Внутреннее оценивание множеств решений интервальных систем линейных уравнений со связями

Д.Ю. Людвин
Институт вычислительных технологий СО РАН
e-mail: `lyudvin@ngs.ru`

Работа посвящена задаче внутреннего оценивания объединенного множества решений интервальных линейных систем уравнений, на параметры которых наложены дополнительные связи. Для её решения были использованы два подхода. Первый, так называемый «центровой» подход, состоит в построении бруса, содержащегося во множестве решений, вокруг a priori известной точки-центра из этого множества. Второй подход основан на адаптивном дроблении параметров и вычислении внутренних оценок на основе формального подхода.

1. Постановка задачи

В работе рассматриваются интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{11}x_1 + \boldsymbol{a}_{12}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{1n}x_n = \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 + \boldsymbol{a}_{22}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2n}x_n = \boldsymbol{b}_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1}x_1 + \boldsymbol{a}_{n2}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{nn}x_n = \boldsymbol{b}_n \end{cases}$$

или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ — интервальная $n \times n$-матрица и $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i)$ — интервальный n-вектор.

Пусть на коэффициенты матрицы $A \in \boldsymbol{A}$ наложены дополнительные связи, т.е. они удовлетворяют всем условиям в виде равенств из заданного множества

$$C \;=\; \big\{\, f_\nu(a_{11}, \ldots, a_{nn}) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, l \,\big\}, \tag{1}$$

где f_ν – некоторые вещественные функции переменных $a_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Под интервальной системой линейных уравнений со связями будем понимать множество

$$\big\{\, Ax \;=\; b \mid a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij},\ b_i \in \boldsymbol{b}_i,\ f_\nu(a_{11}, \ldots, a_{nn}) = 0,\ i, j = \overline{1, n},\ \nu = \overline{1, l} \,\big\} \tag{2}$$

точечных линейных систем $Ax = b$ с матрицами $A \in \boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ и векторами $b \in \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$, для которых выполняются соотношения из множества C.

Объединённым множеством решений интервальной линейной системы уравнений со связями называется множество

$$\begin{aligned}\Xi_C(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \{\, & x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b}) \\ & ((\,Ax = b\,) \,\&\, (\text{справедливы условия из } C))\,\},\end{aligned}$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$, причем коэффициенты матриц A удовлетворяют ограниченям (1).

На практике довольно часто встречаются линейные системы, коэффициенты матриц которых зависят от некоторых параметров $p_1, p_2, \ldots, p_k$, принимающих значения из интервалов $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ соответственно, т.е. $a_{ij} = a_{ij}(p)$, где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$.

Такого рода система, являясь частным случаем описанной выше интервальной линейной системы со связями, представляет собой множество

$$\left\{\, A(p)x \;=\; b \mid a_{ij} = a_{ij}(p),\; b_i \in \boldsymbol{b}_i,\; p \in \boldsymbol{p},\; i, j = \overline{1, n}\,\right\}. \tag{3}$$

Интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ системы образована точечными матрицами $A(p)$, где $p \in \boldsymbol{p}$.

Объединённым множеством решений интервальной системы, матрица которой зависит от параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$, будем называть множество

$$\Xi_p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, p \in \boldsymbol{p})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\,A(p)x = b\,)\,\},$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $A(p)x = b$ с $p \in \boldsymbol{p}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

Нас будет интересовать задача нахождения наибольшего интервального вектора $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{IR}^n$, содержащегося в объединенном множестве решений интервальной системы со связями, т.е. задача внутреннего интервального оценивания этого множества решений.

2. «Центровой» подход

«Центровой» подход для внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ состоит в следующем [1]. Сначала ищется некоторая точка $t \in \mathbb{R}^n$, принадлежащая множеству решений интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ со связями, т.е. $t \in \Xi_C(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Затем, используя координаты найденной точки, по специальным формулам вычисляется брус $\boldsymbol{U} = (t + \rho\boldsymbol{e})$,

$\boldsymbol{e} = ([-1,1],\dots,[-1,1])^\top$ с центром в точке t, содержащийся во множестве решений $\varXi_C(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.

Размер ρ внутренней оценки $\boldsymbol{U}$ можно вычислить по формуле [1]:

$$\rho = \min_{1\le i\le n}\max_{A\in\boldsymbol{A}}\left\{\frac{\operatorname{rad}\boldsymbol{b}_i - \left|\operatorname{mid}\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j\right|}{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|}\right\}, \tag{4}$$

причем максимумы по $A\in\boldsymbol{A}$ для всех $i\in\{1,2,\dots,n\}$ находятся с учетом ограничений (1).

Таким образом, при построении внутренней интервальной оценки объединенного множества решений ИСЛАУ со связями необходимо решить для каждого $i\in\{1,2,\dots,n\}$ задачу условной оптимизации:

максимизировать функцию $\quad \Phi(a_{i1},\dots,a_{in}) = \dfrac{\operatorname{rad}\boldsymbol{b}_i - \left|\operatorname{mid}\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j\right|}{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|}$

при условиях $\quad f_\nu(a_{i1},\dots,a_{in}) = 0, \quad a_{ij}\in\boldsymbol{a}_{ij},$

$j=1,2,\dots,n, \quad \nu=1,2,\dots,l.$

Для интервальной линейной системы (3), элементы матрицы которой зависят от параметров $p_i\in\boldsymbol{p}_i$, $i=1,\dots,k$, описанная выше оптимизационная задача примет вид:

максимизировать функцию $\quad \Phi(p) = \dfrac{\operatorname{rad}\boldsymbol{b}_i - \left|\operatorname{mid}\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p)t_j\right|}{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(p)|}$

при условиях $\quad p\in\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_k).$

Для решения данной задачи используем градиентный метод:

$$p^{(m+1)} := p^{(m)} + \gamma^{(m)}\nabla\Phi(p^{(m)}), \qquad m = 0,1,2,\dots, \tag{5}$$

где $\nabla\Phi(p) = \left(\frac{\partial\Phi(p)}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial\Phi(p)}{\partial p_k}\right)$ – градиент целевой функции, $\gamma^{(m)} \in \mathbb{R}$ – длина шага на m-ой итерации. В качестве длины шага $\gamma^{(m)}$ используем величину $\arg\min\limits_{\gamma\in\mathbb{R}} \Phi(p^m + \gamma^m \nabla\Phi(p^m))$, которую находим посредством одномерной оптимизации.

3. Формальный подход

Формальное решение интервальной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ – это интервальный вектор $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)^\top$, обращающий её в равенство после подстановки в систему и выполнения всех операций по правилам интервальной арифметики (в качестве которой может выступать либо классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$, либо полная интервальная арифметика Каухера $\mathbb{KR}$, либо какая-то другая интервальная алгебраическая система).

Нахождение внутренней оценки множества решений ИСЛАУ можно свести к нахождению формального решения специальной интервальной системы уравнений [1]. Если правильный интервальный вектор $\boldsymbol{x}$ есть формальное решение уравнения
$$(\mathrm{dual}\boldsymbol{A})x = \boldsymbol{b}, \tag{6}$$
то $\boldsymbol{x}$ является внутренней интервальной оценкой объединенного множества решений системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. Таким образом, формальный подход позволяет свести задачу внутреннего интервального оценивания множества решений ИСЛАУ к задаче решения уравнения в дуализациях (6), т. е. к задаче численного анализа.

В качестве эффективного численного метода нахождения формальных решений интервальных систем уравнений можно использовать субдифференциальный метод Ньютона [1].

При нахождении формальных решений описанным выше способом не учитываются связи, наложенные на параметры системы. Поэтому полученные на их основе внутренние оценки множества решений ИСЛАУ могут содержать решения, как удовлетворяющие соотношениям (1), так и не удовлетворяющие им. Таким образом, наличие ограничений на параметры системы значительно усложняет задачу внутреннего оценивания ее множества решений.

Применим адаптивное дробление интервальных параметров системы уравнений [2]–[3]. Будем дробить интервалы параметров на подинтервалы ненулевой ширины, в объединении дающие исходные дробимые интервалы, таким образом, чтобы получающиеся системы-потомки соответствовали связям, накладываемым на систему. После многократного дробления интервалы параметров систем-потомков будут достаточно малой ширины. Формальные решения этих систем-потомков, не будут сильно отличаться от внутренних оценок их множеств решений с учетом имеющихся ограничений на параметры. Причем это отличие будет тем меньше, чем меньше ширина интервалов параметров систем-потомков, полученных при дроблении.

Рассмотрим дробление параметров интервальной системы (3). В интервальном векторе параметров $\boldsymbol{p}$ выбираем элемент $\boldsymbol{p}_r$, имеющий наибольшую ширину. Порождаем два интервальных вектора-потомка $\boldsymbol{p}'$ и $\boldsymbol{p}''$. Вектор $\boldsymbol{p}'$ получается из $\boldsymbol{p}$ заменой элемента $\boldsymbol{p}_r$ на $[\underline{\boldsymbol{p}}_r, \operatorname{mid} \boldsymbol{p}_r]$. Вектор $\boldsymbol{p}''$ получается из $\boldsymbol{p}$ заменой элемента $\boldsymbol{p}_r$ на $[\operatorname{mid} \boldsymbol{p}_r, \overline{\boldsymbol{p}}_r]$.

Находим формальные решения $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$, если они существуют, интервальных систем $\boldsymbol{A}'x = \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{A}''x = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{A}' = \{A(p) \mid p \in \boldsymbol{p}'\}$ и $\boldsymbol{A}'' = \{A(p) \mid p \in \boldsymbol{p}''\}$.

Процедуру дробления повторяем по отношению к полученным ранее векторам-потомкам. В процессе дробления организуем список $\mathcal{L}$, в котором храним найденные формальные решения систем-потомков и их интервальные векторы параметров. Из списка $\mathcal{L}$ для дробления каждый раз выбираем тот вектор параметров $\boldsymbol{p}$, который имеет наибольшую величину $\max\limits_{1 \le i \le k} \operatorname{wid} \boldsymbol{p}_i$. Процесс дробления продолжаем до тех пор, пока не будет достигнута необходимая малость ширины интервальных параметров всех систем-потомков, находящихся в списке $\mathcal{L}$.

В качестве искомой внутренней оценки множества решений интервальной системы (3) можно взять объединение правильных формальных решений, содержащихся в списке $\mathcal{L}$.

Автор благодарит С.П. Шарого за плодотворные обсуждения рассматриваемой задачи, которые помогли уяснить суть проблемы, устранить неточности и ошибки.

Список литературы

[1] Шарый С. П. Конечномерный интервальный анализ. Электронная книга `http://www-sbras.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/ SharyBook.pdf`

[2] Шарый С. П. Решение интервальных линейных систем со связями. // Сибирский журнал вычислительной математики. 2004. Т.7, №4. С. 363–376.

[3] Neumaier A. The enclosure solutions of parameter-dependent systems of equations. // Reliability in Computing. 1988. Vol. 19, P. 269–286.