Контактные задачи уравнений математической физики*

С.В. Попов
Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова
e-mail: `madu@sitc.ru`

С.В. Потапова
НИИ математики при ЯГУ имени М.К. Аммосова

В.Г. Марков
Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова

Предлагается единообразный подход к построению моделей сопряжения различных физических процессов таких, как распространение тепла в неоднородных средах (задачи типа дифракции), взаимодействия фильтрационных и каналовых потоков жидкости (фильтрация в скважину), возвратные течения в пограничном слое за точкой его отрыва и другие.

В работе рассматриваются вопросы корректности краевых задач для противоположных спутных потоков в случае линейных уравнений с меняющимся направлением времени высоко порядка с полной матрицей условий сопряжения потоков (склеивания). Также рассматриваются вопросы базисности спектральных задач с индефинитной метрикой в случае полной матрицы условий склеивания.

1°. **Погранслойное приближение в диффузионных уравнениях**.
Рассмотрим в некоторой области $(x, y) \in D$ уравнение

$$\mathbf{a}\nabla u = \operatorname{div}(\lambda \nabla u), \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, u), \quad \lambda = \lambda(x, y, u) \geq 0, \tag{1}$$

описывающее распространение величины u в среде — перенос вдоль траекторий вектора $\mathbf{a}$ и с коэффициентом диффузии λ. Например, u — концентрация некоторого вещества в потоке жидкости, температура или плотность жидкости и т. д.

Уравнение (1) описывает также течения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Стокса). В этом случае u — компонента вектора скорости $\mathbf{u} = (u, v)$ вдоль основного направления потока. При этом $|v| \ll 1$, λ — вязкость жидкости, $\mathbf{a} \equiv \mathbf{u} = (u, v)$.

Пусть имеется выбранное направление, в котором преимущественно распространяется поток $u(x, y)$, будем считать его совпадающим с направлением оси $0x$. Например, область D является вытянутым прямоугольником вдоль $0x$:

$$D = \{(x, y) : \ 0 < x < l, \ 0 < y < h\}, \quad \frac{h}{l} \ll 1.$$

Предположим еще, что $|\lambda| \ll |a|$, $\mathbf{a} = (a, b)$, $|b| \ll 1$, т.е. преобладает конвективный перенос субстанции u в направлении $0x$ ($\inf |a| > 0$).

*Работа выполнена при поддержке аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)", рег. номер проекта 2.1.1/13607, а также в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013 гг. по мероприятию 1.3.1

Реализуем эти предположения в виде зависимости от малого параметра ε [1]

$$x = \bar{x}, \quad y = \varepsilon\bar{y}, \quad \lambda = \varepsilon^2\bar{\lambda}, b = \varepsilon\bar{b}, \quad a = \bar{a}, \quad u = \bar{u}.$$

Тогда (1) преобразуется следующим образом

$$\bar{a}\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{b}\bar{u}_{\bar{y}} = \frac{\partial}{\partial\bar{y}}(\bar{\lambda}\bar{u}_{\bar{y}}),$$

откуда, возвращаясь к прежним переменным, получим

$$\mathbf{a}\nabla u = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda u_y). \tag{2}$$

Пусть теперь $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$ — матрица, $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2})$. Вновь положим $\lambda_{ij} = \varepsilon^2\bar{\lambda}_{ij}$ $(i,j = 1,2)$. Тогда

$$\nabla \cdot (\lambda\nabla u) = \nabla \cdot (\sum_{i=1}^{2} \lambda_{1i}u_{x_i}, \sum_{i=1}^{2} \lambda_{2i}u_{x_i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} (\lambda_{1i}u_{x_i})_{x_1} + (\lambda_{21}u_{x_1})_{x_2} + (\lambda_{22}u_{x_2})_{x_2}.$$

При таком приближении в полученном равенстве первые три члена будут иметь сомножитель ε^k, $k \geq 1$, т.е.

$$\nabla \cdot (\lambda\nabla) = (\lambda_{22}\bar{u}_y)_y + O(\varepsilon),$$

где $(x_1, x_2) = (x, y)$. Таким образом, и в этом случае приходим к уравнению вида (2).

2°. **Пограничный слой Прандтля**

Стационарные уравнения Навье–Стокса имеют вид

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mu\Delta\mathbf{u} - \nabla p + \rho\mathbf{F}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{u} = (u, v)$ — вектор скорости жидкости, ρ и p — плотность и давление, соответственно, μ — вязкость, $\rho\mathbf{F}$ — внешняя сила, которая при движении в пористой среде выражается в форме Жуковского, $\rho\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{u}$. Здесь $\nabla = (\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial\eta})$, ξ — текущая координата вдоль обтекаемого препятствия $(\eta = 0)$, η — вдоль нормали к нему.

Сила сопротивления $\mathbf{F}$ имеет такое же представление и в случае движения проводящей жидкости в магнитном поле.

Используя предположения 1° о порядке величин

$$\xi = \bar{\xi}, \quad u = \bar{u}, \quad p = \bar{p}, \quad \eta = \varepsilon\bar{\eta}, \quad v = \varepsilon\bar{v}, \quad \mu = \varepsilon^2\bar{\mu}$$

приходим к уравнению Прандтля пограничного слоя в открытом потоке ($\gamma \equiv 0$, $\mathbf{F} = g\nabla h = \mathbf{g}$ — вектор ускорения силы тяжести) или пористой среде ($\gamma \neq 0$)

$$\mathbf{u} \cdot \nabla u = \mu u_{\eta\eta} - p_\xi - \gamma\mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{4}$$

Отметим, что в этом уравнении сила тяжести не учитывается.

3°. **Стационарная фильтрация двухфазной жидкости** описывается следующими уравнениями:

$$b'(s)\mathbf{v}\nabla s = \nabla\cdot(\lambda a(s)\nabla s), \quad \nabla\cdot(K\nabla p + \mathbf{f}) = 0. \tag{5}$$

Здесь s — концентрация (насыщенность) одной из компонент двухфазной жидкости, $\mathbf{v}$ и p — вектор скорости фильтрации и среднее давление смеси, K и λ — положительно-определенные матрицы, $a(s) > 0$ при $s \in (0,1)$ и $a|_{s=0,1} = 0$. При предположениях пункта 2° приходим к уравнениям

$$b'(s)\mathbf{v}\nabla s = (\lambda_0 a(s)s_y))_y, \quad \nabla\cdot(K\nabla p + \mathbf{f}) = 0. \tag{6}$$

Если поле скоростей $\mathbf{v}$ известно, то (6) превращается в уравнение вида (2) [2].

4°. **Ортогональные преобразования**

Введем обозначения

$$\nabla \equiv \nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \mathbf{x} = (x,y), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi,\eta), \quad \nabla\cdot u = \mathrm{div} u, \quad \Delta = \nabla^2.$$

Формулы преобразования координат (x,y) в (ξ,η) при повороте системы вокруг начала на угол φ (в направлении против часовой стрелки) имеют вид $\boldsymbol{\xi} = A\mathbf{x}$, где $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Отметим выполнение равенств $A^{-1} = A^T$ и $\mathbf{a}A^{-1} = A\mathbf{a}$. Тогда

$$\nabla_\xi = A\nabla_x, \quad \mathbf{a}\nabla_x = A\mathbf{a}\nabla_\xi, \quad \nabla_\xi^2 = (A\nabla_x)^2 = \nabla_x^2.$$

В этих условиях (1) (при $\lambda = 1$) преобразуется к виду $A\mathbf{a}\nabla_\xi u = \nabla_\xi^2 u$ и тем самым (2) записывается в форме

$$A\mathbf{a}\nabla_\xi u = u_{\eta\eta}. \tag{7}$$

Несколько сложнее преобразуются (4) ($\mathbf{w} = (w,z)$):

$$\mathbf{w} = A\mathbf{u}, \quad \nabla_x\cdot\mathbf{u} = A^{-1}\nabla_\xi\cdot\mathbf{u} = A^{-1}\nabla_\xi\cdot A^{-1}\mathbf{w} = \nabla_\xi\cdot\mathbf{w},$$

$$\mathbf{u}\cdot\nabla_x u = A^{-1}\mathbf{w}\cdot A^{-1}\nabla_\xi u = \mathbf{w}\cdot\nabla_\xi u, \quad u = w\cos\varphi - z\sin\varphi.$$

При условиях $z = \varepsilon\bar{z}$, $w = \bar{w}$, как в пункте 2°, получим

$$\mathbf{w}\cdot\nabla_\xi w = \mu\Delta_\xi u - p_\xi - \gamma u, \quad \nabla_\xi\cdot\mathbf{w} = 0, \tag{8}$$

т.е. (4) инвариантно при таких преобразованиях.

Замечание 1. В выкладках полагалось, что $\varphi \neq \pi/2$, а в силу того, что вид уравнения от φ не зависит, можно от этого условия отказаться.

5°. **Сопряжение потоков**.

Пусть кривая Γ, проходящая через точку $(0,0)$ разбивает область D на области D_1 и D_2 так, что $D = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$. В области D_1 преимущественным направлением распространения величины $u(x,y)$ является направление оси $0x$, в области D_2 — оси 0ξ. При этом пусть в областях D_1 и D_2 для величин $u = u^1(x,y)$ и $u = u^2(\xi,\eta)$, соответственно, выполняются уравнения (2) и (7).

Условия непрерывности функций u^k и их нормальных производных на линии Γ имеют вид

$$u^1(\mathbf{x}) = u^2(A\mathbf{x}), \quad \nabla_x u^1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = A\nabla_\xi \cdot u^2(\xi) \cdot \mathbf{n}|_{\boldsymbol{\xi}=A\mathbf{x}}, \tag{9}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к Γ, внутренняя в D_1.

Если, как и при выводе уравнения (2) учесть зависимость от малого параметра $\varepsilon > 0$ ($x = \bar{x}$, $y = \varepsilon\bar{y}$), то

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}$$

и условия (9) приближенно превращаются в следующие

$$u^1(\mathbf{x}) = u^2(A\mathbf{x}), \quad u^1_y(\mathbf{x}) = Cu^2_\eta(A\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \tag{10}$$

где $C = \mathrm{const}$.

Пример 1. Пусть $\Gamma = 0\xi$,

$$D^2 = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \xi_0(\eta),\ 0 < \eta < h\}, \quad \xi_0(\eta) = \frac{1}{\cos\varphi}(x_0 + \eta \mathrm{tg}\varphi),$$
$$D^1 = \{(x,y) | 0 < x < x_0,\ 0 < y < y_0(x)\}, \quad y_0(x) = x\mathrm{tg}\varphi.$$

В этом случае краевые условия имеют вид:

$$u^1|_{y=0} = u_0(x),\ x \in [0,x_0], \quad u^2|_{\xi=0} = f_0(\eta),\ \eta \in [0,h].$$

Пример 2. Пусть Γ определяется прямой $y = x\mathrm{tg}\psi$. В этом случае имеем

$$\nabla_x u^1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = (\bar{u}_{\bar{x}}, \frac{1}{\varepsilon}\bar{u}_{\bar{y}}) \cdot (\sin\psi, -\cos\psi) = \sin\psi \bar{u}_{\bar{x}} - \frac{1}{\varepsilon}\cos\psi \bar{u}_{\bar{y}}.$$

Аналогично

$$A\nabla_\xi u^2 \cdot \mathbf{n} = (\cos\varphi \bar{u}_{\bar{\xi}} - \sin\varphi \frac{1}{\varepsilon}\bar{u}_{\bar{\eta}}, \sin\varphi \bar{u}_{\bar{\xi}} + \cos\varphi \frac{1}{\varepsilon}\bar{u}_{\bar{\eta}}) \cdot (-\sin\varphi, \cos\varphi) =$$
$$= -\cos\varphi \sin\psi \bar{u}_{\bar{\xi}} + \sin\varphi \sin\psi \frac{1}{\varepsilon}\bar{u}_{\bar{\eta}} + \sin\varphi \cos\psi \bar{u}_{\bar{\xi}} + \cos\varphi \cos\psi \frac{1}{\varepsilon}\bar{u}_{\bar{\eta}}.$$

Таким образом, условия (10) принимают вид:

$$u^1(\mathbf{x}) = u^2(A\mathbf{x}), \tag{11}$$

$$-\cos\psi u^1_y(\mathbf{x}) = (\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi) u^2_\eta(A\mathbf{x}), \tag{12}$$

где $\mathbf{x} \in \Gamma$.

6°. **Противоположные спутные потоки**.

В этом случае $\varphi = \pi$, $\psi = 0$ и условия (12) склейки производных имеют вид:

$$u^1_y(\mathbf{x}) = u^2_\eta(A\mathbf{x}).$$

Краевые задачи для противоположных спутных потоков в случае линейных уравнений (в основном модельных) рассматривались в работах М.С. Боуенди, П. Гривара, К.Д. Пагани, Г. Таленти, О. Арены, С.А. Терсенова, А.М. Нахушева, И.Е. Егорова, А.А. Керефова, Н.В. Кислова, С.Г. Пяткова, В.В. Катышева, Х.Х. Ахметова и других авторов (библиография имеется в [3],[4]). Н.В. Кислов [5] исследовал подобные задачи с помощью "проекционной теоремы", обобщающей результат М.С. Боуенди и П. Гривара, а С.Г. Пятков [4], опираясь на ряд свойств собственных функций соответствующей спектральной задачи.

Определенный интерес к изучению спутных потоков был вызван их прикладными значениями. Это относится в первую очередь к нелинейным уравнениям гидродинамических течений Н.Н. Яненко [6, 7], где имеется достаточно полная библиография по таким уравнениям переменного типа.

В монографии С.А.Терсенова [3] установлено, что гладкие решения этих задач существуют только при условиях выполнения конечного числа связей интегрального характера между данными задачи.

В настоящей работе рассматриваются

а) параболические уравнения $2n$-го порядка с меняющимся направлением времени с общей матрицей условий склеивания, связанные с применением теории сингулярных интегральных уравнений [8, 9]. Устанавливается разрешимость краевых задач в пространствах Гельдера. Показано, что гельдеровские классы их решений в некоторых случаях условий склеивания зависят от нецелого показателя Гельдера при выполнении необходимых и достаточных условий на данные задачи;

б) спектральные задача вида

$$u'' = \lambda g(x)u, \quad u(-1) = u(1) = 0, \tag{13}$$

где $g(x)$ — вещественная функция, принимающая как положительные, так и отрицательные значения при $x \in (-1, 1)$.

Задачи Штурма-Лиувилля с незнакоопределенной весовой функцией $g(x)$, а также эллиптические задачи такого вида, были предметом исследований многих авторов. Эти проблемы возникают во многих областях физики и прикладной математики. Достаточно полная библиография может быть найдена в монографиях [10, 11], где, в частности, был рассмотрен вопрос о базисности по Риссу собственных и присоединенных функций задачи (13) в пространстве L_2 с весом $|g|$ (которое естественным образом возникает в таких спектральных задачах), т.е. вопрос о существовании эквивалентного скалярного произведения в этом пространстве, относительно которого система собственных функций задачи (13) является ортонормированным базисом. Однако, во всех работах, посвященных вопросам базисности, рассматривались спектральные задачи вида (13) лишь с непрерывными условиями склеивания в точках, где происходит изменение знака $g(x)$, в частности, в случае $g(x) = \operatorname{sgn} x$ функция $u(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, включая первую производную. В настоящей работе мы рассматриваем вопрос о базисности по Риссу собственных функций задачи (13) в случае общей матрицы условий склеивания с постоянными действительными коэффициентами в точке, где $g(x)$ меняет знак. Определения функциональных пространств, используемых в работе могут быть найдены, например, в [10].

Вопросы разрешимости в пространствах Гельдера соответствующей краевой задачи для параболических уравнений второго порядка с меняющимся направлением времени в случае полной матрицы условий склеивания рассматривались в [12].

Список литературы

[1] Монахов В.Н., Попов С.В. Контактные краевые задачи математической физики // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 58–73.

[2] Коновалов А.Н., Монахов В.Н. О некоторых моделях фильтрации многофазных жидкостей // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1976. Вып. 27. С. 51–65.

[3] Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 105 с.

[4] Пятков С.Г. Некоторые свойства собственных функций линейных пучков // Сибир. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 111–124.

[5] Кислов Н.В. Неоднородные краевые задачи для дифференциально-операторного уравнения смешанного типа и их приложения // Мат. сб. 1984. Т. 125, вып. 1. С. 19–37.

[6] Яненко Н.Н., Новиков В.А. Об одном новом классе уравнений переменного типа // Успехи Мат. Наук, 1980. Т. 35, № 4. С. 156.

[7] Ларькин Н.А., Новиков В.А, Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983. 270 с.

[8] Попов С.В., Потапова С.В. Гельдеровские классы решений $2n$-параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Доклады Академии Наук. 2009. Т. 424, № 5. С. 594–596.

[9] Попов С.В., Потапова С.В. Параболические уравнения четвертого порядка с меняющимся направлением времени с общей матрицей условий склеивания // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, № 1. С. 109–123.

[10] Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000. 336 с.

[11] Pyatkov S.G. Operator theory. Nonclassical problems. Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002.

[12] Туласынов М.С. Первая краевая задача для одного параболического уравнения с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий склеивания // Вестник Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 1 С. 57–68.