Законы сохранения для уравнений гидродинамики.*

С.Б. Медведев
Институт вычислительных технологий СО РАН
e-mail: medvedev@ict.nsc.ru

Найдены законы сохранения нулевого и первого порядков для одномерной системы двух римановых инвариантов.

Несмотря на то, что система инвариантов Римана (1) может приводить к формированию сингулярных решений, для которых пространственные производные равны бесконечности (градиентная катастрофа), эта система может обладать законами сохранения первого порядка. Найдены условия для существования и плотности законов сохранения первого порядка.

Хорошо известно, что система для двух инвариантов Римана

$$r_t + \lambda(r,s)r_x = 0, \quad s_t + \mu(r,s)s_x = 0. \tag{1}$$

имеет бесконечное число законов сохранения с плотностью $F(r,s)$, которая зависит только от r и s [1].

Найдены необходимые и достаточные условия на коэффициенты λ и μ, при которые существуют законы сохранения зависящие также от t и x.

Для системы в инвариантах Римана (1) ищется закон сохранения нулевого порядка в форме

$$D_tF(t,x,r,s) + D_xG(t,x,r,s) = 0. \tag{2}$$

Если F и G не зависят от t и x, тогда функция $F(t,x,r,s)$ находится как решение линейного гиперболического уравнения

$$(\lambda F_r)_s = (\mu F_s)_r, \quad \text{или} \quad (\lambda-\mu)F_{rs} + \lambda_s F_r - \mu_r F_s = 0, \tag{3}$$

которое в общем случае имеет два семейства решений и может быть решено каскадным методом Лапласа.

Если допустить зависимость плотности закона сохранения $F(t,x,r,s)$ от t и x, то возможно существование дополнительных законов сохранения. Для законов сохранения нулевого порядка имеет место следующее утверждение:

Утверждение. Система двух римановых инвариантов (1) имеет дополнительный закон сохранения, зависящий от t и x, если и только если выполняется условие

$$\left(\frac{g_{rs} + 2f_s g_r}{g_r}\right)_r = \left(\frac{f_{rs} - 2f_s g_r}{f_s}\right)_s, \quad f_s = \frac{\lambda_s}{\lambda-\mu}, \quad g_r = \frac{\mu_r}{\lambda-\mu}. \tag{4}$$

Причем F зависит от t и x линейно.

Для законов сохранения первого порядка

$$D_tF(t,x,r,s,r_x,s_x) + D_xG(t,x,r,s,r_x,s_x) = 0 \tag{5}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке межрегионального интеграционного проекта СО РАН № 103.

найдены условия на коэффициенты λ, μ, при которых система обладает бесконечным набором плотностей. В частности, найдено условие существование закона сохранения первого порядка не зависящего от t и x

$$F(r,s,r_x,s_x) = \frac{e^{-2f}m(r)}{r_x} + \frac{e^{2g}n(s)}{s_x} = a(r,s)\left(\frac{1}{\lambda_r r_x} + \frac{1}{\mu_s s_x}\right). \tag{6}$$

Необходимым и достаточным условием является существование функций $m(r)$ и $n(s)$, с помощью которых коэффициент $a(r,s)$ имел два представления

$$a(r,s) = 2e^{-2f}\lambda_r m(r), \quad a(r,s) = 2e^{2g}\mu_s n(s). \tag{7}$$

Список литературы

[1] Рожденственский Б. Л., Яненко Н. Н. *Системы квазилинейных уравнений* М.: Наука, 1978.