Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера-Сидорова для уравнения Буссинеска–Лява

А. А.Замышляева
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: alzama@mail.ru

О.Н.Цыпленкова

Рассматривается оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Буссинеска – Лява, моделирующего продольные колебания балки. Проводится редукция к абстрактной задаче для уравнения соболевского типа второго порядка с относительно полиномиально ограниченным пучком операторов. Изучаются сильные решения задачи Шоуолтера – Сидорова для данного уравнения. Получены достаточные условия существования и единственности оптимального управления такими решениями исходной задачи.

Введение

Рассмотрим задачу оптимального управления, которая заключается в отыскании пары (v, u_0), где v – решение задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Буссинеска – Лява:

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v + u, \tag{0.1}$$

а $u_0 \in \mathfrak{U}_{ad}$ – управление, для которого выполняется соотношение

$$J(u_0) = \inf_{u \in \mathfrak{U}_{ad}} J(u). \tag{0.2}$$

Здесь $J(u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества, $\mathfrak{U}_{ad}$ – замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$.

Данную задачу для уравнения (0.1) можно описать в терминах задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0 v + g + Cu, \tag{0.3}$$

где операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{G})$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{G})$, функции $u : [0, \tau) \subset \mathbf{R}_+ \to \mathfrak{U}$, $g : [0, \tau) \subset \mathbf{R}_+ \to \mathfrak{G}$ $(\tau < \infty)$ и $\mathfrak{V}, \mathfrak{G}, \mathfrak{U}$ – некоторые гильбертовы пространства.

Данная работа выполнена в рамках направления, развиваемого Г.А. Свиридюком [1] и его учениками [2], [3]. Уравнения соболевского типа составляют обширную область неклассических уравнений математической физики. Оптимальное управление линейными уравнениями с условиями Коши впервые изучалось в [1]. В работе [2] предложен численный алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления для системы уравнений леонтьевского типа. Оптимальное управление для полулинейных уравнений соболевского типа рассматривалось в работе [3]. В [4] изучена начально-конечная задача для уравнения соболевского типа, которая является обобщением задачи Шоуолтера – Сидорова. Задача Коши для линейного уравнения соболевского типа второго порядка исследована в [5] в случае относительно полиномиальной ограниченности пучка операторов.

Статья, кроме введения, содержит 3 параграфа. В первом приведены определения и результаты теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов [6]. Второй параграф содержит теорему о существовании и единственности сильного решения для абстрактной задачи, а также теорему о существовании и единственности оптимального управления. В третьем параграфе абстрактные результаты прилагаются к конкретной начально-краевой задаче.

1. Полиномиально A-ограниченные пучки операторов и проекторы

Множества $\rho^A(\mathbf{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G};\mathfrak{V})\}$ и $\sigma^A(\mathbf{B}) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \rho^A(\mathbf{B})$ будем называть, соответственно A - *резольвентным множеством* и A - *спектром пучка* $\mathbf{B}$.

Введем в рассмотрение оператор-функцию комплексной переменной $R^A_\mu(\mathbf{B}) = (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ с областью определения $\rho^A(\mathbf{B})$, которую назовем A-*резольвентой пучка* $\mathbf{B}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пучок операторов $\mathbf{B}$ называется *полиномиально ограниченным относительно оператора* A (или просто *полиномиально* A-*ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (R^A_\mu(\mathbf{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{G};\mathfrak{V})).$$

Пусть пучок $\mathbf{B}$ полиномиально A-ограничен, контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Рассмотрим условие

$$\int\limits_\gamma R^A_\mu(\mathbf{B})d\mu \equiv \mathbb{O}. \tag{$*$}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G};\mathfrak{V})$, тогда условие $(*)$ выполняется.

ЛЕММА 1. Пусть пучок $\mathbf{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнено $(*)$. Тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^A_\mu(\mathbf{B})\mu A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu A R^A_\mu(\mathbf{B}) d\mu \tag{1.1}$$

–проекторы.

Положим $\mathfrak{V}^0 = \ker P$, $\mathfrak{G}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{V}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathfrak{G}^1 = \mathrm{im} Q$. Из предыдущей леммы следует, что $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$, $\quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0 \oplus \mathfrak{G}^1$. Через A^k (B^k_l) обозначим сужение оператора A, B_l на $\mathfrak{V}^k$, $k = 0, 1;$ $l = 0, 1$.

ТЕОРЕМА 1. (i) $A^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^k;\mathfrak{G}^k),\ k = 0, 1;$

(ii) $B^k_l \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^k;\mathfrak{G}^k),\ k = 0, 1,\ l = 0, 1;$

(iii) существует оператор $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^1;\mathfrak{V}^1)$;

(iv) существует оператор $B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^0;\mathfrak{V}^0)$.

В силу теоремы 1 существуют операторы $H_0 = (B^0_0)^{-1}A^0$, $H_1 = (B^0_0)^{-1}B^0_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^o)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.Введем семейство операторов $\{K^1_q, K^2_q\}$ следующим образом:

$$K^1_0 = \mathbb{I},\ K^2_0 = \mathbb{I},$$
$$K^1_1 = H_0,\ K^2_1 = -H_1,$$
$$K^1_{q+1} = K^2_q H_1,\ K^2_{q+1} = K^1_q - K^2_q H_1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.Точка ∞ называется

(i) *устранимой особой точкой* A-резольвенты пучка $\mathbf{B}$, если $K_1^1 \equiv \mathbb{O}$, $K_1^2 \equiv \mathbb{O}$;

(ii) *полюсом порядка* $p \in \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\mathbf{B}$, если $K_p^1 \not\equiv \mathbb{O}$, $K_p^2 \not\equiv \mathbb{O}$, но $K_{p+1}^1 \equiv \mathbb{O}$, $K_{p+1}^2 \equiv \mathbb{O}$;

(iii) *существенно особой точкой* A-резольвенты пучка $\mathbf{B}$, если $K_k^2 \not\equiv \mathbb{O}$ при любом $k \in \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.Пучок операторов $\mathbf{B}$ будем называть (A,p) - ограниченным, если пучок операторов $\mathbf{B}$ полиномиально A-ограничен, выполнено условие $(*)$, причем ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ A - резольвенты пучка $\vec{B}$.

2. Сильные решения и оптимальное управление

Для линейного неоднородного уравнения соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0 v + g \tag{2.1}$$

рассмотрим задачу Шоуолтера – Сидорова

$$P(v(0) - v_0) = 0, P(\dot{v}(0) - v_1) = 0, \tag{2.2}$$

где P – проектор, определенный формулой (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Вектор-функцию $v \in H^2(\mathfrak{V}) = \{v \in L_2(0,\tau;\mathfrak{V}) : \dot{v} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{V}),$ $\ddot{v} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{V})\}$ назовем *сильным решением уравнения* (2.1), если она п. в. на $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $v = v(t)$ уравнения (2.1) назовем сильным решением задачи (2.1), (2.2) если оно удовлетворяет (2.2).

Построим пространства $H^{p+2}(\mathfrak{G}) = \{v \in L_2(0,\tau;\mathfrak{G}) : v^{(p+2)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{G}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. Пусть $g \in H^{p+2}(\mathfrak{G})$. Введем в рассмотрение операторы

$$A_1 g(t) = -\sum_{q=0}^{p} K_q^2 (B_0^0)^{-1} \tfrac{d^q}{dt^q} g^0(t),\ k_1(t) = M^1(t) v_0,$$
$$k_2(t) = N^1(t) v_1,\ A_2 g(t) = \int_0^t N(t-s)(A^1)^{-1} g^1(s) ds.$$

ЛЕММА 2. Пусть пучок операторов $\mathbf{B}$ (A,p)-ограничен. Тогда

(i) $A_1 \in \mathcal{L}(H^{p+2}(\mathfrak{G}); H^2(\mathfrak{V}))$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathfrak{V}$ вектор-функция $k_1 \in C^2([0,\tau);\mathfrak{V})$;

(iii) $A_2 \in \mathcal{L}(H^{p+2}(\mathfrak{G}); H^2(\mathfrak{V}))$;

(iv) при любом $v_1 \in \mathfrak{V}$ вектор-функция $k_2 \in C^2([0,\tau);\mathfrak{V})$.

ТЕОРЕМА 2.[7] Пусть пучок операторов $\mathbf{B}$ (A,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любых $v_0, v_1 \in \mathfrak{V}$ и $G \in H^{p+2}(\mathfrak{G})$ существует единственное сильное решение задачи (2.2) для уравнения (2.1).

Перейдем к оптимальному управлению решениями. Рассмотрим задачу Шоуолтера – Сидорова (2.2) для линейного неоднородного уравнения соболевского типа

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0 v + g + Cu, \tag{2.3}$$

где функции v, g, u лежат в гильбертовых пространсвах $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{U}$ соответственно. Операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{G})$, оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{G})$, пучок операторов $\mathbf{B}$ $(A,p)-$ограничен.

Введем в рассмотрение пространство управлений

$$H^{p+2}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}) : u^{(p+2)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

Пространство $H^{p+2}(\mathfrak{U})$ гильбертово, в силу гильбертовости $\mathfrak{U}$, со скалярным произведением

$$[v,w] = \sum_{q=0}^{p+2} \int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt.$$

Выделим в пространстве $H^{p+2}(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $H_\partial^{p+2}(\mathfrak{U})$ – *множество допустимых управлений.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Вектор-функцию $u_0 \in H_\partial^{p+2}(\mathfrak{U})$ назовем *оптимальным управлением решениями задачи* (2.2), (2.3), если

$$J(u_0) = \min_{u \in H_\partial^{p+2}(\mathfrak{U})} J(u), \tag{2.4}$$

где

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau (||v^{(q)} - v_0^{(q)}||^2 + ||v^{(q+1)} - v_1^{(q)}||^2)dt + \sum_{q=0}^{p+2} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt. \tag{2.5}$$

Здесь $N_q \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $q = 0, 1, \ldots, p+2$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $(v_0(t), v_1(t))$ – желаемое состояние системы.

ТЕОРЕМА 3.[7] Пусть пучок операторов $\mathbf{B}$ (A,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любых $v_0, v_1 \in \mathfrak{V}$ и $g \in H^{p+2}(\mathfrak{G})$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (2.2) для уравнения (2.3).

3. Уравнение Буссинеска – Лява

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\delta\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v + u \tag{3.1}$$

с граничным условием

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \delta\Omega \times \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Редуцируя задачу (3.1),(3.2) к уравнению (2.3), положим

$$\mathfrak{V} = \{v \in W_q^{l+2}(\Omega) : v(x) = 0, x \in \delta\Omega\}, \quad \mathfrak{G} = W_q^l(\Omega),$$

где $W_q^l(\Omega)$ – пространства Соболева $1 < q < \infty$. Операторы A, B_1 и B_0 зададим формулами $A = \lambda - \Delta$, $B_1 = \alpha(\Delta - \lambda')$, $B_0 = \beta(\Delta - \lambda'')$, $C = \mathbb{I}$. При любом $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{G})$.

Обозначим через $\{\lambda_k\}(= \sigma(\Delta))$ собственные значения задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности. Через $\{\varphi_k\}$ обозначим соответствующие ортонормированные (в смысле $L^2(\Omega)$) собственные функции.

ЛЕММА 3.[6] Пусть выполнено одно из следующих условий:

(i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$;
(ii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$;
(iii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$.
Тогда пучок $\mathbf{B}$ полиномиально A-ограничен.

В случае (i) и (iii) имеет место условие $(*)$, а в случае (ii) это условие не выполняется.

Построим проекторы. В случае (i) $P = \mathbb{I}$ и $Q = \mathbb{I}$, в случае (ii)

$$P = \mathbb{I} - \sum_{\lambda=\lambda_k} < \varphi_k, \cdot > \varphi_k,$$

а проектор Q имеет тот же вид, но определен на пространстве $\mathfrak{G}$. В обоих оставшихся случаях операторы $H_1 = H_0 \equiv \emptyset$, поэтому ∞ – полюс порядка нуль пучка операторов $\mathbf{B}$. Следовательно $\mathbf{B}$ является $(A, 0)$-ограниченным.

Рассмотрим задачу Шоуолтера – Сидорова

$$P(v(x,0) - v_0(x)) = 0, \quad P(v_t(x,0) - v_1(x)) = 0. \tag{3.3}$$

В силу теоремы 2 справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено одно из следующих условий:
(i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$;
(ii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$.

Тогда для любых $v_0, v_1 \in \mathfrak{V}$ и $g \in H^2(\mathfrak{G})$ существует единственное сильное решение задачи (3.2), (3.3) для уравнения

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v + g. \tag{3.4}$$

Перейдем к задаче оптимального управления. Введем в рассмотрение пространство управлений

$$H^2(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}) : \ddot{u} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U})\}.$$

Выделим в пространстве $H^2(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $H^2_\partial(\mathfrak{U})$ – множество допустимых управлений.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнено одно из следующих условий:
(i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$;
(ii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$.

Тогда для любых $v_0, v_1 \in \mathfrak{V}$ существует единственное оптимальное управление $u_0 \in H^2_\partial(\mathfrak{U})$ задачи (3.2), (3.3) для уравнения (3.1), минимизирующее функционал (2.5).

Список литературы

[1] Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. VSP, Utrecht; Boston, 2003.

[2] Келлер А. В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа // Обозрение приклад. и пром. математики. М. 2009. Т. 16, вып. 2. С. 345–346.

[3] Манакова Н. А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 9. С. 1185–1192.

[4] Загребина С. А. О задаче Шоуолтера - Сидорова // Изв. вузов. Математика. 2007. № 3. С. 22-28.

[5] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.

[6] Замышляева А. А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка // Вычислит. технол. 2003. Т. 8, № 4. С. 45-54.

[7] Замышляева А. А., Цыпленкова О. Н. Задача оптимального управления для уравнения соболевского типа второго порядка // Неклассические уравнения математической физики. / Новосибирск, ИМ СО РАН. 2010. С. 95-101.