u_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,\beta_1(t))-$$

$$-\lambda_3(t,x)u_z^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,\beta_1(t))-\lambda_5(t,x)g(t,x,\beta_1(t)),$$

$$Q^\tau=\varphi_{2t}-u_z^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,\beta_2(t))\beta_2'(t)-\alpha(t)\varphi_{2xx}-\lambda_2(t,x)u_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,\beta_2(t))-$$

$$-\lambda_3(t,x)u_z^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,\beta_2(t))-\lambda_5(t,x)g(t,x,\beta_2(t)).$$

Сделаем предположение относительно входных данных.

Предполагаем, что входные данные достаточно гладкие и удовлетворяют неравенствам

$$\left|\frac{d^s}{dt^s}\beta_1(t)\right|+\left|\frac{d^s}{dt^s}\beta_2(t)\right|+\left|\frac{\partial^{l+s}}{\partial x^l\partial t^s}\varphi_1(t,x)\right|+$$

$$+\left|\frac{\partial^{l+s}}{\partial x^l\partial t^s}\varphi_2(t,x)\right|+\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\lambda_i(t,x)\right|\le C,\ l=\overline{0,6},\ m=\overline{0,4},\ s=0,1,\ i=2,3,5, \tag{14}$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u_0(x,z)\right|+\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}g(t,x,z)\right|\le C,\ m=\overline{0,4},\ k=\overline{0,10-2m}, \tag{15}$$

где $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$, C-const.

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^\tau(t,x,z)$ задачи (10)-(13) в классе гладких ограниченных функций.

Используя достаточную гладкость входных данных показываем равномерную по τ оценку

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right|\le C,\ \text{при}\, k=\overline{0,10},\ (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}. \tag{16}$$

Эта оценка позволяет нам доказать равномерные по τ в полосе $G_{[0,t_*]}$ оценки

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right|\le C,\ m=\overline{0,4}, k=\overline{0,10-2m},\ (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}, \tag{17}$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_{txx}^\tau(t,x,z)\right|\le C,\ k=\overline{0,2},\ (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}. \tag{18}$$

Таким образом, выполнены следующие оценки равномерно по τ

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right|\le C, \tag{19}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u^\tau(t,x,z)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u^\tau(t,x,z)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u^\tau(t,x,z)\right|\le C, \tag{20}$$

$m=\overline{0,2}$, $k=\overline{0,2}$, $(t,x,z)\in G_{[0,t_*]}$.

Оценки (17), (19), (20) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности. Согласно теореме Арцела некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений (10)-(13) сходится вместе с производными по x и z до второго порядка включительно к некоторой функции $u(t,x,z)\in C^{0,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]})$. На основании теоремы сходимости метода слабой аппроксимации доказано, что $u(t,x,z)$ есть решение задачи (8), (9) и $u(t,x,z) \in C^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]})$, где

$$C^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]}) = \left\{ f(t,x,z) | f,\ f_t \in C(G_{[0,t_*]}),\ \frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial z^k} f \in C(G_{[0,t_*]}),\ m = \overline{0,2}, k = \overline{0,2} \right\}.$$

И имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{\partial^m}{\partial x^m} u(t,x,z) \right| \leq C,\ k = \overline{0,2},\ m = \overline{0,2}. \tag{21}$$

Таким образом, доказали существование решения $u(t,x,z)$ прямой задачи (8), (9).

Существование и единственность классического решения обратной задачи

Докажем, что тройка функций $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_4(t,x)$, где $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_4(t,x)$ заданы соотношениями (5), (6) является классическим решением обратной задачи (1)-(3). Так как $u(t,x,z)$ – это решение прямой задачи (8), (9), то подставив $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_4(t,x)$ в (1), мы получим верное тождество.

Согласно (7), (14), (15), (21) из (5), (6), (8) следует, что тройка функций $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_4(t,x)$ принадлежит классу

$$U(t_*) = \{u(t,x,z), \lambda_1(t,x), \lambda_4(t,x) | u \in C^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]}), \lambda_1, \lambda_4 \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t_*]})\}$$

и имеют место неравенства

$$\sum_{m=0}^{2} \sum_{k=0}^{2} \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^k}{\partial z^k} u(t,x,z) \right| \leq C,\ (t,x,z) \in G_{[0,t_*]}, \tag{22}$$

$$\sum_{m=0}^{2} \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} \lambda_1(t,x) \right| + \sum_{m=0}^{2} \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} \lambda_4(t,x) \right| \leq C,\ (t,x) \in \Pi_{[0,t_*]}, \tag{23}$$

где

$$C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t_*]}) = \left\{ f(t,x) | \frac{\partial^m}{\partial x^m} f \in C(\Pi_{[0,t_*]}), m = \overline{0,2} \right\}.$$

Далее показывается выполнение условий переопределения (3).

Доказана

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (4), (7), (14), (15). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_4(t,x)$ *задачи* (1)-(3) *в классе* $U(t_*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (22), (23). *Постоянная* t_*, $0 < t_* \leq T$, *зависит от постоянных* C *и* δ *из соотношений* (7), (14), (15).

Единственность решения задачи (1)-(3) доказана стандартным способом. Предполагая, что $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1^1(t,x)$, $\lambda_4^1(t,x)$ и $u_2(t,x,z)$, $\lambda_1^2(t,x)$, $\lambda_4^2(t,x)$ – два решения задачи (1)-(3) в $G_{[0,t_*]}$, удовлетворяющее условиям (22), (23), показываем равенство нулю разности этих двух решений.

Доказана

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (4), (7), (14), (15). *Тогда существует единственное решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_4(t,x)$ *задачи* (1)-(3) *в классе* $U(t_*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (22), (23). *Постоянная* t_*, $0 < t_* \leq T$, *зависит от постоянных* C *и* δ *из соотношений* (7), (14), (15).

Список литературы

[1] Белов Ю.Я., Кантор С.А. Метод слабой аппроксимации. Красноярск: КрасГУ, 1999. 236с.

[2] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск. 1967. 195с.

[3] Белов Ю.Я., Фроленков И.В. О задаче идентификации коэффициента при производной по времени в полулинейном параболическом уравнении // Совместный выпуск, часть I. Вычислительные технологии, Т. 9. Вестник КазНУ, № 3(42). Алматы-Новосибирск. 2004. С. 281–288.

[4] Полынцева С.В. Задача идентификации коэффициентов при производной по времени и пространственной переменной // Журнал СФУ: математика и физика. Красноярск. 2008. т. 1. № 3. С. 308–317.

[5] Полынцева С.В., Фролова К.А. Задача идентификации двух различных коэффициентов многомерного параболического уравнения // VI Всесибирский конгресс женщин-математиков: Материалы конференции. Красноярск: РИО СФУ, 2010. С. 343–346.

[6] Полынцева С.В., Соседов В.В. Задача определения коэффициентов при производной по времени и старшей производной по пространственной переменной в параболическом уравнении // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Самара: СамГТУ, 2010. С. 246–248.